

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. FARAHAT

Espaces de Banach contenant l^1 , d'après H. P. Rosenthal

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 26, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974__A26_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
11, rue Descartes
91128 Palaiseau Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

ESPACES DE BANACH CONTENANT ℓ^1 ,
D'APRÈS H.P. ROSENTHAL

par J. FARAHAT

Exposé n° XXVI

5 Juin 1974

Définition : Soit S un ensemble, $(A_n, B_n) \quad n \in \mathbb{N}$ une suite de sous-ensembles de S vérifiant $A_n \cap B_n = \emptyset$ et X un sous-ensemble de S .

On dira que (A_n, B_n) converge sur X si pour tout $x \in X$, x appartient à un nombre fini de A_n ou x appartient à un nombre fini de B_n (c'est-à-dire $\lim 1_{A_n}(x) = 0$ ou $\lim 1_{B_n}(x) = 0$).

Lorsque $X = S$, on dit simplement que (A_n, B_n) converge.

Définition : La suite $(A_n, B_n) \quad n \in \mathbb{N}$ est Booleenement indépendante si pour tous sous-ensembles finis disjoints K et L de $\mathbb{N}$, on a

$$\left(\bigcap_{n \in K} A_n \right) \cap \left(\bigcap_{n \in L} B_n \right) \neq \emptyset.$$

Notation : On note $\mathcal{P}_\infty(X)$ l'ensemble des parties de X de cardinal infini (identifié à une partie de $\{0,1\}^X$).

Définition : Soit $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$. $\mathcal{X}$ est dit Ramsey s'il vérifie :

$$\forall X \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}), \exists Y \in \mathcal{P}_\infty(X) \text{ tel que } \mathcal{P}_\infty(Y) \subset \mathcal{X} \text{ ou } \mathcal{P}_\infty(Y) \subset \mathcal{X}^c.$$

Théorème 1 : (Silver) Soit $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, $\mathcal{X}$ analytique pour la topologie produit sur $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$; alors $\mathcal{X}$ est Ramsey.

(En réalité nous n'avons besoin que du théorème de Williams qui énonce le même résultat pour $\mathcal{X}$ ouvert).

Théorème 2 : (Rosenthal) Soit (A_n, B_n) une suite de sous-ensembles de S telle que, pour tout n , $A_n \cap B_n = \emptyset$.

Si (A_n, B_n) n'admet pas de sous-suite convergente, il existe une sous-suite $(A_n, B_n) \quad n \in \mathbb{M}$ booleenement indépendante.

Démonstration : Nous poserons $\varepsilon_n A_n = A_n$ si $\varepsilon_n = +1$,

$$\text{et } \varepsilon_n A_n = B_n \text{ si } \varepsilon_n = -1.$$

Soit $p_0 \in \mathbb{N}$. Nous définirons un ensemble $F_{p_0} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ de la façon suivante

soit $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, et soit (n_j) la suite des éléments de M rangée en ordre croissant. Nous dirons que $M \in F_{p_0}$ si :

$$\bigcap_{p=1}^{p_0} (-1)^p A_{n_p} \neq \emptyset .$$

L'ensemble F_{p_0} est ouvert.

En effet, si $M = \{n_1, n_2, \dots\} \in F_{p_0}$, le voisinage V_M de M défini par :

$$V_M = \{ M' \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) ; \forall m \leq n_{p_0}, m \in M' \Leftrightarrow m \in M \}$$

vérifie $V_M \subset F_{p_0}$.

On voit pour la même raison que $\bigcap F_{p_0}$ est ouvert, donc F_{p_0} est aussi fermé. Posons

$$\mathcal{X} = \bigcap_{n \geq 1} F_n .$$

C'est un fermé, donc un ensemble de Ramsey (théorème de Silver ou de Williams). Par conséquent :

$$\exists M_0 \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}), \quad \mathcal{P}_\infty(M_0) \subset \mathcal{X} \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}_\infty(M_0) \subset \mathcal{X}^c$$

Mais, puisque par hypothèse (A_n, B_n) n'admet pas de sous-suite convergente, on peut trouver un point $x_0 \in S$ tel que :

$$\{n \in M_0 ; x_0 \in A_n\} \quad \text{et} \quad \{n \in M_0 ; x_0 \in B_n\}$$

soient deux ensembles infinis.

On peut donc déterminer une sous-suite (n_j) , formée d'éléments de M_0 , et telle que :

$$\forall j \geq 1, \quad x_0 \in \varepsilon_j A_{n_j} .$$

On voit alors que le sous-ensemble infini M' de M_0 formé des éléments (n_j) appartient à $\mathcal{X}$. D'après la propriété de M_0 , on aura donc nécessairement :

$$\mathcal{P}_\infty(M_0) \subset \mathcal{X}.$$

Rangeons les éléments de M_0 dans une suite croissante $(n_p)_{p \geq 1}$, et posons :

$$M_1 = \{n_2, n_4, n_6, \dots, n_{2p}, \dots\}.$$

Nous allons montrer que la sous-suite $(A_n, B_n)_{n \in M_1}$ est Booleenement indépendante.

En effet, on va montrer que

$$\forall p, \forall (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq p}, \quad \bigcap_{i=1}^p \varepsilon_i A_{n_{2i}} \neq \emptyset.$$

Soit $(\varepsilon_i)_{i=1}^p$ donné.

Considérons M_3 défini par

$$n_1 \in M_3 \quad \text{si} \quad \varepsilon_1 = +1$$

$$n_1 \notin M_3 \quad \text{si} \quad \varepsilon_1 = -1$$

$$n_{2i} \in M_3 \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq p$$

$$n_{2i+1} \in M_3 \quad \text{si} \quad \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} = +1 \quad 1 \leq i \leq p$$

$$n_{2i+1} \notin M_3 \quad \text{si} \quad \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} = -1$$

$$n_j \in M_3 \quad j > 2p.$$

Alors $M_3 \in \mathcal{P}_\infty(M_0)$, donc si $M_3 = \{m_1, m_2, \dots\}$

$$\bigcap_{i=1}^{2p} (-1)^i A_{m_i} \neq \emptyset.$$

Mais par construction

$$\bigcap_{i=1}^p \varepsilon_i A_{n_{2i}} \supset \bigcap_{i=1}^{2p} (-1)^i A_{m_i} \neq \emptyset.$$

$$i = 1 \text{ à } 2p$$

C.Q.F.D.

Théorème 3 : Soit S un convexe symétrique d'un espace vectoriel.

Soit (f_n) une suite de fonctions affines uniformément bornées $\in \mathcal{C}^S$.

Alors il existe une sous-suite vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

- i) f_{n_i} converge simplement.
- ii) f_{n_i} est équivalente à la base canonique de ℓ_1 si l'on munit $\mathcal{C}^S$ de la norme sup.

Démonstration : Supposons que (f_n) n'admet pas de sous-suite convergente.

Soient $\mathcal{D} = \{(D_1, D_2); \text{des disques ouverts de centre et de rayon rationnels vérifiant :}$

$$\text{diam } D_1 = \text{diam } D_2 < 1/2 \, d(D_1, D_2)\}$$

Soit (D_1^k, D_2^k) une énumération de $\mathcal{D}$. Nous allons voir que :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ et } M \subseteq \mathbb{N} \text{ tel que } \forall L \subset M \\ \exists s \in S \text{ tel que } (f_n(s))_{n \in L} \text{ a des points d'accumulation dans } D_1^{k_0} \text{ et } D_2^{k_0}. \end{array} \right.$$

Sinon $\exists \mathbb{N} \supset M_1 \supset M_2 \dots$ tel que $\forall k \in \mathbb{N} \, \forall s \in S \, (f_n(s))_{n \in M_k}$ a ses points d'accumulation en dehors de D_1^K ou en dehors de D_2^K .

Choisissons une suite croissante $m_1 < m_2 < \dots < m_K \dots$, telle que $m_K \in M_K$.

Posons :

$$L = \{m_i\}.$$

Puisque $(f_n)_{n \in L}$ ne converge pas, on peut trouver p et q , $p \neq q$ tels que :

$$p, q \in \overline{(f_n(s))}.$$

On peut alors trouver un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $p \in D_1^k$, $q \in D_2^k$, ce qui fournit la contradiction cherchée car $(m_i) \in M_K$ pour $i \geq k$.

Alors soit k_0 et $M = (n_j)$ tel que $(*)$ soit vérifiée.

Soient α le centre de $D_1^{K_0}$ et β le centre de $D_2^{K_0}$; $2\delta = \text{dist}(D_1^{K_0}, D_2^{K_0})$.
 En multipliant tous les f_n par $\frac{|\beta - \alpha|}{\beta - \alpha}$, on peut supposer $\beta - \alpha > 0$.

Alors soient $A_p = \{s ; f_{n_p}(s) \in D_1^{K_0}\}$ et $B_p = \{s ; f_{n_p}(s) \in D_2^{K_0}\}$.

D'après le théorème 2, il existe un sous-ensemble $L \subset M$ tel que $(A_n, B_n ; n \in L)$ est Booleenement indépendante.

Il nous reste à montrer que la sous-suite $(f_n)_{n \in L}$ est équivalente à la base canonique de ℓ_1 .

Il suffit de montrer que $\|\sum c_K f_K\| > \frac{\delta}{4} \sum |c_K|$, pour toute suite $c_K = a_K + ib_K$ de nombres complexes.

On peut supposer $\sum |a_K| \geq \sum |b_K|$.

Soit $s \in \bigcap_{a_K \geq 0} B_K \cap \bigcap_{a_K < 0} A_K$ et soit $t \in \bigcap_{a_K \geq 0} A_K \cap \bigcap_{a_K < 0} B_K$

$$\begin{aligned} \|\sum c_K f_K\| &\geq \text{Re} \sum c_K f_K \left(\frac{s-t}{2}\right) \\ &\geq \sum a_K \text{Re} f_K \left(\frac{s-t}{2}\right) - \sum |b_K| \text{Im} f_K \left(\frac{s-t}{2}\right) \\ &\geq \delta \sum |a_K| - \frac{\delta}{2} \sum |b_K| \\ &\geq \frac{\delta}{2} \sum |a_K| \\ &\geq \frac{\delta}{4} \sum |c_K|. \end{aligned}$$

car $u \in D_1^{K_0}$, $v \in D_2^{K_0} \Rightarrow \text{Re}(v-u) \geq 2\delta$, $\text{Im}(v-u) \leq \text{diam} D_1^{K_0} < \delta$.)

Corollaire : Soit (x_n) une suite bornée dans un Banach E .

Il existe alors une sous-suite (x'_n) qui vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- i) (x'_n) est de Cauchy faible,
- ii) (x'_n) est équivalente à la base de ℓ_1 .

En effet, on identifie (x_n) à une suite de fonctions affines uniformément bornées sur B_E , : $x_n(f) = f(x_n)$, $\forall f \in B_E$, et on applique le théorème 3.

Corollaire 2 : Si E est faiblement séquentiellement complet, alors E est réflexif ou E contient un sous-espace isomorphe à ℓ_1 .

En effet, si E ne contient pas ℓ_1 toute suite bornée admet une sous-suite faiblement convergente et l'espace est donc réflexif (Eberlein).

Corollaire 3 : Si E a la propriété de Schuur, alors tout sous-espace de dimension infinie contient un sous-espace isomorphe à ℓ_1 .

En effet, si M est de dimension infinie, on choisit une suite bornée (x_n) vérifiant $d(x_n ; [x_1, \dots, x_{n-1}]) > 1$.
 (x_n) ne peut admettre de sous-suite de Cauchy faible (x_{n_i}) , car sinon $(x_{n_{i+1}} - x_{n_i})$ converge faiblement vers 0 donc fortement en contradiction avec $\|x_{n_{i+1}} - x_{n_i}\| \geq 1$.

*
**
**

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H.P. ROSENTHAL : Banach spaces containing ℓ^1 (à paraître).
- [2] L.E. DOR : On sequences spanning a complex ℓ^1 space (à paraître).
- [3] E.M. KLEINBERG : Infinitary combinatorics . Cambridge summer school in Mathematic logic ; p 361-418 ; Berlin ; Springer Verlag 1973 (Lecture notes in Mathematics 337).
