

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. KRÉE

Exemples d'utilisation de la théorie des applications radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 9, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974__A11_0

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

EXEMPLES D'UTILISATION DE LA THÉORIE DES APPLICATIONS RADONIFIANTES

par P. KREE

Nous allons utiliser les méthodes de la théorie des applications radonifiantes conjointement avec d'autres méthodes : noyaux positifs, théorie du potentiel, filtrage, séries à termes aléatoires, équations aux dérivées partielles en dimension infinie, équations de convolution, équations aux dérivées partielles avec données aléatoires. Ceci va nous conduire à la résolution de certains problèmes, à de nouvelles applications... et à de nouveaux problèmes | Le texte ci-après présente sans démonstrations certains résultats de [10], [11], à ceci près qu'on a ajouté les notions de mesures $\mathbb{Q}$ -cylindriques, de mesures $\mathcal{E}$ -cylindriques et les points (11), (12), (14), (15), (24). On utilise la théorie des applications radonifiantes telle qu'elle est formulée dans [1], [2], mais aussi sous une forme différente qui est rapidement évoquée au paragraphe 3.

1. Mesures $\mathbb{Q}$ -cylindriques ; mesures $\mathcal{E}$ -cylindriques ; mesures $\mathbb{Q}$ -cylindriques.

On se place dans la catégorie EVF des espaces vectoriels (réels) faibles. Les objets de E sont des couples ordonnés $X - X'$, $Y - Y'$... d'e.v. en dualité séparante ; pour simplifier, les objets de EVF sont notés $X, Y, \dots$. Les morphismes de EVF sont des applications linéaires faiblement continues $X \rightarrow Y$ entre premiers éléments des couples associés aux objets. Soit $\mathbb{Q}$ une sous-catégorie de EVF contenant un objet fixé X . Soit $\mathbb{Q}'$ la catégorie déduite de $\mathbb{Q}$ en lui retranchant l'objet X et tous les morphismes de $\mathbb{Q}$ de source X .

(1) On fait les hypothèses suivantes sur $\mathbb{Q}$ et X .

- i) L'intersection des noyaux des morphismes de $\mathbb{Q}$ de source X est l'origine de X .
- ii) Tout couple G_1, G_2 d'objets de $\mathbb{Q}'$ admet un produit (G_{12}, π_1, π_2) dans $\mathbb{Q}$ et $\ker \pi_1 \cap \ker \pi_2 = 0$.

(2) Définitions complémentaires : Une fonction $\mathbb{Q}$ -cylindrique φ sur X est une fonction à valeurs réelles sur X , qui s'écrit $\varphi = \tilde{\varphi} a$, où a est un

morphisme de $\mathcal{C}$ de but $G \in \text{obj } \mathcal{C}^*$, et où $\tilde{\varphi}$ est une fonction numérique sur G . Si de plus $\tilde{\varphi}$ est bornée continue, on dit que φ est une fonction $\mathcal{B}^0$ - $\mathcal{C}$ -cylindrique. Un $\mathcal{C}$ -cylindre de X ...

(3) Définition d'une mesure $\mathcal{C}$ -cylindrique sur X : voir [14].

La donnée d'une mesure $\mathcal{C}$ -cylindrique μ sur X est la donnée pour tout morphisme de $\mathcal{C} : X \xrightarrow{a} G$, d'une mesure de Radon notée $a(\mu) = a\mu$ sur $G \in \text{obj } \mathcal{C}^*$, supportée par $\overline{\text{Im } a}$, ces données étant astreintes à la condition de compatibilité suivante :

(4) pour tout morphisme $a : X \rightarrow G$ de $\mathcal{C}$, tout morphisme $c : G_1 \rightarrow G_2$ de $\mathcal{C}^*$ est $a(\mu)$ -propre (voir [4]) et l'on a $(ca)(\mu) = c(a\mu)$.

En fait, $a\mu$ est une mesure de Radon sur $\tilde{G} = \overline{\text{Im } a}$. On dit que μ est bornée si de plus $\sup_a \|a\mu\| < \infty$. On dit que μ est une probabilité $\mathcal{C}$ -cylindrique si de plus chaque $a\mu$ est une loi de probabilité.

(5) La condition de compatibilité (4) en implique une autre :

Pour des morphismes $a : X \rightarrow G_1$, $c : G_1 \rightarrow G_2$, posons $b = ca$.

Soient $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ les applications $X \rightarrow \overline{\text{Im } a} = \tilde{G}_1$ et $Y \rightarrow \overline{\text{Im } b} = \tilde{G}_2$ déduites canoniquement de a et de b respectivement. Soient $\tilde{a}\mu$ et $\tilde{b}\mu$ les restrictions de $a\mu$ et de $b\mu$ à $\tilde{G}_1$ et $\tilde{G}_2$ respectivement. Soit $\tilde{c} : \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2$ le prolongement faiblement continu de la restriction de a à $\text{Im } a$. Alors $\tilde{c} \tilde{a}(\mu) = \tilde{b}\mu$.

(6) Mesures $\mathcal{E}$ -cylindriques : cas particulier de (3).

On se donne un objet X de EVF et une famille $\mathcal{E} = (A_i)_{i \in I}$ de sous-espaces fermés de X , stable par intersection finie et qui ne contient pas le sous-espace nul. Pour tout i , on pose $X_i = X/A_i$ et l'on note s_i la surjection canonique de X sur X_i . On suppose $\bigcap \ker s_i = 0$. On prend pour $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont X et les X_i . Les morphismes de source X sont les s_i . Quels que soient X_i et X_j dans $\mathcal{C}^*$, il y a au plus un morphisme $X_i \rightarrow X_j$; c'est la surjection canonique définie si $A_i \subset A_j$. Le produit dans $\mathcal{C}$ de X_i et X_j est $X/(A_i \cap A_j)$. En fait, $\mathcal{C}^*$ est

un système projectif d'e.v.. Ce système est noté $\pi_{\mathcal{E}}$

(7) Cas particuliers de mesures $\mathcal{E}$ -cylindriques.

a) $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c(X)$ la famille des sous-espaces fermés de codimension finie de X . On retrouve le système projectif π_c usuel d'e.v. de dimension finie, et la définition usuelle des probabilités cylindriques.

b) Soit F un objet de EVF et soit E_0 un espace topologique où les fonctions numériques continues bornées séparent les points. Par la construction de Stone Cech, E_0 se plonge dans un objet E de EVF . On a un plongement de l'ensemble $\mathcal{P}(E_0)$ des probabilités de Radon sur E_0 dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des probabilités de Radon sur E . Soit $X = E \times F$. Soit $(B_j)_{j \in J} = \mathcal{E}_c(F)$. En prenant $\mathcal{E} = (E \times B_j)_{j \in J}$, on trouve les probabilités cylindriques μ sur X , dont la première projection $\pi_1(\mu)$ est de Radon. Si on impose la condition supplémentaire $\pi_1(\mu) \in \mathcal{P}(E_0)$, on obtient les probabilités E_0 -cylindriques sur $E_0 \times Y$: voir [5].

c) Soient E et F deux objets de EVF . Soit $X = E \otimes F$. Soit $(B_i)_{i \in I} = \mathcal{E}_c(E)$. Si $\mathcal{E} = (B_i \otimes F)_{i \in I}$, on retrouve les probabilités $F \otimes$ cylindriques : [9]. Pour simplifier la terminologie, nous dirons que ces probabilités cylindriques sont de Radon en F .

d) Soit $X = l^2 = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \text{ avec } \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$. Soit $\mathcal{E}_v$ la famille des sous-espaces $\{\sum_{n=1}^N x_n e_n\}$ avec $N = 1, 2, \dots$. On obtient le système projectif des espaces $l_N^2 = \{\sum_{n=1}^{N-1} x_n e_n\}$ et les mesures bornées $\mathcal{E}_v$ -cylindriques qui interviennent dans les travaux récents de M. Visik.

e) Soient X et G deux objets de EVF . Soit A un ensemble d'applications linéaires continues $a : X \rightarrow G$, tel que $\bigcap \ker a = 0$. En prenant pour $\mathcal{E}$ la famille des intersections finies de noyaux de A , on obtient les mesures A -cylindriques : [10]. Pour toute partie finie J de A , posant X_J sur X_K (si $K \subset J$), on a un système projectif $\pi_A = (X_J, s_{KJ})$.

g) En remplaçant dans e), $\mathcal{E}_c(H)$ par $\mathcal{E}_v(H)$, on définit les mesures $\mathcal{E}_{tv}$ -cylindriques.

(8) Remarque.

a) Soit μ une mesure $\mathbb{Q}$ -cylindrique sur X . La décomposition canonique de tout morphisme $a : X \rightarrow G$ de $\mathbb{Q}$, de source X et de but G dans $\mathbb{Q}^*$ s'écrit :

$$a \xrightarrow{s_a} X_a = X / \ker a \xrightarrow{\tilde{a}} \overline{\text{Im } a} \rightarrow \mathbb{Q} \quad . \text{ Soit } a_1 = \tilde{a} \circ s_a.$$

Alors (H.ii) entraîne que la famille $\mathcal{E}$ des $\ker a$ est stable par intersection finie et vérifie $\bigcap \ker s_a = 0$. Supposons que pour tout a , il existe une mesure de Radon sur X_a notée $s_a \tilde{\mu}$ telle que $\tilde{a}(s_a \tilde{\mu}) = a\mu$. Alors les mesures $s_a \tilde{\mu}$ définissent une mesure $\mathcal{E}$ -cylindrique $\tilde{\mu}$ sur X qui caractérise la mesure $\mathbb{Q}$ -cylindrique μ de départ. Il en est ainsi lorsque μ est une probabilité cylindrique, ou plus généralement lorsque μ est une mesure A -cylindrique. Dans ce cas, les objets de $\mathbb{Q}^*$ sont les produits finis d'objets isomorphes à G et les morphismes de X vers $\mathbb{Q}^*$ sont les morphismes de type $a_1 \times \dots \times a_n : X \rightarrow G^n$, les a_j appartenant à A .

b) Cependant, la méthode ci-dessus ne s'applique pas à une mesure $\mathbb{Q}$ -cylindrique quelconque car les mesures $s_a \tilde{\mu}$ n'existent pas toujours. On pourra s'en convaincre en prenant X hilbertisable, la probabilité gaussienne canonique sur X , et $\mathbb{Q}$ la catégorie déduite de la catégorie des espaces de Hilbert en remplaçant les flèches de source X et de but dans $\mathbb{Q}^*$ par les opérateurs de Hilbert Schmidt.

c) Plus généralement la théorie des applications p -radonifiantes permet de construire une mesure $\mathbb{Q}$ -cylindrique en partant d'une probabilité cylindrique μ . Un intérêt immédiat d'une telle construction est le prolongement de la fonction additive d'ensembles et de la fonctionnelle linéaire associée à μ .

(9) Supporteur d'une mesure $\mathbb{Q}$ -cylindrique μ .

On dit que μ admet un convexe fermé K de X comme supporteur si pour tout a , $a\mu$ est supportée par $\overline{a(K)}$.

(10) Transformation de Fourier des mesures $\mathcal{G}$ -cylindriques bornées.

On définit d'abord Ξ , limite inductive des $a_1'((\overline{\text{Im } a})')$. La condition (H_i) entraîne que c'est un sous-espace dense de X' . Les transformées de Fourier des mesures $a_i(\mu)$ définissent par raccordement une fonction $\hat{\mu}(\xi)$ sur Ξ dont la restriction à chaque $(\overline{\text{Im } a})'$ est continue. Réciproquement... Par exemple la fonction $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + i \xi_n)^{-1}$ est la transformée de Fourier d'une mesure $\mathcal{E}_v$ -cylindrique sur l^2 .

Faute d'espace temps, nous ne détaillons pas les opérations usuelles sur les mesures $\mathcal{G}$ -cylindriques, sur les mesures $\mathcal{E}$ -cylindriques et sur les mesures $\mathcal{Q}$ -cylindriques : image par une application linéaire, produit tensoriel, convolution.

(11) Signalons que dans le cas particulier où les éléments de $\mathcal{E}$ sont des espaces vectoriels de codimension finie, on peut remplacer dans la définition des mesures $\mathcal{E}$ -cylindriques les $s_i \mu$ par des distributions : voir [12], [14]. On définit naturellement les opérateurs différentiels paraboliques (resp. hyperboliques) à coefficients constants sur $\mathbb{R} \times H$. En utilisant la transformation de Laplace pour les distributions $\mathcal{E}_t$ -cylindriques sur $\mathbb{R} \times H$ admettant $\overline{\mathbb{R}^+} \times H$ comme supporteur, on voit immédiatement que ces opérateurs admettent des solutions élémentaires dans les distributions $\mathcal{E}_t$ -cylindriques.

(12) Processus linéaire associé à un ensemble compatible de v.a.

Soit $(X, \mathcal{E})$ un couple comme ci-dessus. Soit P une probabilité de Radon sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de l'espace topologique Ω . A tout quotient X_i de X par un élément A_i de $\mathcal{E}$, on associe une variable aléatoire f_i , ou classe d'équivalence d'applications P -Lusin mesurables de Ω dans X_i . Les f_i sont compatibles si pour tout morphisme $s_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ on a $f_i = s_{ij} f_j$. Si les f_i sont compatibles, les probabilités $f_i(P)$ définissent une probabilité $\mathcal{E}$ -cylindrique μ sur X . La réciproque est vraie. De même le théorème [1] XII.2.1. s'adapte à ce cas. A la variable aléatoire f_i est associé le processus linéaire R_i

$$(13) \quad \begin{aligned} X_i' &\rightarrow L^0(\Omega) \\ \xi &\rightarrow \xi f_i \end{aligned}$$

Par raccordement, les processus R_i associés à un ensemble compatible $(f_i)_i$ de v.a. définissent un processus linéaire R basé sur Ξ . Dans les cas particuliers (7) a, b et c on retrouve ainsi les processus linéaires usuels, les processus E_0 -linéaires de [5], les processus linéaires vectoriels de [9]. Si dans ce qui précède on remplace P par une mesure bornée P' sur Ω , les mesures bornées $f_i(P')$ définissent une mesure $\mathcal{E}$ -cylindrique bornée sur X , et on écrira que R est un "processus" linéaire.

(14) Exemple ; Potentiels de Gauss-Bessel sur un espace de Hilbert H .

Soit $1 \leq p \leq \infty$. A toute $f \in L^p(\Omega)$ associons $P' = f dP$. Les "v-a". f_i définissent une mesure $\mathcal{E}$ -cylindrique bornée sur X que l'on peut noter $f d\mu$. Lorsque f décrit $L^p(\Omega)$, les $f d\mu$ décrivent un espace de Banach $K_\mu^0(X)$. Dans le cas particulier où μ est la probabilité gaussienne canonique sur H , en convolant les éléments de $K_\mu^0(H)$ avec la distribution cylindrique intégrable G_s (s réel quelconque) de transformée de Fourier $(1 + \|h\|^2)^{-s/2}$, on obtient un espace des distributions cylindriques intégrables. D'où une définition possible (parmi d'autres) des potentiels de Gauss Bessel.

(15) Lemme de densité cylindrique utilisé dans (24), [13], [14].

Les données sont celles de (12), les f_i étant compatibles. Soit $1 \leq p < \infty$. Pour tout i , on donne un e.v. Φ_i de fonctions numériques sur X_i . On suppose :

- Pour tout i , Φ_i est une partie partout dense de $L_{\mu_i}^p$.
- Pour tout $\varphi_j \in \Phi_j$, et toute surjection canonique s_{ij} de X_i sur X_j , $\varphi_j s_{ij} \in \Phi_i$.

On pose $\mathcal{F}_i = \{\varphi_i f_i, \varphi_i \in \Phi_i\}$ et $\mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}_i$. Soit $\mathcal{B}'$ la plus petite tribu sur Ω rendant mesurables les $R\xi$, ξ décrivant $\bigcup X_i'$ et contenant les parties P -négligeables. Alors $\mathcal{F}$ est dense dans $L^p(\Omega')$.

2. Utilisation en filtrage.

Je rappelle d'abord comment intervient la théorie des noyaux positifs dans l'étude des processus linéaires. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé, où P est de Radon sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de Ω . Soit $X - U$ un couple d'e.v. (réels) en dualité séparante. Soit R une application linéaire faiblement continue de U dans $L^2(\Omega)$: c'est un processus linéaire basé sur U . Le noyau positif C_R de U vers X , ou opérateur de corrélation de R est tel que :

$$(16) \quad \forall u_1, u_2 \in U \quad (C_R u_1, u_2) = \mathcal{E} [(Ru_1)(Ru_2)] .$$

C_R est injectif si et seulement si R est injectif. Dans ce cas, on introduit le complété G_R de U pour le produit scalaire $\langle u_1, u_2 \rangle = (C_R u_1, u_2)$.

On peut remplacer R par l'injection i_R de U dans G_R . S'il existe sur X une topologie localement convexe quasi complète séparée compatible avec la dualité avec U , alors i_R est faiblement continue ; donc elle admet une transposée injective i'_R de $H_R = (G_R)'$ dans X . On obtient ainsi le sous-espace hilbertien associé à C_R .

La relation d'ordre entre les noyaux positifs est notée $<<$.

Considérons deux couples $X - U$, $Y - V$ d'e.v. en dualité séparante et supposons qu'il existe sur X et Y des topologies localement convexes séparées quasi complètes compatibles avec les dualités, avec U et V respectivement. Soient $R : U \rightarrow L^2(\Omega)$ et $S : V \rightarrow L^2(\Omega)$ deux processus linéaires faiblement continus. Notons T le processus linéaire basé sur $W = U \oplus V$ tel que $T(u \oplus v) = Ru + Sv$. Alors $\text{Corr } T = C_T$ est un noyau positif de W vers $Z = X \oplus Y$, et ce noyau positif admet la décomposition par blocs $\begin{pmatrix} C_R & C_{RS} \\ C_{SR} & C_T \end{pmatrix}$.

(17) Problème n° 0 : voir [7], [8], [11].

Trouver une classe (Q) d'opérateurs linéaires n.n.e. (A) de V vers U ,

à domaine dense dans V et un élément (A_0) de (Q) tels que :

- $\forall (A) \in (Q)$, RA admet un prolongement faiblement continu $\overline{RA} : V \rightarrow L^2(\Omega)$.
- Pour tout (A) de Q , $\text{Corr}(S - \overline{RA_0}) < \text{Corr}(S - RA)$. C'est le problème de l'approximation linéaire optimale de S à l'aide de R , et (A_0) est l'opérateur d'approximation optimale.

(18) Solution du problème n°0.

On suppose C_R injectif et $\downarrow = \{v \in V \mid C_{RS}v \in \text{Im } C_R\}$ dense dans V .

Soit (Q) l'ensemble des opérateurs (A) de V dans U tels que $\downarrow \cap D_A$ soit dense dans V et tels que RA admette un prolongement faiblement continu.

Alors $D_{A_0} = \downarrow$ et $A_0 = C_R^{-1} C_{RS}$.

En fait pour tout v dans D_{A_0} , $RA_0 v$ est tout simplement la projection

orthogonale de Sv sur le sous-espace $\text{Im } R$ de $L^2(\Omega)$; ce qui explique pourquoi $u = A_0 v$ est l'unique point de U où la forme quadratique $u \rightarrow (C_T(u \oplus -v), u \oplus -v)$ atteint son minimum ; d'où une relation avec le balayage pour une certaine théorie du potentiel. Notons que $\text{Im } R$ n'est pas forcément un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$ et par conséquent l'existence d'une projection orthogonale de Sv sur ce sous-espace n'est pas triviale. Dans le cas simple où U et V sont hilbertisables et où C_R est bijectif, la solution du problème n°0 est triviale parce qu'alors $\text{Im } R$ est fermé.

(19) Exemple de problème d'estimation.

Soit G_s la distribution sur $\mathbb{R}^n$ de transformée de Fourier

$(1 + \|\xi\|^2)^{-s/2}$ avec $\|\xi\|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$. Soit $t = (t_1, t_2, t_3)$ le point générique de $\mathbb{R}^3$. Soit $(X_t)_t$ un champ aléatoire sur $\mathbb{R}^3$, gaussien centré d'opérateur de corrélation G_4^* , représenté par un processus linéaire gaussien centré M basé sur $H^{-2}(\mathbb{R}^3)$, j'observe ce champ sur un ouvert très régulier borné O de $\mathbb{R}^3$, et je cherche à en déduire une estimation du champ au point a fixé dans $\mathbb{R}^3 \setminus O$.

Pour essayer de résoudre ce problème, j'introduis les injections i_1 et i_2 de $U = H^{-2}(\bar{O})$ et $V = \mathbb{R} \delta_a$ dans $H^{-2}(\mathbb{R}^3)$ et les processus linéaires $R = Mi_1$

$S = M i_2$ et j'applique (18) dans le cas simple. L'opérateur C_T est l'opérateur qui à une charge $w = u \oplus \lambda \delta_a$ dans $U \oplus V$ fait correspondre la restriction de son potentiel $G_4^* w$ à $0 \cup \{a\}$. L'opérateur (A_0) est l'opérateur de balayage des mesures $\lambda \delta_a$ sur le fermé $\bar{O}$. On aimerait prendre pour opérateur d'estimation de X_a à l'aide d'une trajectoire de R , le transposé de A_0 :

$H^2(O) \rightarrow \mathbb{R}$. Ceci n'est pas possible car presque sûrement les trajectoires de R n'appartiennent pas à $H^2(O)$. Il se pose donc en mathématiques appliquées le problème suivant (voir par exemple [3], p.112, remarque 5.2 et p.328, problèmes 5 et 6) :

(20) Problème n°1 de l'estimation linéaire optimale des trajectoires.

On se donne deux couples $X_1 - U_1$ et $Y_1 - U_1$ d'e.v. et deux processus linéaires R_1 et S_1 basés sur U_1 et V_1 faiblement continus à valeurs dans $L^2(\Omega)$, qui sont décomposés par des variables aléatoires à valeurs dans X_1 et Y_1 respectivement. Trouver une classe $(\mathcal{E})$ d'opérateurs linéaires n.n.c. $(E) : X_1 \rightarrow Y_1$ et (E_0) dans cette classe, dit opérateur d'estimation linéaire optimale, tels que :

- . pour tout (E) dans $(\mathcal{E})$, le processus R, E' admet un prolongement faiblement continu, et il est décomposé par une v.a. à valeur dans Y_1 ,
- . pour tout (E) dans $(\mathcal{E})$; $\text{Corr}(S_1 - R_1 E'_0) \ll \text{Corr}(S_1 - R_1 E')$.

(21) Solution du problème n°1.

Une solution générale s'obtient en "transposant" la solution du problème n°0 : voir [7], § 2. Une méthode plus explicite consiste à partir de la solution du problème n°0 dans le cas simple, à remplacer R et S par des processus linéaires R_1 et S_1 , en introduisant des applications radonifiantes et en utilisant des propriétés de régularité de l'équation intégrale $C_R u = C_{RS} v$: voir [11]. Par exemple dans l'exemple ci-dessus, les travaux de Visik Eskin sur les équations de convolution montrent que $A_0 \delta_a$ est la somme d'une couche et d'une double couche étalées sur ∂O , de densité $\mathcal{C}^\infty$. D'où une injection i_1 dans U de l'espace $U_1 \sim \mathcal{C}^\infty(\partial O)^2$ formé par ces distributions. Je peux donc remplacer R par le processus $R_1 = R i_1$ basé sur U_1 . Le nouvel opérateur d'approximation optimale A_0^1 est tel que $A_0 = i_1 A_0^1$.

Vue la théorie des applications radonifiantes, ou le théorème de Minlos, les trajectoires de R_1 appartiennent presque sûrement à U_1^1 . Le transposé de A_0^1 est l'opérateur d'estimation optimale. Dans l'exemple étudié dans [8], on procède de même en considérant l'injection i_1 de l'ensemble U_1 des mesures de Radon sur $J = [-1, 0]$ dans $H^{-1}(\mathbb{R}^-)$. En effet, la transposée de i , et l'application p-radonifiante $\varphi \rightarrow \varphi \mid J$ de $H^1(\mathbb{R}^-)$ dans $\mathcal{C}^0(J)$.

(22) Notons que l'équation intégrale $C_R u = C_{RS} v$ est une équation intégrale variationnelle au sens de [6]. Elle donne donc lieu à des inéquations variationnelles. Ces inéquations variationnelles correspondent en pratique à des problèmes d'approximation ou de filtrage avec contrainte comme on en rencontre par exemple dans la théorie du filtre adapté.

(23) Problème 2 du filtrage non linéaire ou de l'estimation non linéaire.

Voir par exemple [3] p. 320, problème 15. Pour tout v dans D_{A_0} , nous avons projeté Sv sur le sous-espace de $L^2(\Omega)$ engendré par les v.a. Ru , u décrivant U . Le problème du filtrage non linéaire conduit à rechercher l'espérance conditionnelle de Sv par rapport à la tribu $\mathcal{B}'$ engendrée par les variables Ru , c'est-à-dire à rechercher la projection orthogonale de Sv sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}', P)$.

(24) Principe de la solution du problème n°2.

On suppose R tel que l'on puisse lui appliquer (15), où pour tout i , Φ_i est l'espace des fonctions polynomiales sur X_i . On peut se ramener au cas linéaire en remplaçant R par le processus linéaire R_2 basé sur $V_2 = \bigoplus_{o}^{\infty} (\bigotimes_n U)$ et dont la restriction au produit tensoriel symétrique $\bigotimes_n U$ coïncide avec le produit tensoriel symétrique $\bigotimes_n R$ (voir [9] pour la définition de $\bigotimes_n R$) ou avec son renormalisé : $\bigotimes_n R$:

3. Application (A-p)-sommantes. Applications (A-p)-radonifiantes.

On se limite ici au cas particulier (7.f).

(25) Définition.

Soit B une partie de A munie d'une topologie d'espace compact ; si en particulier, A est défini canoniquement à l'aide du dual d'une e.v.n. U, on définit B à l'aide de la boule unité de U' faible. On suppose que pour tout x de X, l'application $b \rightarrow b(x)$ est continue de B à valeurs dans l'espace quasi-normé G. Soit $p > 0$. Une application linéaire u de X dans l'espace quasi-normé Y est dite (A-p)-sommante si :

$$(26) \quad \exists C > 0 \quad \forall x_1 \dots x_n \quad \sum \|u(x_i)\|^p \leq C^p \sup_{b \in B} \sum \|b(x_i)\|^p .$$

On dit qu'une probabilité A-cylindrique m sur X est de type A-p si $\|m\|_p^A = \sup_{b \in B} \left(\int \|g\|^p d(b(m))(g) \right)^{1/p} < \infty$.

(27) Définitions équivalentes : Il existe une constante C finie telle que pour toute loi de probabilité simple μ sur X (c'est-à-dire somme finie de masses de Dirac sur X), on a

$$(27') \quad \|u(\mu)\|_p \leq C \|\mu\|_p^A .$$

Ces définitions étant posées, il apparaît que la théorie des applications p-sommantes de Pietsch et la théorie des applications p-radonifiantes de L. Schwartz [1] peuvent être reformulées dans ce cadre : on montre par exemple l'existence d'une mesure de Pietsch, la factorisation des applications (A-p)-sommantes, le théorème de dualité de L. Schwartz.

De même que le prototype des applications p-sommantes est l'injection γ_0 de $\mathcal{C}^0$ dans L^p , le prototype des applications (A-p)-sommantes est l'injection $\vec{\gamma}_0$ de $\mathcal{C}^0(I, B)$ dans $L^p(\mu, B)$ où μ est une probabilité sur la tribu de l'espace complètement régulier I, où B est un espace de Banach ; A est alors $\mathcal{M} \otimes I_B$ où $\mathcal{M}$ est l'espace des mesures de Radon bornées sur I.

(28) On peut se poser le problème suivant : voir [9].

On se donne quatre espaces de Banach X , Y , Z et T , deux applications linéaires continues $\alpha : X \rightarrow Z$ et $\beta : Y \rightarrow T$, une norme θ sur $Z \otimes T$, une norme φ sur $X \otimes Y$. Trouver des conditions suffisantes pour que l'application supposée continue $\alpha \otimes \beta : X \otimes Y \rightarrow Z \underset{\theta}{\hat{\otimes}} T$ soit p -sommante ou p -radonifiante ? Même problème pour le prolongement supposé continu $\overline{\alpha \otimes \beta}$ de $\alpha \otimes \beta$ aux produits tensoriels complétés.

Pour trouver une solution, on considère $\alpha \otimes \beta$ comme la composée des applications linéaires :

$$I_X \otimes \beta : X \otimes Y \rightarrow X \otimes T \quad \text{et} \quad \alpha \otimes I_T : X \otimes T \rightarrow Z \underset{\theta}{\otimes} T .$$

On cherche à radonifier une probabilité cylindrique μ sur $X \otimes Y$ en deux étapes. Notons d'ailleurs que si $\varphi = \varepsilon$, si β est p -sommante, et si $\alpha \otimes I_T$ est $(X' \otimes I_T, p)$ sommante, alors $\alpha \otimes \beta$ est p -sommante.

(29) On a donc les deux sous-problèmes suivants.

a) A quelle condition μ est-elle transformée par $I_X \otimes \beta$ en une probabilité cylindrique sur $X \otimes T$ de Radon en T ?

b) Etant donnée une probabilité cylindrique μ_1 sur $X \otimes T$ (resp. sur un complété de $X \otimes T$ relativement à une norme ψ), à quelles conditions μ_1 est-elle transformée par $\alpha \otimes I_T : X \otimes T \rightarrow Z \underset{\theta}{\hat{\otimes}} T$ (resp. par son prolongement supposé continu à $X \underset{\psi}{\hat{\otimes}} T$) en une probabilité de Radon ?

Le premier sous-problème relève de la théorie usuelle des applications p -radonifiantes. En termes de processus, dire que $(I_X \otimes \beta)(\mu)$ est de Radon en T signifie que certains processus bilinéaires basés sur $X' \times Y'$, donnent lieu par composition avec le couple (I_X, β') à des processus vectoriels à valeurs dans T . Signalons au passage que ce point de vue est commode pour l'étude des séries vectorielles aléatoires.

(30) Application aux séries de vecteurs aléatoires d'un espace de Banach Y

Ces séries sont de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n X_n$ où c_n est une suite de nombres $\in \mathbb{R}^{(N)}$, (y_n) est une suite fixée de vecteurs de Y et (X_n) est une suite fixée de v.a. On introduit le processus bilinéaire B

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{(N)} \times Y' &\rightarrow L^0(\Omega) \\ (c_n, y') &\rightarrow \sum c_n (y_n, y') X_n. \end{aligned}$$

Supposons que B admette un prolongement continu :

$$\bar{B} : l^{s'} \times Y' \rightarrow L^p(\Omega) \text{ avec } s \geq 1, p > 0, s'^{-1} + s^{-1} = 1.$$

Soit μ la probabilité cylindrique sur $l^s \otimes Y$ associée à l'application linéaire définie sur $l^{s'} \otimes Y'$, canoniquement associée à $\bar{B}$. Soit β une injection p-radonifiante de Y dans un espace de Banach T. Alors le composé de $\bar{B}$ avec $(\text{Id}(l^{s'}), \beta')$ est représenté par un processus vectoriel continu $l^s \rightarrow L^p(\Omega, T)$.

Le deuxième sous-problème relève de la théorie des applications (A,p)-sommantes. Le théorème [2] III.1.1. donne lieu à l'énoncé suivant.

(31) Proposition

On considère un e.v.f. X muni d'un ensemble $A \in \mathcal{J}(X, G)$ vérifiant les hypothèses précédentes. Soit F un espace de Banach reflexif et u une application linéaire de X dans F qui est (A,p)-sommante. Soit μ une probabilité A-cylindrique sur X dont l'image par u est une probabilité cylindrique sur F : on suppose $y'u \in A$ pour tout $y' \in Y'$. On suppose qu'il existe un filte (μ_j) de probabilités de Radon sur X à support fini tel que $\sup \|\mu_j\|_p^A < \infty$ et tel que $u(\mu_j)$ converge cylindriquement vers $u(\mu)$. Alors $u(\mu)$ est une probabilité de Radon d'ordre p sur F.

La mise en oeuvre de cette proposition **dans le** cas où X est un produit tensoriel complété nécessite des hypothèses techniques. En tout cas, si 0 est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ l'injection $\vec{\gamma}_0$ de $\mathcal{C}^0(0, B)$ dans $L^p(\mu, B)$ transforme une probabilité $\mathcal{M} \otimes I_B$ -cylindrique sur $\mathcal{C}^0(0, B)$ de type $(\mathcal{M} \otimes I_B, p)$ en une probabilité de Radon si B reflexif et $p > 1$.

(32) Applications partiellement radonifiantes entre classes de potentiels de Bessel vectoriels.

Soit B un espace de Banach reflexif. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Pour tout s réel, on pose :

$$(33) \quad W^s = L^{p,s}(\mathbb{R}^n, B) = G_s * L^p(\mathbb{R}^n, B) .$$

On définit $L^{p,s}(0, B)$ comme quotient de W^s par les éléments de W^s supportés par $\mathbb{R}^n \setminus 0$. En raisonnant comme dans [1] XIV et [15], on montre la

(34) Proposition

Soit 0 très régulier borné. On suppose que :

$$\frac{a-d}{n} > \frac{1}{q} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)^+ \quad p \text{ et } q \in]1, +\infty[.$$

Alors l'injection $L^{q,a}(0, B) \hookrightarrow L^{r,d}(0, B)$ transforme une probabilité $(L^{q,-a} \otimes I_B)$ -cylindrique de type $(L^{q,-a} \otimes I_B, p)$ en une probabilité de Radon. Dans cet énoncé, l'espace $L^{r,d}(0, B)$ peut être remplacé par $\mathcal{C}^d(0, B)$ si $r = +\infty$ et $0 \leq d < 1$.

4. Application aux équations d'évolution avec données aléatoires décomposées en espace.

Considérons un système physique dont l'état à tout instant $t \geq 0$. est décrit par un vecteur $u(t) \in B$. La fonction $u(\cdot)$ est solution (en un certain sens) du problème de Cauchy:

$$(35) \quad \begin{aligned} \dot{u}(t) + \Gamma u(t) &= f(t) \text{ pour } t \in 0 =]0, 1[\quad ; \quad f \text{ donné} \\ u(0) &= u_0 \text{ donné dans } B \end{aligned}$$

où Γ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe d'opérateurs de B .

L'étude de l'existence et de l'unicité de la solution dans le cas déterministe permet en général des espaces de Banach U , U_0 et F tels que l'application suivante soit définie et définisse un homéomorphisme

$$(36) \quad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Phi} & U_0 \times F \\ u & \longrightarrow & (u(0), \dot{u} + \Gamma u) . \end{array}$$

Voir [15] pour l'utilisation de Φ dans le cas de données stochastiques (u_0, f) . Supposons maintenant que l'entrée stochastique (u_0, f) est décomposée en espace ; c'est-à-dire, par exemple, qu'elle est représentée par une v.a. dans $L^p(\Omega, B)$ et par un processus vectoriel $L^2(I) \rightarrow L^p(\Omega, B)$. Il est naturel de conjecturer, même si Γ est non linéaire et dépend du temps, que, sous des conditions très générales, la solution u est alors représentée par un processus vectoriel $\bar{H}^1(\bar{0}) \rightarrow L^p(\Omega, B)$. D'où si $p > 2$ en utilisant (34) des trajectoires presque sûrement hölderiennes à valeurs dans B . Nous l'avons démontré si Γ indépendant du temps est le générateur d'un semi-groupe d'opérateurs linéaires continus de B .

*
*
*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. SCHWARTZ : Séminaire à l'Ecole Polytechnique 1970/1971.
- [2] B. MAUREY et L. SCHWARTZ : Séminaire 1972/1973 (Ecole Polytechnique).
- [3] A. BENSOUSSAN : Filtrage optimal des systèmes linéaires. Dunod 1971.
- [4] N. BOURBAKI : Integration. Chapitre 9. Hermann (Paris) 1969.
- [5] L. SCHWARTZ : Note non publiée 1971.
- P. KREE :
- [6] J. Math. pures et appliquées 51 - (1972) p.295-329.
- [7] C. R. Acad. Sc. Paris. Décembre 1972.
- [8] Exposé au Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972/1973 (Ecole Polytechnique).

- [9] Exposé au Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971/1972 (Ecole Polytechnique).
- [10] Applications patiellement radonifiantes : manuscrit remis à L. Schwartz Octobre 1973.
- [11] Approximation optimale des noyaux positifs et construction de champs markoviens (proposé pour publication).
- [12] Cours 3^e Cycle - Université de Paris . 1973/1974.
- [13] Note aux Comptes Rendus- 12 Novembre 1973.
- [14] Exposés au Séminaire P. Lelong - Décembre 1973.
- [15] Symposia Matematica. Vol.VII diffusé par Academic press (1971).
