

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. SCHWARTZ

Applications O -radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 9, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973__A9_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉRIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

APPLICATIONS 0-RADONIFIANTES

par L. SCHWARTZ

Exposé N° IX

10 Janvier 1973

§ 1. LES POIDS J_α , ORDRE ET TYPE 0.

Définition (IX.1;1) : Soit $\mathcal{P}(\bar{\mathbb{R}}^+)$ l'espace des probabilités sur $\bar{\mathbb{R}}^+$, muni de la topologie étroite. On le munira de la relation d'ordre : $\mu \leq \nu$ *, si, pour tout $a \geq 0$, $\mu([a, +\infty]) \leq \nu([a, +\infty])$. D'autre part, pour $0 < \tau < +\infty$, $\tau \cdot \mu$ voudra dire l'image de μ par l'homothétie de centre origine et de rapport τ . On appelle poids une fonction $\Phi : \mathcal{P}(\bar{\mathbb{R}}^+) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$, croissante ($\mu \leq \nu$ implique $\Phi(\mu) \leq \Phi(\nu)$), et sci (semi-continue inférieurement) pour la topologie étroite ($\lim_i \mu_i = \mu$ implique $\liminf_i \Phi(\mu_i) \geq \Phi(\mu)$). On dira qu'un poids Φ est homogène si, pour $\mu \in \mathcal{P}(\bar{\mathbb{R}}^+)$ et $0 < \tau < +\infty$, $\Phi(\tau \cdot \mu) = \tau \Phi(\mu)$.

Par exemple, pour $0 < p < +\infty$ (resp. $p = +\infty$), $\|\cdot\|_p$ est le poids homogène $\mu \mapsto (\int t^p d\mu(t))^{1/p}$ (resp. $\mu \mapsto \text{Max. Supp. } \mu$).

Définition (IX.1; 2) : Si Φ est un poids homogène, si μ est une probabilité de Radon sur un espace topologique X , si f est une fonction $X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mesurable, on pose $\Phi(\mu, f) = \Phi(|f| \cdot (\mu))$, où $|f| \cdot \mu$ est l'image de μ par $|f| : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$; alors $\Phi(\mu, \tau f) = \tau \Phi(\mu, f)$.

Si G est un espace bitopologique, μ une mesure de Radon sur G^{**} , on appelle $\Phi(\mu)$ la quantité $\Phi(\mu, f)$, où $f : G \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$ est la fonction quasi-norme.

Si E est un espace vectoriel à dual quasi-normé, λ une probabilité cylindrique sur E , on appelle $\Phi^*(\lambda)$ la quantité $\sup_{\xi \in E', \|\xi\| \leq 1} \Phi(|\xi| \cdot \lambda)$,

où $|\xi| \cdot \lambda$ est l'image de λ par $|\xi| : x \mapsto \langle x, \xi \rangle$, ou encore l'image de $\xi(\lambda)$ par l'application $t \mapsto |t|$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.

Dans le cas $\Phi = \|\cdot\|_p$, on retrouve bien ce qu'on avait appelé $\|\mu\|_p$ ou $\|\lambda\|_p^*$, dans l'exposé I.

* Ce n'est pas la relation d'ordre usuelle pour des mesures, qui serait absurde dans le cas de probabilités !

** Rappelons que la topologie de G n'est pas définie par sa quasi-norme.

Rappelons que μ est dite d'ordre p si $\|\mu\|_p < +\infty$, que λ est dite de type p si $\|\lambda\|_p^* < +\infty$. Nous dirons donc que μ est d'ordre Φ si $\Phi(\mu) < +\infty$, que λ est de type Φ si $\Phi^*(\lambda) < +\infty$. Rappelons aussi que λ est de type p si et seulement si, pour tout fonction aléatoire linéaire $f: E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$ attachée à λ (i.e. $\xi(\lambda) = (f(\xi))(\mu)$ pour $\xi \in E'$), est continue de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$. On voit donc bien comment on pourra passer du type $p > 0$ au type 0.

Définition (IX.1; 3) : Pour $0 < \alpha < 1$, on appelle J_α le poids homogène
 $J_\alpha(\mu) = \inf \{a \in \overline{\mathbb{R}}^+, \mu(]a, +\infty]) \leq \alpha\}$.

Il faut vérifier que c'est bien un poids. La croissance est évidente ainsi que l'homogénéité. Pour la semi-continuité inférieure, on remarquera que, si $J_\alpha(\mu) = a$, on a $\mu(]a, +\infty]) \leq \alpha$, mais, pour tout $a' < a$, $\mu(]a', +\infty]) > \alpha$; comme $]a', +\infty]$ est ouvert, si μ_i converge étroitement vers μ , $\liminf_i \mu_i(]a', +\infty]) \geq \mu(]a', +\infty]) > \alpha$, donc $J_\alpha(\mu_i) > a'$ pour i assez grand, et $\liminf_i J_\alpha(\mu_i) \geq a = J_\alpha(\mu)$.

Remarque : On notera d'abord que le $\inf$ qui définit J_α est un $\min$. On utilisera constamment les équivalences :

$$J_\alpha(\mu) \leq a \Leftrightarrow \mu(]a, +\infty]) \leq \alpha$$

$$J_\alpha(\mu) > a \Leftrightarrow \mu(]a, +\infty]) > \alpha.$$

Proposition (IX.1;4) : Un système de jauges de la topologie de $L^0(\Omega, \mu)$ est formé par les fonctions $f \mapsto J_\alpha(\mu, f)$, $0 < \alpha < 1$. $L^0(\Omega, \mu)$ est un espace vectoriel topologique métrisable et complet.

Démonstration : Un système fondamental de voisinages de 0 de la convergence en probabilité est défini par les

$$\begin{aligned} V_{\alpha, a} &= \{f \in L^0(\Omega, \mu) ; \mu\{\omega \in \Omega ; |f(\omega)| > a\} \leq \alpha\} \\ &= \{f \in L^0(\Omega, \mu) ; J_\alpha(\mu, f) \leq a\}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad a > 0. \end{aligned}$$

* Rappelons que la topologie de E' est définie par sa quasi-norme.

Comme cela donne un système fondamental dénombrable de jauges, $L^0(\Omega, \mu)$ est métrisable, et il est trivialement complet.

Définition (IX.1;5) : On dit qu'une probabilité de Radon μ sur un espace bitopologique G est d'ordre 0 si, pour tout α , $0 < \alpha < 1$, $J_\alpha(\mu)$ est fini.

Comme $J_\alpha(\mu) \leq \mathbb{R} \Leftrightarrow \mu\{x \in G; \|x\| > R\} \leq \alpha$, cela veut exactement dire que μ est portée par la réunion des quasi-boules de G , c.à.d. par le sous-espace vectoriel Q des éléments de quasi-norme finie ; elle est donc une probabilité de Radon sur Q (mais non sur Q_N , voir (II.1;2)). Si $Q = G$, toute probabilité de Radon sur G est d'ordre 0.

Définition (IX.1;6) : On dit qu'une probabilité cylindrique λ sur un espace à dual quasi-normé E est de type 0, si, pour tout α , $J_\alpha^*(\lambda) < +\infty$.

Remarque : Le type et l'ordre p , pour $p > 0$, faisaient intervenir un seul poids, $\|\cdot\|_p$. Le type et l'ordre 0 font intervenir la famille des poids J_α . Remarquons aussi que, pour une suite finie $g = (g_n)_{n \leq N}$ d'éléments de E , on avait posé $\|g\|_0 = (\prod_{0 \leq n \leq N} \|g_n\|)^{1/(N+1)}$. On serait tenté

d'écrire, pour une probabilité de Radon μ et une probabilité cylindrique λ , $\|\mu\|_0 = \Phi(\mu)$, $\|\lambda\|_0^* = \Phi^*(\lambda)$, où Φ serait le "poids" $v \mapsto \exp(\int \log t \, dv(t))$. Il n'en est rien, et d'ailleurs Φ n'est pas un poids.

Proposition (IX.1;7) : Soit λ une probabilité cylindrique sur un espace à dual quasi-normé E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) λ est de type 0, i.e. $J_\alpha^*(\lambda) < +\infty$ pour tout α ;
- 2) toute fonction aléatoire linéaire associée, $f : E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$, est continue ;
- 3) $\xi \mapsto \xi(\lambda)$ est continue de E' dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$;
- 3') quand ξ tend vers 0 dans E' , $\xi(\lambda)$ tend étroitement vers δ ;
- 4) l'image de Fourier $\hat{\lambda}$ de λ est continue de E' (ou continue à l'origine, ou uniformément continue).

Démonstration : f est continue si et seulement si l'image de la boule unité de E' est bornée, c.à.d. si $\sup_{\|\xi\| \leq 1} J_\alpha(\mu, f(\xi)) < +\infty$ pour tout α ,

ou $\sup_{\|\xi\| \leq 1} J_\alpha(|\xi| \cdot \lambda) < +\infty$ ou $J_\alpha^*(\lambda) < +\infty$; donc $1 \Leftrightarrow 2$.

Mais, si ξ tend vers ξ_0 , 2 entraîne que $f(\xi)$ tende vers $f(\xi_0)$ dans $L^0(\Omega, \mu)$, donc $\xi \cdot \lambda = f(\xi) \cdot \mu$ tend étroitement vers $f(\xi_0) \cdot \mu = \xi_0 \cdot \lambda$, donc $2 \Rightarrow 3$; $3 \Rightarrow 3'$ trivialement, puisque c'est la continuité à l'origine ; si ξ tend vers 0, 3 entraîne que $\xi(\lambda)$ tende étroitement vers δ , donc $f(\xi)$ converge en probabilité vers 0, donc f est continue à l'origine donc partout, et $3' \Rightarrow 2$; donc $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 3'$.

D'après le théorème de Paul Lévy, des probabilités μ_j sur $\mathbb{R}$ convergent étroitement vers une probabilité μ , si et seulement si leurs images de Fourier $\hat{\mu}_j$ convergent vers $\hat{\mu}$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. Par ailleurs $\hat{\lambda}$, fonction de type positif, est uniformément continue dès qu'elle est continue à l'origine ; et l'image de Fourier de $\xi(\lambda)$ est $\tau \mapsto \hat{\lambda}(\tau \xi)$. Alors la continuité de $\hat{\lambda}$ à l'origine veut dire que, si ξ converge vers 0 dans E' , $\hat{\lambda}(\xi)$ converge vers 1 ; cela équivaut aussi à dire que $\hat{\lambda}(\tau \xi)$ converge vers 1 uniformément pour τ borné, donc que $\xi(\lambda)$ converge étroitement vers δ , donc $4 \Leftrightarrow 3'$, cqfd.

Définition (IX.1;8) : Un ensemble $\mathfrak{M}$ de probabilités de Radon sur G est dit uniformément d'ordre 0 si, pour tout α , $\sup_{\mu \in \mathfrak{M}} J_\alpha(\mu) < +\infty$.

Proposition (IX.1;9) : Si les quasi-boules de G sont compactes, un ensemble de probabilités de Radon sur G , uniformément d'ordre 0, est relativement compact dans $\mathcal{P}(G)$, a fortiori cylindriquement relativement compact dans $\mathcal{P}(G)$.

Démonstration : C'est le théorème de Prokhorov sur la relative compacité d'un ensemble de probabilités de Radon : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de G contenu dans G , à savoir la boule $B(R)$,

$R = \sup_{\mu \in \mathfrak{M}} J_\varepsilon(\mu)$, tel que, pour toute $\mu \in \mathfrak{M}$, $\mu(\bigcap_{n \geq 1} B(R/n)) \leq \varepsilon$.

Définition (IX.1;10) : Soit $\mathfrak{L}$ un ensemble de probabilités cyclindriques sur E . Il est dit uniformément d'ordre 0, si, pour tout α ,

$\sup_{\lambda \in \mathfrak{L}} J_\alpha^*(\lambda) < +\infty$.

Proposition (IX.1;11) (évidente) : Soit $\mathfrak{L}$ un ensemble de probabilités cyclindriques sur E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) $\mathfrak{L}$ est uniformément d'ordre 0 ;
- 2) si les f_λ sont des fonctions aléatoires associées aux $\lambda \in \mathfrak{L}$,

- correspondant toutes aux mêmes Ω, μ , alors l'ensemble des f_λ , $\lambda \in \mathfrak{L}$, est équicontinu de E' dans $L^0(\Omega, \mu)$;
- 3') quand ξ tend vers 0, $\xi(\lambda)$ tend étroitement vers δ , uniformément pour $\lambda \in \mathfrak{L}^*$;
- 4) l'ensemble des $\hat{\lambda}$, $\lambda \in \mathfrak{L}$, est uniformément équicontinu.

Définition (IX.1;12) : Une probabilité cylindrique λ sur E est dite de type 0-approximable si elle est cylindriquement adhérente à un ensemble $\mathfrak{L}$ de probabilités de Radon à supports finis, uniformément de type 0.

§ 2. LES APPLICATIONS 0-RADONIFIANTES.

Définition (IX.2;1) : Soit u une application linéaire faiblement continue de E , espace à dual quasi-normé, dans G , espace bitopologique. On dit qu'elle est 0-radonifiante (resp. approximativement 0-radonifiante) si, pour toute probabilité cylindrique λ sur E , de type 0 (resp. de type 0-approximable), $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre 0 sur G .

Théorème (IX.2;2) : Supposons les boules de G compactes. Pour que u soit approximativement 0-radonifiante, il faut et il suffit que, pour tout β , il existe $M \geq 0$ et α tels que, pour toute probabilité de Radon λ sur E , à support fini, on ait :

$$(IX.2;2bis) \quad J_\beta(u(\lambda)) \leq M J_\alpha^*(\lambda) .$$

Démonstration : La nécessité de la condition est assez pénible à démontrer ; nous renvoyons au Séminaire Schwartz, 1969-70, théorème (XVI.2;1). Montrons que la condition est suffisante. Soit donc λ de type 0-approximable. Soit λ_j un filtre de probabilités de Radon à supports finis, convergeant cylindriquement vers λ et uniformément de type 0. Alors le $u(\lambda_j)$ convergent cylindriquement vers $u(\lambda)$. $J_\beta(u(\lambda_j)) \leq M J_\alpha^*(\lambda_j)$ et $\sup_j J_\alpha^*(\lambda_j) < +\infty$. Donc les λ_j sont de Radon uniformément d'ordre 0 : d'après (IX.1;9), elles sont dans une partie cylindriquement compacte de probabilités de Radon sur E , donc $u(\lambda)$ est de Radon sur G , cqfd.

* Nous n'introduisons pas l'équivalent de 3, pour ne pas nous lancer dans la structure uniforme de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Corollaire (IX.2;3) : Si H est un Banach, et si u est linéaire continue de E dans $\sigma(H', H)$, et vérifie les conditions (IX.2;2bis), elle est approximativement 0-radonifiante.

Corollaire (IX.2;4) : Si G est un quasi-Banach séparé par son dual, à boules faiblement fermées, et si u , linéaire faiblement continue de E dans G , vérifie les conditions (IX.2;2bis), elle est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$.

Pour la définition de l'espace bitopologique $\sigma(G'', G')$, voir (II.1;8).

Remarque :

1) Si G est un Banach réflexif, ou un dual fort séparable d'un Banach, on peut remplacer $\sigma(G'', G')$ par G ; la démonstration est la même que pour (III.2;3) et (III.2;8) ; pour le dernier cas, on a besoin de savoir que u est q -sommante pour un q fini > 1 ; cela résultera de (IX.3;26).

2) Si (E, E') vérifie la propriété d'approximation métrique, on peut supprimer "approximativement" dans l'énoncé. La démonstration est analogue à celle du cas $p > 0$ mais plus compliquée ; nous renvoyons au Séminaire Schwartz 1969-70, (XVII.3;1).

§ 3. INEGALITES DE PIETSCH.

Soit E un espace vectoriel à dual quasi-normé. Pour $x \in E$, appelons $\tilde{x}$ la fonction $\xi \mapsto \langle x, \xi \rangle$ sur E' . Dans tout ce paragraphe, G sera un quasi-Banach, séparé par son dual, à boules faiblement fermées.

Théorème (IX.3;1) : Soit u une application linéaire faiblement continue de E dans G . Supposons qu'il existe une application linéaire v de E dans un espace $L^\infty(Z, \nu)$, où Z est un ensemble muni d'une tribu et ν une probabilité sur Z telle que τ_ν envoie les caractères de l'algèbre de Banach de $L^\infty(Z, \nu)$ dans l'adhérence B^* , dans $\sigma(E^*, E)$, de la quasi-boule unité B^1 de E' . Supposons en outre que la convergence de $v(x)$ vers 0 dans $L^0(Z, \nu)$ entraîne la convergence de $u(x)$ vers 0 dans G . Alors u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. Si en ordre on a une inégalité

$$(IX.3;1bis) \quad \|u(x)\| \leq R J_{\gamma}(v, v(x)) \quad ,$$

alors, pour toute λ de Radon à support fini sur E , on a

$$(IX.3;1ter) \quad J_{\beta}(u(\lambda)) \leq R J_{\beta\gamma}^*(\lambda) \quad .$$

Démonstration : La condition : " $v(x) \rightarrow 0$ dans $L^0(Z, v) \Rightarrow u(x) \rightarrow 0$ dans G ", implique l'existence de R et γ tels que (IX.3;1bis). Si alors de (IX.3;1bis) on déduit (IX.3;1ter), le corollaire (IX.2;4) entraînera que u soit approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. En outre, on aura ce résultat remarquable : pour β donné, les quantités M, α , de (IX.2;1bis) seront données par $M = R$ (indépendant de β), et $\alpha = \beta\gamma$ (proportionnel à β).

Comme dans le théorème (II.4;1), on peut remplacer $L^{\infty}(Z, v)$ par $C(Z)$.

Cherchons à réaliser une inégalité $J_{\beta}(u(\lambda)) \leq C$. Comme λ est de Radon, cela veut dire

$$(IX.3;2) \quad \lambda\{x \in E ; \|u(x)\| > C\} \leq \beta \quad .$$

D'après (IX.3;1bis), $\|u(x)\| > C$ entraîne $J_{\gamma}(v, v(x)) > \frac{C}{R}$. Donc (IX.3;2) est entraînée par

$$(IX.3;3) \quad \lambda\{x \in E ; J_{\gamma}(v, v(x)) > \frac{C}{R}\} \leq \beta \quad ,$$

c.à.d.

$$(IX.3;4) \quad \lambda\{x \in E ; v\{z \in Z ; |(v(x))(z)| > \frac{C}{R}\} > \gamma\} \leq \beta \quad .$$

Appelons A l'ensemble des (x, z) de $E \times Z$ tels que $|v(x)(z)| > \frac{C}{R}$.

Appelons $_x A$ l'ensemble des z tels que $(x, z) \in A$, A_z l'ensemble des x tels que $(x, z) \in A$.

Alors (IX.3;4) s'écrit

$$(IX.3;5) \quad \lambda\{x \in E ; v(_x A) > \gamma\} \leq \beta \quad .$$

Ceci, par Fubini, est entraîné par :

$$(IX.3;6) \quad (\lambda \otimes v)(A) \leq \beta\gamma \quad .$$

Ceci à son tour est entraîné par :

$$(IX.3;7) \quad \forall z \in Z, \quad \lambda(A_z) \leq \beta_\gamma.$$

Mais $(v(x))(z) = \langle x, {}^t v(\delta_{(z)}) \rangle$. D'après l'hypothèse, puisque $\delta_{(z)}$ est un caractère de $C(Z)$, ${}^t v(\delta_{(z)})$ est dans B^* . Alors (IX.3;7) sera entraînée par

$$(IX.3;8) \quad \forall \xi \in B^*, \quad \lambda\{x \in E; |\langle x, \xi \rangle| > \frac{C}{R}\} \leq \beta_\gamma$$

ou

$$(IX.3;9) \quad \forall \xi \in B^*, \quad (|\xi| \cdot \lambda)(\left] \frac{C}{R}, +\infty \right]) \leq \beta_\gamma.$$

Comme λ est de Radon à support fini, $\xi \mapsto |\xi| \cdot \lambda$ est continu de $\sigma(E^*, E)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$.

Alors (IX.3;9) est entraînée par

$$(IX.3;10) \quad \forall \xi \in E', \quad \|\xi\| \leq 1 : (|\xi| \cdot \lambda)(\left] \frac{C}{R}, +\infty \right]) \leq \beta_\gamma$$

ou $J_{\beta_\gamma}(|\xi| \cdot \lambda) \leq \frac{C}{R}$, donc par

$$(IX.3;11) \quad J_{\beta_\gamma}^*(\lambda) \leq \frac{C}{R}.$$

On voit donc que $J_{\beta_\gamma}^*(\lambda) \leq \frac{C}{R} \Rightarrow J_\beta(u(\lambda)) \leq C$, on a donc bien (IX.3;1ter).

Voici une variante, où interviendra une probabilité ν sur $\sigma(E', E)$. Il n'y a pas alors d'espace $L^\infty(Z, \nu)$ qui puisse intervenir, car $\tilde{x} : \xi \mapsto \langle x, \xi \rangle$ n'est pas une fonction bornée sur E' .

Théorème (IX.3;12) : Supposons qu'il existe une probabilité de Radon ν sur $\sigma(E', E)$, telle que la convergence de $\tilde{x}$ vers 0 dans $L^0(\sigma(E', E), \nu)$ entraîne la convergence de $u(x)$ vers 0. Alors u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. En outre, s'il existe R et γ tels que, pour tout $x \in E$:

$$(IX.3;12bis) \quad \|u(x)\| \leq R J_\gamma(\nu, \tilde{x}),$$

alors, pour tout β et toute λ de Radon à support fini sur E :

$$(IX.3;12ter) \quad J_{\beta}(u(\lambda)) \leq R J_{\delta}(\nu) J_{\alpha}^*(\lambda) \quad ,$$

dès que $\alpha + \delta \leq \beta_{\gamma}$ (en particulier pour $\alpha = \delta = \frac{\beta_{\gamma}}{2}$).

Démonstration : N'essayons pas de ramener de force cette situation à celle qui précède, mais copions la démonstration. Si on appelle $v(x)$ la fonction $\tilde{x} : \xi \mapsto \langle x, \xi \rangle$ sur $Z = \sigma(E', E)$, (IX.2;12bis) est (IX.3;1bis), si ce n'est que $\tilde{x}$ n'est pas une fonction bornée sur Z , il n'y a pas d'espace L^{∞} . Les inégalités (IX.3;2 à 6) subsistent sans modification ; ici $A \subset E \times E'$, $A = \{(x, \xi) ; |\langle x, \xi \rangle| > \frac{C}{R}\}$. Alors (IX.3;6) est entraîné, si $\alpha + \delta \leq \beta$, par

$$(IX.3;13) \quad \nu\{\xi \in E' ; \lambda(A_{\xi}) > \alpha\} \leq \delta$$

(car $A = \{\xi ; \lambda(A_{\xi}) > \alpha\} \cup \{\xi ; \lambda(A_{\xi}) \leq \alpha\}$, et alors
 $(\lambda \otimes \nu)(A) \leq \nu\{\xi ; \lambda(A_{\xi}) > \alpha\} + \alpha \nu\{\xi ; \lambda(A_{\xi}) \leq \alpha\} \leq \delta + \alpha \leq \beta_{\gamma}$).

(IX.3;13) s'écrit :

$$(IX.3;14) \quad \nu\{\xi \in E' ; (|\xi| \cdot \lambda)(\left[\frac{C}{R}, +\infty\right]) > \alpha\} \leq \delta$$

ou

$$(IX.3;15) \quad \nu\{\xi \in E' ; J_{\alpha}(|\xi| \cdot \lambda) > \frac{C}{R}\} \leq \delta \quad .$$

Ceci est entraîné par

$$(IX.3;16) \quad \nu\{\xi \in E' ; \|\xi\| J_{\alpha}^*(\lambda) > \frac{C}{R}\} \leq \delta$$

ou

$$(IX.3;17) \quad \nu\{\xi \in E' ; \|\xi\| > \frac{C}{R J_{\alpha}^*(\lambda)}\} \leq \delta$$

ou

$$(IX.3;18) \quad J_{\delta}(\nu) \leq \frac{C}{R J_{\alpha}^*(\lambda)}$$

Ainsi $R J_{\delta}(\nu) J_{\alpha}^*(\lambda) \leq C$ entraîne $J_{\beta}(u(\lambda)) \leq C$, d'où (IX.3;12ter).

Définition (IX.3;19) : Soit ρ une probabilité cylindrique sur $\sigma(G', G)$. Elle est dite de cotype 0, si la convergence de $|\tilde{y}| \cdot (\rho)$ vers δ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ entraîne la convergence de y vers 0 dans G . Si ρ est représentée par une fonction aléatoire linéaire $f: G \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$, cela signifie que la convergence de $f(y)$ vers 0 dans $L^0(\Omega, \mu)$ entraîne celle de y vers 0 dans G . Cela entraîne l'existence d'un γ , $0 < \gamma < 1$, et d'un $M \geq 0$ tel que

$$(IX.3;19bis) \quad \|y\| \leq M J_{\gamma}(|\tilde{y}| \cdot \rho) ;$$

le plus petit nombre M possible se note ${}^*J_{\gamma}(\rho)$.

Théorème de dualité (IX.3;20) : Supposons qu'il existe sur $\sigma(G', G)$ une probabilité cylindrique ρ de cotype 0, telle que ${}^t u \rho$ soit de Radon d'ordre 0 sur $\sigma(E', E)$ (espace bitopologique, pour la topologie $\sigma(E', E)$ et la quasi-norme donnée sur E'). Alors u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. En outre, si l'on a (IX.3;19bis), on a, dès que $\alpha + \delta \leq \beta\gamma$, pour toute λ de Radon de support fini sur E :

$$(IX.3;20ter) \quad J_{\beta}(u(\lambda)) \leq R J_{\delta}({}^t u \rho) J_{\alpha}^*(\lambda) .$$

En particulier

$$(IX.3;20quarto) \quad J_{\beta}(u(\lambda)) \leq R J_{\frac{\beta\gamma}{2}}({}^t u \rho) J_{\frac{\beta\gamma}{2}}^*(\lambda) .$$

Démonstration : La probabilité ${}^t u \rho$ sur $\sigma(E', E)$ est une mesure de Pietsch, puisque

$$\begin{aligned} (IX.3;21) \quad \|u(x)\| &\leq R J_{\gamma}(u(x) \cdot \rho) \\ &= R J_{\gamma}(\tilde{x}({}^t u \rho)) = R J_{\gamma}({}^t u \rho, \tilde{x}) . \end{aligned}$$

De (IX.3;12bis) avec $v = {}^t u \rho$, on déduit donc (IX.3;20ter) par (IX.3;12ter).

Théorème de Sunyach (IX.3;22) (réciproque du théorème de Pietsch) :

Supposons que u soit approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$.

Alors il existe Z , v comme au théorème (IX.3;1), avec $Z =$ boule unité B' de E' , munie de la topologie $\sigma(B', E)$, et $v(x) = \tilde{x}$.

Ceci sera même conséquence du théorème plus fort :

Théorème (IX.3;23) : S'il existe α_0, β_0, M_0 tels que, pour toute λ de Radon de support fini sur E , on ait

$$(IX.3;23bis) \quad J_{\beta_0}(u(\lambda)) \leq M_0 J_{\alpha_0}^*(\lambda)$$

alors u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$; il existe une probabilité de Pietsch v avec $Z = \sigma(B', E)$, $v(x) = \tilde{x}$, $R = M_0$, γ arbitraire $< \alpha_0$; et, pour tout β , et tout $\gamma < \alpha_0$, on a

$$(IX.3;23ter) \quad J_{\beta}(u(\lambda)) \leq M_0 J_{\beta\gamma}^*(\lambda) .$$

Cet énoncé est effectivement plus fort que le précédent. Si en effet u est approximativement 0-radonifiante, pour tout β , il existe M et α tels que (IX.2;2bis). Ici nous supposons seulement l'existence d'un β_0 , d'un M_0 , d'un α_0 tels que (IX.3;23bis) ; et nous trouvons finalement que, pour tout β , il existe M et α tels que (IX.2;2bis), avec $M = M_0$, $\alpha = \beta\gamma$; remarquons que β_0 n'intervient pas.

Démonstration : Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des probabilités de Radon λ à support fini sur E telles que $J_{\beta_0}(u(\lambda)) > M_0$, ou $u(\lambda)(\bigcap B(M_0)) > \beta_0$ ($B(M_0)$ est la boule de rayon M_0 sur G). $\mathfrak{M}$ est convexe dans $\mathcal{P}(E)$. Pour toute $\lambda \in \mathfrak{M}$, considérons la fonction φ_λ sur $\sigma(B', E)$ définie par :

$$\varphi_\lambda(\xi) = \alpha_0 - (|\xi| \cdot \lambda)([1, +\infty]) .$$

Comme $[1, +\infty]$ est fermé, et que $\xi \mapsto |\xi| \cdot \lambda$ est continue de E' dans $\mathcal{P}(\mathbf{R}^+)$ (λ est de Radon à support fini !), $\xi \mapsto (|\xi| \cdot \lambda)[1, +\infty]$ est scs, donc φ_λ est sci^{*}. En outre, $\lambda \mapsto \varphi_\lambda(\xi)$ est convexe, car c'est

* C'est pour obtenir des fonctions sci que nous sommes obligés de prendre $[1, +\infty]$ au lieu de $]1, +\infty]$ comme antérieurement.

$\lambda \mapsto \lambda \{x \in E; |\langle \xi, x \rangle| \geq 1\}$. Donc l'ensemble des φ_λ , $\lambda \in \mathfrak{M}$, est un ensemble convexe de fonctions sci sur $\sigma(B', E)$, et chacune a un minimum ≤ 0 , car, puisque $J_{\beta_0}(u(\lambda)) > M_0$, on a, à cause de (IX.3;23bis), $J_{\alpha_0}^*(\lambda) > 1$, donc il existe un ξ , $\|\xi\| \leq 1$, tel que $J_{\alpha_0}(|\xi| \cdot \lambda) > 1$ ou $(|\xi| \cdot \lambda)(]1, +\infty]) > \alpha_0$, a fortiori $(|\xi| \cdot \lambda)[1, +\infty] > \alpha_0$ ou $\varphi_\lambda(\xi) < 0$ donc $\varphi_\lambda(\xi) \leq 0$. Donc le lemme (II.4;5) appliqué au cône Γ engendré par $\mathfrak{M}$, montre l'existence d'une probabilité de Radon ν sur $\sigma(B', E)$, telle que, pour toute $\lambda \in \mathfrak{M}$, $\nu(\varphi_\lambda) \leq 0$. Soit $x \in E$; prenons $\lambda = \delta_{(x)}$; $J_{\beta_0}(u(\lambda)) > M_0$ signifie $\delta_{(u(x))}(]M_0, +\infty]) > \beta_0$, c.à.d. $\|u(x)\| > M_0$. Ceci entraîne donc $\nu(\varphi_{\delta_{(x)}}) \leq 0$, ou $\int d\nu(\xi)(\alpha_0 - \delta_{|\langle x, \xi \rangle|}([1, +\infty])) \leq 0$, ou $\alpha_0 \leq (\tilde{x}(\nu))[1, +\infty]$. Soient a arbitraire < 1 et γ arbitraire $< \alpha_0$; on aura alors $\tilde{x}(\nu)(]a, +\infty]) > \gamma$ ou $J_\gamma(\nu, \tilde{x}) > a$. Ainsi nous avons montré que $\|u(x)\| > M_0 \Rightarrow J_\gamma(\nu, \tilde{x}) > a$; donc $\|u(x)\| \leq J_\gamma(\nu, \tilde{x}) \frac{M_0}{a}$; a étant arbitraire, $\|u(x)\| \leq M_0 J_\gamma(\nu, \tilde{x})$, pour tout $\gamma < \alpha_0$. On a donc trouvé une probabilité de Pietsch ν vérifiant (IX.3;1bis) avec $R = M_0$, $\gamma < \alpha_0$ arbitraire. Donc u est bien approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$. En outre, d'après (IX.3;1bis), on aura, pour β quelconque, pour γ arbitraire $< \alpha_0$:

$$J_\beta(u(\lambda)) \leq M_0 J_{\gamma\beta}^*(\lambda).$$

Corollaire (IX.3;24) (factorisation de Pietsch) : Pour que u soit approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, il faut et il suffit qu'il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\quad v \quad} & L^\infty(Z, \nu) & \xrightarrow{\quad j \quad} & L^0(Z, \nu) \\ & \searrow u_1 & & \nearrow j' & \\ & & S & \xrightarrow{\quad u_2 \quad} & G \end{array}$$

où le diagramme écrit est commutatif, ν ayant les propriétés indiquées à (IX.3;1), $u = u_2 u_1$, S étant un sous-espace vectoriel fermé de $L^0(Z, \nu)$ et j' son injection canonique.

Evident.

(IX.3;25) Rapport entre applications 0-radonifiantes et p-radonifiantes pour $p \neq 0$.

Appelons complètement sommante une application p-sommante pour tout $p > -1$.

Théorème (IX.3;26) : Une application linéaire continue de E dans G est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, si et seulement si elle est complètement sommante.

Démonstration : Supposons u approximativement 0-radonifiante. Alors il existe une probabilité de Pietsch ν vérifiant (IX.3;1bis). Soit alors $p > 0$. On a, pour toute probabilité μ sur $\bar{\mathbb{R}}^+$, $J_\gamma(\mu) \leq \frac{\|\mu\|_p}{\gamma^{1/p}}$.

En effet, posons $J_\gamma(\mu) = a$. Alors, pour tout $a' < a$, $\mu([a', +\infty]) > \gamma$ donc $\geq \gamma$; or $\|\mu\|_p \geq a' (\mu([a', +\infty]))^{1/p} \geq a' \gamma^{1/p}$; ceci est vrai pour tout $a' < a$, donc $\|\mu\|_p \geq a \gamma^{1/p} = \gamma^{1/p} J_\gamma(\mu)$. Donc on aura

$$\|u(x)\| \leq \frac{R}{\gamma^{1/p}} \|v(x)\|_{L^p(Z, \nu)},$$

ce qui est l'inégalité de Pietsch (II.4;2). Donc u est p-sommante pour $p > 0$, avec $\pi_p(u) = \frac{R}{\gamma^{1/p}}$. Mais, si E' est r-quasi-normé, et si on prend

$p < r$, on en déduit que u est complètement sommante par le théorème 3bis de l'exposé V.

Inversement, supposons u complètement sommante, et soit $-1 < p < 0$. On a une inégalité de Pietsch (II.4;2) avec $Z = \sigma(B', E)$, $v(x) = \tilde{x} \pi_p(u)$:

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \left(\int |\langle x, \xi \rangle|^p d\nu(\xi) \right)^{1/p} = \pi_p(u) \|\tilde{x}\|_p \quad (p < 0!).$$

Mais, pour $p < 0$, et toute probabilité μ sur $\bar{\mathbb{R}}^+$, $\|\mu\|_p \leq J_\gamma(\mu) (1 - \gamma)^{1/p}$. En effet, posons $J_\gamma(\mu) = a$; alors $\mu([a, +\infty]) \leq \gamma$. Soit $p = -\bar{p}$.

$$\left(\int \frac{1}{t^{\bar{p}}} d\mu(t) \right)^{1/\bar{p}} \geq \frac{1}{a} (\mu([0, a]))^{1/\bar{p}} \geq \frac{1}{a} (1 - \gamma)^{1/\bar{p}}.$$

En inversant :

$$\|\mu\|_p \leq a(1-\gamma)^{1/p} = J_\gamma(\mu)(1-\gamma)^{1/p} .$$

On aura donc, pour tout $p < 0$:

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u)(1-\gamma)^{1/p} J_\gamma(|\tilde{x}|, v) .$$

On a donc une inégalité de Pietsch (IX.3;12bis), avec γ arbitraire, et alors $R = \pi_p(u)(1-\gamma)^{1/p}$, donc u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$.
