B. MAUREY

Espaces de cotype p, $0 < p \leq 2$

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 7, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE MAUREY - SCHWARTZ 1972 - 1973

ESPACES DE COTYPE p, $0 < p \leq 2$

par B. MAUREY

Exposé N° VII

13 Décembre 1972

§ 1. LA TRANSFORMATION Γ_p, $0 < p \leq 2$

Soient E un elcs à dual quasi-normé et λ une probabilité cylindrique de type p sur E, $0 < p \leq 2$. Considérons la fonction F_λ sur E' définie par :

$$F_\lambda(\xi) = \|\xi(\lambda)\|_p^p = \int |t|^p \, d(\xi(\lambda))(t)$$

La fonction F_λ est continue sur E', et elle est de type négatif (cf exposé V). Pour montrer que F_λ est de type négatif, il suffit de le montrer sur tout sous-espace de dimension finie de E'. Or tout sous-espace de dimension finie de E' est de la forme N^o, où N est un sous-espace fermé de codimension finie de E. Soit λ_N la projection de λ sur E/N. On a, en identifiant N^o au dual de E/N :

$$\forall \xi \in N^o, \qquad \|\xi(\lambda)\|_p^p = \int_{E/N} |\langle y,\xi\rangle|^p \, d\lambda_N(y)$$

Par conséquent F_λ est de type négatif sur N^o comme intégrale des fonctions de type négatif $\xi \to |\langle y,\xi\rangle|^p$ (cf V, § 1), donc finalement F_λ est de type négatif sur E'.

La fonction $e^{-\|\xi(\lambda)\|_p^p}$ est donc continue et de type positif. Il existe donc d'après l'exposé I, théorème 1, une probabilité cylindrique sur E, que nous noterons $\Gamma_p(\lambda)$, telle que :

$$\mathfrak{F}\Gamma_p(\lambda)(\xi) = e^{-\|\xi(\lambda)\|_p^p}$$

<u>Proposition</u> 1 : Soient E un elcs à dual quasi-normé, et λ une probabilité cylindrique de type p sur E, $0 < p \leq 2$.

a) $\forall \xi \in E' \quad \xi(\Gamma_p(\lambda)) = \|\xi(\lambda)\|_p \cdot \gamma_p$ (cf V, théorème 1)

En particulier, pour tout réel q tel que $-1 < q < p^*$, on a :

$$\forall \xi \in E', \qquad \|\xi(\Gamma_p(\lambda))\|_q = \|\gamma_p\|_q \cdot \|\xi(\lambda)\|_p$$

b) Soient F un autre elcs à dual quasi-normé, et u un opérateur linéaire de E dans F. On a :

$$u(\Gamma_p(\lambda)) = \Gamma_p(u(\lambda))$$

<u>Démonstration</u> : Pour montrer a), on remarque comme dans (V, théorème 1) que :

$$\mathfrak{F}(\xi(\Gamma_p(\lambda)))(t) = \mathfrak{F}\,\Gamma_p(\lambda)(t\xi) = e^{-(|t|\,\|\xi(\lambda)\|_p)^p} = \mathfrak{F}(\|\xi(\lambda)\|_p\cdot\gamma_p)(t)$$

Pour montrer b), on a simplement :

$$\mathfrak{F}(\Gamma_p(u(\lambda)))(\xi) = e^{-\|\xi(u(\lambda))\|_p^p} = e^{-\|{}^t u(\xi)(\lambda)\|_p^p} = \mathfrak{F}\Gamma_p(\lambda)({}^t u(\xi))$$

$$= \mathfrak{F}(u(\Gamma_p(\lambda)))(\xi).$$

§ 2. <u>ESPACES DE COTYPE p, $0 < p \le 2$.</u>

Soit E un elcs bitopologique (II,(1,2)), à dual quasi-normé. Nous dirons que E est de cotype p, $0 < p \le 2$, s'il existe une constante C^* et un réel q, $0 < q < p^*$ tels que l'on ait pour toute probabilité λ à support fini sur E :

$$(1) \qquad \|\lambda\|_p \le C^*\|\Gamma_p(\lambda)\|_q$$

Nous allons traduire la relation (1) sous une forme un peu différente. Nous appellerons suite stable d'ordre p toute suite $(f_1,\dots,f_n)$ de variables aléatoires indépendantes sur un espace de probabilité (Ω,P), suivant la loi γ_p.

Soit alors $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\delta_{x_i}$ une probabilité à support fini sur E.

Posons $y_i = \lambda_i^{1/p}\cdot x_i$. On a :

$$\|\lambda\|_p = (\Sigma\|y_i\|^p)^{1/p}$$

Soit $(f_1,\dots,f_n)$ une suite stable d'ordre p sur un espace de probabilité (Ω,P). Considérons la variable aléatoire X à valeurs dans E définie par $X = \Sigma\, y_i f_i$. Soit ν la loi de X. Puisque les (f_i) sont indépendantes, on a :

$$\mathfrak{F}\nu(\xi) = \prod e^{-|<y_i,\xi>|^p} = e^{-\Sigma\lambda_i\ |<x_i,\xi>|^p}$$

$$= e^{-\|\xi(\lambda)\|_p^p} = \mathfrak{F}(\Gamma_p(\lambda))(\xi),$$

On a donc $\nu = \Gamma_p(\lambda)$, d'où :

$$\|\Gamma_p(\lambda)\|_q = (\int\|\Sigma y_i f_i(\omega)\|^q dP(\omega))^{1/q}$$

La relation (1) est donc équivalente à la suivante : pour toute suite finie $(y_1,\ldots,y_n)$ d'éléments de E et toute suite $(f_1,\ldots,f_n)$ stable d'ordre p sur un espace de probabilité (Ω,P), on a :

$$(2) \qquad (\Sigma\|y_i\|^p)^{1/p} \leq C^*(\int\|\Sigma y_i f_i(\omega)\|^q dP(\omega))^{1/q}$$

Par ailleurs la relation (2) garde un sens lorsque E est quasi-normé quelconque. Nous dirons donc qu'un espace quasi-normé E est de cotype p si la relation (2) est vérifiée.

Il est évident qu'un sous-espace F d'un espace quasi-normé de cotype p. Par contre, lorsque $p = 2$, la propriété ne passe pas au quotient (pour $0 < p < 2$, la réponse est triviale, puisque tout espace quasi-normé est alors de cotype p d'après la proposition 2 suivante.)

Soit maintenant (f_n) une suite stable d'ordre p infinie, et soit E un espace quasi-normé complet tel que l'on ait, pour toute suite (y_n) d'éléments de E :

$$\Sigma y_n f_n \text{ convergente dans } L^q(\Omega,P,E) \Rightarrow \Sigma\|y_n\|^p < \infty.$$

L'espace E est alors de cotype p, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que la relation (2) soit réalisée. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une suite croissante d'entiers N_k, et pour chaque k une suite finie $(y_{N_k+1},\ldots y_{N_{k+1}})$ d'éléments de E telles que l'on ait pour tout k :

$$\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \|y_n\|^p \geq 1, \text{ et } \int\|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} y_n f_n(\omega)\|^q dP(\omega) \leq 2^{-k}.$$

D'autre part, d'après (VI, lemme 2), il existe une constante K telle que si m est un entier tel que $N_k+1 \leq m \leq N_{k+1}$, on ait :

$$\int \Big\| \sum_{n=N_k+1}^{m} y_n f_n(\omega) \Big\|^q dP(\omega) \leq K\, 2^{-k}$$

Par conséquent la série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n f_n$ converge dans $L^q(\Omega,P,E)$, mais $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^p = +\infty$, d'où une contradiction qui prouve que E est de cotype p.

<u>Proposition 2</u> : a) Si un espace quasi-normé E est de cotype p, $0 < p \leq 2$, il existe pour tout q_1 tel que $0 < q_1 < p^*$ une constante C_1^* telle que la relation (2) soit vérifiée.

b) Tout espace quasi-normé E est de cotype p lorsque $0 < p < 2$.

<u>Démonstration</u> : Montrons a). Soit E un espace quasi-normé de cotype p. Par définition il existe C et q, $0 < q < p^*$, tels que (2) soit vérifiée.

D'autre part, d'après (VI, corollaire du théorème 3), il existe ε, δ et M tel que :

$$P(\|\Sigma y_i f_i\| \geq \delta) \leq \varepsilon \Rightarrow \int \|\Sigma y_i\, f_i\|^q\, dP \leq M$$

Soit q_1 tel que $0 < q_1 < p^*$, et supposons que :

$$\left(\int \|\Sigma y_i\, f_i(\omega)\|^{q_1}\, dP(\omega)\right)^{1/q_1} \leq \varepsilon^{1/q_1} . \delta$$

Alors : $P(\|\Sigma y_i f_i\| \geq \delta) \leq \varepsilon$, donc :

$$\left(\int \|\Sigma y_i f_i(\omega)\|^q dP(\omega)\right)^{1/q} \leq M^{1/q}, \text{ d'où d'après (2) :}$$

$$(\Sigma \|y_i\|^p)^{1/p} \leq C\, M^{1/q}, \text{ et finalement :}$$

$$(\Sigma \|y_i\|^p)^{1/p} \leq \frac{CM^{1/q}}{\varepsilon^{1/q_1} . \delta} \left(\int \|\Sigma y_i f_i(\omega)\|^{q_1}\, dP(\omega)\right)^{1/q_1}$$

Démontrons maintenant b). On peut supposer E complet (si E est quelconque, c'est un sous-espace de son complété $\hat{E}$, et E sera de cotype p comme sous-espace d'un espace de cotype p). Soient donc $p < 2$, $0 < q < p$, (y_n) une suite d'éléments de E et (f_n) une suite stable d'ordre p infinie, tels que $\Sigma y_n f_n$ converge dans $L^q(\Omega,\mu,E)$. D'après (VI, remarque 1), il existe une constante K telle que l'on ait :

$$\int \sup_i \|y_i f_i(\omega)\|^q dP(\omega) \leq K \int \|\Sigma y_i f_i(\omega)\|^q dP(\omega) < \infty$$

En particulier la suite $\|y_i\| \, |f_i|$ est p.s. bornée, donc :

$$\exists\ R,\quad P(\forall i,\ |f_i| \leq \frac{R}{\|y_i\|}) > 0$$

Donc puisque les (f_i) sont indépendantes :

$$0 < \prod_i P(|f_i| \leq \frac{R}{\|y_i\|}) = \prod_i (1 - P(|f_i| > \frac{R}{\|y_i\|}))$$

Le produit infini ci-dessus est convergent, par conséquent :

$$\Sigma\ P(|f_i| > \frac{R}{\|y_i\|}) < \infty$$

Or γ_p équivaut à l'infini à $t^{-p-1}dt$ (à une constante près) donc, pour R assez grand :

$$P(|f_i| > \frac{R}{\|y_i\|}) \sim \frac{\|y_i\|^p}{R^p}\ ,\ \text{donc}\quad \Sigma\|y_i\|^p < \infty,$$

ce qui achève la démonstration.

§ 3. <u>PROPRIETES DES ESPACES DE COTYPE 2</u>.

Nous commencerons par exhiber une classe d'espaces de cotype 2 :

<u>Proposition 3</u> : Soit (X,ν) un espace mesuré quelconque. L'espace $L^p(X,\nu)$ est de cotype 2 lorsque $0 < p \leq 2$.

<u>Démonstration</u> : Soit $(f_1,\ldots,f_n)$ une suite stable d'ordre 2 sur un espace de probabilité (Ω,P). On vérifie aisément que si $(c_1,\ldots,c_n)$ est

une suite de réels, on a :

$$\left(\int |\Sigma c_i f_i(\omega)|^p dP(\omega)\right)^{1/p} = \|\gamma_2\|_p \cdot (\Sigma |c_i|^2)^{1/2}$$

Soit $(y_1,\dots,y_n)$ une suite d'éléments de $L^p(X,\nu)$. On aura, puisque $p \le 2$:

$$(\Sigma \|y_i\|^2)^{1/2} \le \left(\int (\Sigma |y_i(t)|^2)^{p/2} d\nu(t)\right)^{1/p}$$

$$= \|\gamma_2\|_p^{-1} \left(\int |\Sigma y_i(t) f_i(\omega)|^p \, d\nu(t)\, dP(\omega)\right)^{1/p}$$

$$= \|\gamma_2\|_p^{-1} \left(\int \|\Sigma y_i f_i(\omega)\|^p dP(\omega)\right)^{1/p},$$ d'où le résultat.

<u>Remarque 1</u> : On vérifie facilement que la même démonstration montre que $L^p(X,\nu,E)$ est de cotype 2 dès que E est de cotype 2, et $0 < p \le 2$. Par exemple $L^{p_1}(X_1,\nu_1,L^{p_2}(X_2,\nu_2))$ est de cotype 2 si $0 < p_1$, $p_2 \le 2$. Notons que tout espace $l^1(I)$ est de cotype 2, I étant un ensemble d'indices quelconque. Si la propriété de cotype 2 passait au quotient, tout espace de Banach serait de cotype 2, ce qui n'est pas le cas.

Nous allons maintenant démontrer quelques propriétés des probabilités gaussiennes. On dit qu'une probabilité cylindrique λ sur un elcs E est gaussienne si $\xi(\lambda)$ est une probabilité gaussienne sur $\mathbb{R}$ pour tout $\xi \in E'$. Il est équivalent de dire que $\mathfrak{F}\lambda(\xi) = e^{-Q(\xi)}$, où Q est une forme quadratique positive sur E' (voir [1], §6, proposition 7).

<u>Lemme 1</u> : Soient E un espace de Banach, $(x_1,\dots,x_n)$ une suite de vecteurs de E, $(a_1,\dots,a_n)$ une suite de réels tels que $|a_i| \le 1$, $(f_1,\dots,f_n)$ une suite de variables aléatoires intégrables réelles, symétriques, indépendantes sur un espace de probabilité (Ω,P). On a :

$$\int \|\Sigma a_i x_i f_i(\omega)\| \, dP(\omega) \le \int \|\Sigma x_i f_i(\omega)\| dP(\omega)$$

<u>Démonstration</u> : Considérons tout d'abord une suite $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ telle que $\varepsilon_i = \pm 1$. Comme les (f_i) sont symétriques et indépendantes, les variables aléatoires $\Sigma x_i f_i$ et $\Sigma \varepsilon_i x_i f_i$ ont la même loi, donc :

$$\int\|\Sigma\varepsilon_i x_i f_i(\omega)\|dP(\omega) = \int\|\Sigma x_i f_i(\omega)\|dP(\omega)$$

Considérons la fonction sur la boule unité de l_n^∞ définie par :

$$(a_i) \to \int\|\Sigma a_i x_i f_i(\omega)\|dP(\omega)$$

Cette fonction est convexe et continue, donc atteint son maximum sur les points extrèmaux de la boule unité de l_n^∞, qui sont précisément les points de la forme $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$, ce qui démontre le lemme.

Lemme 2 : Soient E un espace de Banach de dimension finie, Q_1 et Q_2 deux formes quadratiques positives sur E', telles que $Q_1 \leq Q_2$. Soient γ_1 et γ_2 les probabilités gaussiennes sur E définies par

$$\mathfrak{F}\gamma_i(\xi) = e^{-Q_i(\xi)} , \; i = 1, 2.$$

On a :

$$\|\gamma_1\|_1 \leq \|\gamma_2\|_1$$

Démonstration : On peut trouver une base $(e_1^*,\ldots,e_n^*)$ de E', telle que les formes quadratiques Q_1 et Q_2 s'écrivent :

$$Q_1(\Sigma\,\xi_i e_i^*) = \Sigma\; a_i^2\; \xi_i^2$$

$$Q_2(\Sigma\,\xi_i e_i^*) = \Sigma\; b_i^2\; \xi_i^2$$

On peut supposer a_i, $b_i \geq 0$. On a nécessairement $a_i \leq b_i$. Soient $(f_1,\ldots,f_n)$ une suite stable d'ordre 2, et $(e_1,\ldots,e_n)$ la base duale dans E. Considérons :

$$X_1 = \Sigma\; a_i\, e_i\, f_i \;,\; X_2 = \Sigma\, b_i e_i\, f_i$$

On voit que γ_1 et γ_2 sont les lois de X_1 et X_2 respectivement. En effet, la fonction caractéristique de $<\xi,X_1>$ est égale à :

$$\prod e^{-|<\xi,a_i e_i>|^2} = e^{-\,\Sigma a_i^2\,\xi_i^2} = e^{-Q_1(\xi)}$$

D'autre part, X_1 est obtenu à partir de X_2 en multipliant $b_i e_i f_i$ par $\frac{a_i}{b_i} \leq 1$. On a donc d'après le lemme 1 :

$$\|\gamma_1\|_1 = \int\|\Sigma a_i e_i f_i(\omega)\| \, dP(\omega) \leq \int\|\Sigma b_i e_i f_i(\omega)\| dP(\omega) = \|\gamma_2\|_1$$

<u>Théorème 1</u> : Soient H un espace de Hilbert, F un espace de Banach, u un opérateur linéaire continu de H dans F, γ la probabilité cylindrique de Gauss sur H (i.e. $\mathfrak{F}\gamma(\xi) = e^{-\|\xi\|^2}$). Si $u(\gamma)$ est de Radon d'ordre 1 sur $\sigma(F'',F')$, toute probabilité cylindrique gaussienne λ de type 1 sur H a une image $u(\lambda)$ de Radon d'ordre 1 sur $\sigma(F'',F')$, et :

$$\|u(\lambda)\|_1 \leq (\|\gamma\|_1^*)^{-1} \cdot \|\lambda\|_1^* \, \|u(\gamma)\|_1$$

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème de Prokhorov, dire qu'une probabilité cylindrique μ est de Radon d'ordre 1 sur $\sigma(F'',F')$, avec $\|\mu\|_1 \leq C$, équivaut à dire que pour tout sous-espace fermé de codimension finie N de F, on a :

$$\int_{E/N}\|y\| d(\pi_N(\mu))(y) \leq C$$

Soit λ une probabilité cylindrique gaussienne sur H. Posons $\mathfrak{F}\lambda(\xi) = e^{-Q(\xi)}$, et supposons pour simplifier $\|\lambda\|_1^* \leq \|\gamma\|_1^*$, ce qui se traduit immédiatement par $Q(\xi) \leq \|\xi\|^2$.

Soit N un sous-espace fermé de codimension finie de F, et considérons les probabilités gaussiennes $\gamma_1 = \pi_N(u(\lambda))$, $\gamma_2 = \pi_N(u(\gamma))$ sur F/N. On a :

$$\mathfrak{F}\gamma_1(\xi) = \mathfrak{F}\lambda({}^t u(\xi)) = e^{-Q({}^t u(\xi))}$$

$$\mathfrak{F}\gamma_2(\xi) = \mathfrak{F}\gamma({}^t u(\xi)) = e^{-\|{}^t u(\xi)\|^2}$$

On a $Q({}^t u(\xi)) \leq \|{}^t u(\xi)\|^2$, donc d'après le lemme 2 :

$$\int_{E/N} \|y\| d\pi_N(u(\lambda))(y) \leq \int_{E/N}\|y\| d\pi_N(u(\gamma))(y) \leq \|u(\gamma)\|_1,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 2 : Le théorème 1 pose le problème suivant : soient E un elcs, λ une probabilité cylindrique sur E. Quelles sont les probabilités cylindriques μ "subordonnées" à λ, en ce sens que lorsque l'image $u(\lambda)$ de λ par un opérateur linéaire continu u est de Radon, il en est de même pour $u(\mu)$?

Théorème 2 : Soient H un espace de Hilbert, F un espace de Banach de cotype 2, u un opérateur linéaire continu de H dans F, et γ la probabilité cylindrique de Gauss sur H. Pour que u soit t-sommant pour tout $t > -1$. il faut et il suffit que $u(\gamma)$ soit de Radon sur $\sigma(F'',F')$.

Démonstration : La nécessité est évidente. D'autre part, il suffit de montrer que u est 2-sommante d'après (V, corollaire 2). Notons que $u(\gamma)$ est automatiquement d'ordre 1 d'après le théorème de Shepp.

Soit λ une probabilité à support fini. Considérons $\Gamma_2(\lambda)$. C'est une probabilité gaussienne, donc d'après le théorème 1 :

$$\|u(\Gamma_2(\lambda))\|_1 \leq (\|\gamma\|_1^*)^{-1}\|\Gamma_2(\lambda)\|_1^* \; \|u(\gamma)\|_1$$

Calculons $\|\Gamma_2(\lambda)\|_1^*$. On a d'après la proposition 1 :

$$\|\Gamma_2(\lambda)\|_1^* = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|\xi(\Gamma_2(\lambda))\|_1 = \|\gamma_2\|_1 \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|\xi(\lambda)\|_2 = \|\gamma\|_1^* \cdot \|\lambda\|_2^*$$

Puisque F est de cotype 2, il existe une constante C, indépendante de λ, telle que :

$$\|u(\lambda)\|_2 \leq C\|\Gamma_2(u(\lambda))\|_1 = C\|u(\Gamma_2(\lambda))\|_1$$

$$\leq C(\|\gamma\|_1^*)^{-1}\|\Gamma_2(\lambda)\|_1^* \; \|u(\gamma)\|_1 = C\|u(\gamma)\|_1 \cdot \|\lambda\|_2^* ,$$

ce qui démontre le théorème.

A partir du théorème 2, on peut étendre la propriété de définition du cotype 2 :

Corollaire 1 : Soit F un espace de Banach de cotype 2. Si λ est une probabilité cylindrique de type 2 sur F, telle que $\Gamma_2(\lambda)$ soit de Radon sur $\sigma(F'',F')$, λ est de Radon d'ordre 2 sur $\sigma(F'',F')$.

<u>Démonstration</u> : Puisque $\Gamma_2(\lambda)$ est gaussienne, on peut écrire :

$$\mathfrak{F}\Gamma_2(\lambda) = e^{-Q}$$

où Q est une forme quadratique positive. Considérons la semi-norme $\sqrt{Q}$ sur F', et désignons par H l'espace de Hilbert obtenu par passage au quotient et complétion. On a un opérateur naturel v de F' dans H, d'où en identifiant H et son dual un opérateur ${}^t v$ de H dans F". Il est bien clair que $\Gamma_2(\lambda)$ est exactement l'image par ${}^t v$ de la probabilté cylindrique de Gauss γ de H. Puisque $\Gamma_2(\lambda)$ est de Radon sur $\sigma(F",F')$, ${}^t v$ est 2-sommant d'après le théorème 2.

Soit $u : F' \to L^2(\Omega,\mu)$ une fonction aléatoire linéaire qui représente λ. Puisque $\|u(\xi)\| = \|\xi(\lambda)\|_2 = \sqrt{Q(\xi)}$ pour tout $\xi \in F'$, l'opérateur u "passe au quotient"; et admet la factorisation

$$F' \xrightarrow{v} H \xrightarrow{u_1} L^2(\Omega,\mu).$$

L'opérateur u_1 définit une probabilité cylindrique λ_1 de type 2 sur H, et on voit que $\lambda = {}^t v(\lambda_1)$. Par conséquent λ est de Radon d'ordre 2 sur $\sigma(F",F')$, puisque ${}^t v$ est 2-sommant.

<u>Remarque 3</u> : La seule chose utilisée dans la démonstration du corollaire 1 est le fait que F vérifie le théorème 2. On a donc en fait prouvé une réciproque (compte tenu de la remarque 4 ci-dessous): si F est un espace de Banach tel que le théorème 2 soit vrai, F est de cotype 2.

<u>Remarque 4</u> : Supposons que F vérifie le corollaire 1, c'est-à-dire que $\Gamma_2(\lambda)$ de Radon sur $\sigma(F",F')$ implique λ de Radon d'ordre 2 sur $\sigma(F",F')$. Alors F est de cotype 2, c'est-à-dire qu'il existe C et q tels que la relation (1) soit vérifiée : il suffit d'adapter l'argument de la page 3.

<u>Corollaire 2</u> : Soient E et F deux espaces de Banach, et u un opérateur linéaire continu de E dans F. On suppose que u est q-sommant pour un $q < \infty$, et que F est de cotype 2. L'opérateur u est alors en fait 2-sommant.

<u>Démonstration</u> : Soit (x_n) une suite scalairement l^2 sur E. Elle définit un opérateur w de l^2 dans E par :

$$w((c_n)) = \Sigma\, c_n\, x_n$$

L'opérateur $u \circ w$ est q-sommant de l^2 dans F, $q < \infty$, donc $u \circ w(\gamma)$ est de Radon sur F. D'après le théorème 2, $u \circ w$ est 2-sommant, donc en désignant par (e_n) la base canonique de l^2 :

$$\Sigma \| u(x_n) \|^2 = \Sigma \| u \circ w(e_n) \|^2 < \infty,$$

ce qui montre que u est 2-sommant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki : Intégration, Chapitre IX.
