

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. BRUNEL

Espaces associés à une suite bornée dans un espace de Banach (suite et fin)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 18, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974__A20_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

ESPACES ASSOCIÉS À UNE SUITE BORNEE
DANS UN ESPACE DE BANACH

(suite et fin)

par A. BRUNEL

Nous allons donner d'autres propriétés des suites E.S.A.

Observons d'abord que si G est un espace de Banach muni d'une norme, notée $\| \cdot \|$, et si (e_n) est une suite de vecteurs unitaires, engendrant G et ayant la propriété E.S.A. relativement à la norme $\| \cdot \|$, les formes linéaires $f_k : \varphi(a) \rightarrow \sum_{i \geq k} a_i$; $a \in S$, sont continues.

En effet, on a $\|f_k(\sum_i a_i e_i)\| \leq \|\sum_i a_i e_i\|$ si la norme $\| \cdot \|$ est monotone et l'on a vu qu'il existe toujours une norme monotone et E.S.A., équivalente à la norme initiale $\| \cdot \|$. Remarquons aussi que si l'on pose pour tout entier $k > 0$, $e_k^* = f_k - f_{k+1}$, on a

$$\langle e_k^*, e_j \rangle = \delta_{kj}$$

pour tout couple d'entiers (k, j) .

La suite (e_n^*) , dans le dual G^* de G , est alors la suite "duale" de (e_n) .

Proposition 7 : La suite $(f_n)_{n \geq 2}$ est une base E.S.A. pour le sous-espace de G^* engendré par ces vecteurs. Si (e_n) est aussi monotone, alors la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est E.S.A..

Commençons par montrer que la suite $e'_n = e_n - e_{n-1}$, avec $e_0 = 0$, est une base de G . Tout $x \in G$, appartenant à $\varphi(S)$, peut s'écrire

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) e'_k,$$

où la somme ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.

Posons, pour tout entier $m \geq 1$, $U_m(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x) e'_k$, et prouvons que

la suite des normes $\|U_m(x)\|$ est croissante en m .

On a

$$\begin{aligned} \left| U_{m+1}(x) \right| &= \left| a_1 e_1 + \dots + a_m e_m + f_{m+1}(x) e_{m+1} \right| \geq \left| a_1 e_1 + \dots + (a_m + f_{m+1}(x)) e_{m+1} \right| \\ &= \left| U_m(x) \right|, \end{aligned}$$

si $x = \sum_i a_i e_i \in \varphi(S)$.

En effet, $f_m(x) = a_m + f_{m+1}(x)$.

Selon un théorème de M. Day [7], cela suffit pour montrer que (e'_n) est une base de G .

Soit maintenant $\omega = \sum_{i=2}^n b_i f_i$ un élément de $[f_n; n \geq 2]$, en

désignant par ce dernier symbole le sous-espace fermé de G^* engendré par les f_n , $n \geq 2$. Posons $\tau = \omega + b_{k+1}(f_k - f_{k+1})$, k étant un entier compris entre 2 et $n-1$. La norme de τ , dans G^* , est égale à

$$\left| \tau \right|_* = \sup \left\langle \tau, \sum_i a_i e'_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i, \text{ avec } a \in S, \quad \left| \sum_i a_i e'_i \right| = 1.$$

Les résultats précédents concernant la suite (e'_n) montrent que l'on peut supposer $a_k = 0$, pour $k > n$. Par compacité le supremum est atteint

et il existe un vecteur $x = \sum_{i=1}^n a_i e'_i$, $\left| x \right| = 1$, tel que $\left| \tau \right|_* = \langle \tau, x \rangle$.

Posons $a_{k+1} = \gamma$. La relation $\left| x \right| = 1$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} (1) \quad 1 &= \left| \dots a_k (e_k - e_{k-1}) + \gamma (e_{k+1} - e_k) + a_{k+2} (e_{k+2} - e_{k+1}) + \dots \right| \\ &= \left| \dots (a_{k-1} - a_k) e_{k-1} + (a_k - \gamma) e_k + (\gamma - a_{k+2}) e_{k+1} + \dots \right| \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$(2) \quad \left| \dots (a_{k-1} - a_k) e_{k-1} + 0 \cdot e_k + (a_k - a_{k+2}) e_{k+1} + \dots \right| \leq 1.$$

Ainsi, en prenant $\gamma = a_k$ dans (1), on ne peut que diminuer $\|x\|$, tandis que $\langle \tau, x \rangle$ n'est pas modifié. Donc l'inégalité dans (2) est une égalité et l'on peut prendre $\gamma = a_k$ dans l'expression de x .

Il en résulte que $\|\tau\|_* \leq \|\omega\|_*$. Cette dernière relation entraîne la propriété cherchée pour $(f_n)_{n \geq 2}$.

Pour achever la démonstration, observons que ce qui sert essentiellement dans l'argument précédent c'est la présence des termes consécutifs $(a_k - \gamma)e_k + (\gamma - a_{k+2})e_{k+1}$.

Lorsque l'on considère la suite entière $(f_n)_{n \geq 1}$, il se peut que $(\gamma - a_2)e_1$ soit le seul terme qui intervienne dans l'expression à minorer et, si l'on suppose (e_n) monotone, le résultat reste vrai.

Proposition 8 : Supposons que (e_n) soit une suite **E.S.A.** monotone engendrant G , et que c_0 ne soit pas contenu dans G^* . Alors (f_n) est une base **E.S.A.** et "boundedly complete" de G^* .
En outre (e_n) est une base "1-shrinking" de G .

On sait que (f_n) est "boundedly complete" si G^* ne contient pas c_0 . Il en résulte que (e_n) a la propriété de "shrinking". Ceci entraîne que $[f_n; n \geq 1] = G^*$. On en déduit que

$$(f_1, f_1 - f_2, f_2 - f_3, \dots) = (f_1, e_1^*, e_2^*, \dots),$$

est une base de G^* . Ainsi $[e_n^*]$ est de codimension 1 dans G^* , c'est-à-dire que (e_n) est "1-shrinking".

Théorème 7 : Supposons que G ne contienne ni c_0 , ni un sous-espace complétement isomorphe à l^1 . Alors G est quasi-réflexif. En outre, il existe sur G une norme **E.S.A.**, équivalente à la norme initiale, qui rend G isométriquement isomorphe à son bidual.

L'hypothèse faite entraîne que G^* ne contienne pas c_0 . Les propositions précédentes montrent alors que (e_n) est une base de G ayant les

propriétés "boundedly complete" et "1-shrinking". Ceci prouve que G est quasi-réflexif (voir [6]). Il reste à prouver la dernière assertion du théorème.

Introduisons les éléments g_n de G^{**} , reliés aux f_n comme les f_n l'étaient aux (e_n) ; c'est-à-dire que l'on a

$$\langle g_n, \sum_i b_i f_i \rangle = \sum_{i \geq n} b_i, \quad \text{pour } b \in S.$$

On va supposer dans ce qui va suivre que la norme $\| \cdot \|_*$ est monotone sur les (f_n) , ce qui revient à remplacer éventuellement la norme initiale $\| \cdot \|$ par une norme E.S.A., équivalente. Observons aussi que

$$\langle f_j, e_n \rangle = 1 \quad (\text{resp. } 0), \quad \text{si } j \leq n \quad (\text{resp. } j > n),$$

$$\langle g_1 - g_{n+1}, f_j \rangle = 1 \quad (\text{resp. } 0), \quad \text{si } j \leq n \quad (\text{resp. } j > n).$$

Soit alors Q l'application canonique d'immersion de G dans G^{**} .

On a $Q(e_n) = g_1 - g_{n+1}$. Nous nous proposons d'établir que l'application linéaire $R : G \rightarrow G^{**}$, définie par $R(e_n) = g_n$, pour tout entier n , est l'isométrie cherchée.

$$\text{Soit } x = \sum_{i=1}^n x_i g_i, \text{ un élément de } G^{**}, \text{ pour lequel } \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

On a

$$(3) \quad \|x\|_{**} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\text{pour un } y = \sum_{k=1}^n y_k (f_k - f_{k-1}), \text{ avec } \|y\|_* = 1.$$

On peut se limiter au cas où $y_k = 0$ pour $k > n$, parce que la suite $(f_n - f_{n-1})_{n \geq 1}$,

$f_0 = 0$, est monotone à droite par la propriété E.S.A..

On peut aussi écrire $y = (y_1 - y_2)f_1 + \dots + (y_{n-1} - y_n)f_{n-1} + y_n f_n$, et l'on applique la propriété E.S.A. à (f_n) .

On a

$$y = y_1 f_1 - y_2 e_1^* \dots - y_n e_{n-1}^* = (y_1 - y_2) e_1^* + (y_1 - y_3) e_2^* + \dots + (y_1 - y_n) e_{n-1}^* + y_1 f_n,$$

et il est facile de vérifier l'égalité des normes

$$\|y\|_* = \|(y_1 - y_2) e_1^* + (y_1 - y_3) e_2^* + \dots + (y_1 - y_n) e_{n-1}^* + y_1 e_n^*\|_*.$$

Si l'on ajoute une même constante aux coordonnées y_i , la quantité $\sum_i x_i y_i$ ne change pas et, par monotonie, on peut supposer que $y_1 = 0$, lorsque (3) est réalisée. Finalement

$$\|x\|_{**} = x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n \quad \text{avec} \quad \|y_2 e_1^* + \dots + y_n e_{n-1}^*\|_* = 1.$$

Mais on a aussi

$$\sum_{i=2}^n x_i y_i = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=2}^n y_i e_i^* \right\rangle \leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|.$$

On vient de prouver que si $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, alors on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i g_i \right\|_{**} \leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|.$$

Partons maintenant de $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

On a, toujours pour les mêmes raisons :

$$\|u\| = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{pour un } y = \sum_{i=1}^n y_i e_i^*, \quad \text{avec } \|y\|_* = 1.$$

Mais $\|y\|_* = \|y_1 e_1^* + \dots + y_{n-1} e_{n-1}^* + y_n f_n\| = \|y_1 f_1 + (y_2 - y_1) f_2 + \dots + (y_n - y_{n-1}) f_n\|_*$,

et, si l'on ajoute un même nombre aux y_i la somme $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ ne change pas

et, par monotonie de $\left| \cdot \right|_*$, on peut supposer que $y_1 = 0$. Donc

$$\left| u \right| = \sum_{i=2}^n x_i y_i \leq \left| \sum_{i=1}^n x_i g_i \right|_{**}.$$

On a aussi montré que l'application linéaire $\tilde{R}$ du sous-espace de G , engendré par $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots$, dans le sous-espace de G^{**} , engendré par $g_1 - g_2, g_2 - g_3, \dots$, définie par $R(e_n - e_{n+1}) = g_n - g_{n+1}$, est une isométrie.

Mais si l'on tient compte des égalités $g_1 - g_2 = Q(e_1)$, $(g_2 - g_3) = Q(e_2 - e_1), \dots$, on en déduit que, dans G^{**} , les sous-espaces

$$[Q(e_1), Q(e_2) - Q(e_1), Q(e_3) - Q(e_2), \dots] \quad \text{et} \quad [Q(e_2) - Q(e_1), Q(e_3) - Q(e_2), \dots]$$

sont isométriquement isomorphes pour l'application linéaire V , définie par $V(Q(e_1)) = Q(e_2) - Q(e_1)$, $V(Q(e_2) - Q(e_1)) = Q(e_3) - Q(e_2), \dots$.

Cela prouve que

$$G^{**} = [g_1, g_2 - g_1, g_3 - g_2, \dots] \quad \text{et} \quad [g_2 - g_1, g_3 - g_2, \dots] \subset G^{**}$$

sont isométriquement isomorphes, comme le sont aussi

$$G = [e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_2, \dots] \quad \text{et} \quad [e_2 - e_1, e_3 - e_2, \dots] \subset G.$$

*
*
*