

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

**Probabilités cylindriques stables sur les espaces  $L^p$ ,  $p \geq 2$   
et applications du théorème de dualité**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 5, p. 1-11*

<[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1972-1973\\_\\_\\_\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A5_0)>

© Séminaire Maurey-Schwartz  
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17 RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11 77  
(633)

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

PROBABILITES CYLINDRIQUES STABLES SUR LES ESPACES  $L^p$ ,  
-----  
 $p \geq 2$  ET APPLICATIONS DU THEOREME DE DUALITE  
-----

par B. MAUREY



§ 1. FONCTIONS DE TYPE NEGATIF

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $f$  une fonction sur  $E$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est de type négatif (ou que  $(-f)$  est conditionnellement de type positif) si pour toute suite finie  $(c_1, \dots, c_n)$  de nombres complexes et toute suite  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $E$ , on a :

$$\sum c_i = 0 \Rightarrow \sum c_i \bar{c}_j f(x_i - x_j) \leq 0$$

On vérifie par un calcul élémentaire que  $t \rightarrow t^2$  est de type négatif sur  $\mathbb{R}$ . Plus généralement, on démontre que  $t \rightarrow |t|^p$  est de type négatif lorsque  $0 < p \leq 2$ .

Soient  $E$  un espace vectoriel, et  $f$  une fonction sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On démontre, et nous l'admettons (voir par exemple [3]) que  $f$  est de type négatif sur  $E$  si et seulement si  $e^{-\alpha f}$  est de type positif pour tout  $\alpha > 0$ . Ainsi  $t \rightarrow e^{-|t|^p}$  est de type positif pour  $0 < p \leq 2$ . Il existe donc une probabilité sur  $\mathbb{R}$ , que nous noterons  $\gamma_p$ , telle  $\int \gamma_p = e^{-|t|^p}$ . On démontre que  $d\gamma_p(t)$  équivaut à l'infini à  $Ct^{-p-1}dt$ , dans le cas  $0 < p < 2$ . On en déduit dans ce cas que  $\gamma_p$  a des moments d'ordre  $q < p$ . D'autre part lorsque  $p = 2$ ,  $\gamma_2$  est une probabilité gaussienne, donc admet des moments de tout ordre  $q < +\infty$ . En posant  $p^* = p$  si  $p < 2$ , et  $2^* = +\infty$ , nous retiendrons en résumé :

$$\|\gamma_p\|_q < \infty \quad \text{si } q < p^*$$

§ 2. PROBABILITES CYLINDRIQUES STABLES

Soit  $(X, \nu)$  un espace mesuré. D'après le paragraphe 1, la fonction  $F$  définie sur  $L^p(X, \nu)$ ,  $0 < p \leq 2$ , par :

$$F(f) = \int |f(t)|^p d\nu(t) = \|f\|^p$$

est de type négatif comme intégrale des fonctions de type négatif  $f \rightarrow |f(t)|^p$  (ces fonctions ne sont pas définies en fait, car  $f$  est une classe de fonctions. Mais pour montrer que  $F$  est de type négatif, il suffit

de le montrer sur tout sous-espace de dimension finie  $E_0$  de  $L^p(X, \nu)$ , et on peut remplacer les éléments de  $E_0$  par de vraies fonctions sans modifier le résultat.)

Soient  $S$  un sous-espace fermé de  $L^p(X, \nu)$ , et  $F_S$  la restriction de  $F$  à  $S$ . D'après le paragraphe 1,  $e^{-F}$  est de type positif sur  $S$ , et continue puisque  $F$  est continue sur  $L^p(X, \nu)$ . Si nous connaissons un elcs  $E$  dont le dual soit  $S$ , il correspondra à  $e^{-F}$  d'après le théorème 1, exposé 3, une probabilité cylindrique  $\gamma_p$  sur  $E$  telle que  $\mathfrak{G}_p = e^{-F}$ .

Il est naturel de prendre en fait pour  $E$  le dual topologique de  $S$ , muni de la topologie  $\sigma(S, S)$ . Mais en général, dans le cas  $0 < p < 1$ , le dual topologique de  $S$  est réduit à  $\{0\}$ . Nous poserons la définition suivante, dont le seul intérêt sera de nous éviter des répétitions par la suite :

Soient  $G$  un espace quasi-normé, et  $0 < p < +\infty$ . Nous dirons que  $G$  est un espace  $\mathcal{S}_p$  si :

- a) Il existe un espace mesuré  $(X, \nu)$  tel que  $G$  soit isométrique à un sous-espace de  $L^p(X, \nu)$ .
- b) L'espace  $G$  est séparé par son dual.
- c) Si  $p \leq 1$ , on suppose que  $G$  vérifie l'hypothèse d'approximation métrique.

Nous dirons qu'un elcs à dual quasi-normé  $E$  est un elcs à dual  $\mathcal{S}_p$  si son dual  $E'$ , muni de sa quasi-norme, est un espace  $\mathcal{S}_p$ .

Par exemple, l'espace  $l^p$ ,  $0 < p \leq 1$ , est un espace  $\mathcal{S}_p$  et l'espace  $l^\infty$  muni de la topologie  $\sigma(l^\infty, l^p)$  est un elcs à dual  $\mathcal{S}_p$ .

**Théorème 1** — Soient un elcs à dual  $\mathcal{S}_p$ ,  $0 < p \leq 2$ . Il existe une probabilité cylindrique  $\gamma_p$  sur  $E$  telle que :

$\forall \xi \in E', \quad \mathfrak{G}(\xi_p) = \|\xi\|_p \gamma_p$  (où  $\tau_\xi$  désigne l'image d'une probabilité  $\gamma$  sur  $\mathbb{R}$  par l'homothétie  $t \mapsto \tau t$ ).

En conséquence,  $\gamma_p$  est de type et d'ordre  $r$  pour  $-1 < r < p^*$  et :

$$(\gamma_p^*)_{(p-1)^{-1}} \subset \gamma_p^* \subset (\gamma_p^*)_{p^*}$$

Démonstration : Identifions  $E'$  à un sous-espace d'un espace  $L^p(X, \nu)$ .

Posons si  $\xi \in E'$  :

$$F(\xi) = \int |\xi(t)|^p d\nu(t) = \|\xi\|^p.$$

D'après ce que nous avons dit précédemment,  $e^{-F}$  est continue et de type positif sur  $E'$ , donc il existe une probabilité cylindrique  $\lambda_p$  sur  $E$ , telle que  $\mathfrak{J}\lambda_p = e^{-F}$  (théorème 1, exposé I). Soit  $\xi \in E'$ . On a :

$$\mathfrak{J}(\xi(\lambda_p))(t) = \mathfrak{J}(t\xi(\lambda_p))(1) = \mathfrak{J}\lambda_p(t\xi) = e^{-\|\xi\|^p |t|^p}$$

Mais puisque  $\mathfrak{J}\gamma_p(t) = e^{-|t|^p}$ ,  $\mathfrak{J}(\|\xi\|\gamma_p)(t) = e^{-\|\xi\|^p |t|^p}$ , ce qui prouve que  $\xi(\lambda_p) = \|\xi\| \cdot \gamma_p$ .

Soit  $r$  un nombre réel non nul. On a :

$$(\int |t|^r d(\xi(\lambda_p))(t))^{1/r} = (\int (\|\xi\| |t|)^r d\gamma_p(t))^{1/r} = \|\xi\| \|\gamma_p\|_r.$$

On en déduit immédiatement  $(\|\lambda_p\|_r^*)^{-1} = \|\lambda_p\|_r^* = \|\gamma_p\|_r$ . Nous avons admis que  $\|\gamma_p\|_r$  est fini pour  $r < p^*$ , donc  $\lambda_p$  est de type  $r$  pour  $r < p^*$ . D'autre part  $e^{-|t|^p}$  décroît rapidement à l'infini, donc  $\overline{\mathfrak{J}} e^{-|t|^p}$  (qui est la densité de  $\gamma_p$ ) est continue, et en particulier bornée à l'origine. On en déduit lorsque  $-1 < r < 0$  :

$$\int |t|^r d\gamma_p(t) < +\infty, \text{ soit } \|\gamma_p\|_r > 0, \text{ donc } \|\lambda_p\|_r^* = (\|\gamma_p\|_r)^{-1}$$

est fini pour  $r > -1$  ce qui achève la démonstration.

Remarque 1 : Lorsque  $p = 2$ ,  $E'$  est un espace de Hilbert et  $\lambda_2$  n'est pas autre chose (à une normalisation près) que la probabilité cylindrique de Gauss définie dans l'exposé I.

Remarque 2 : Soient  $E$  un elcs à dual  $\mathscr{S}_p$ ,  $0 < p \leq 2$ , et  $u: E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$  une fonction aléatoire linéaire représentant la probabilité cylindrique  $\lambda_p$  du théorème 1. Soit  $q \in ]0, p[$ . Posons  $u_q = \|\gamma_p\|_q^{-1} \cdot u$ . On a alors :

$$\forall \xi \in E' \quad \|u_q(\xi)\|_{L^q} = \|\gamma_p\|_q^{-1} \cdot \left( \int |t|^q d\xi \lambda_p(t) \right)^{1/q} = \|\xi\|$$

Par conséquent,  $u_q$  est une isométrie de  $E'$  dans  $L^q(\Omega, \mu)$ . Par conséquent, on obtient que  $L^p(X, \nu)$  peut se plonger isométriquement dans un espace  $L^q(\Omega, \mu)$  si  $0 < q < p \leq 2$ , et  $p \geq 1$  (Sinon  $L^p$  n'a pas de dual topologique). En fait, cette restriction  $p \geq 1$  est inutile, car on peut toujours construire  $\lambda_p$  sur  $\sigma((L^p)^*, L^p)$ , ce qui permet de construire  $u : L^p(X, \nu) \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$  même pour  $p < 1$ . Ces problèmes de plongement se trouvent traités dans un cas plus général dans [2].

### § 3. APPLICATIONS DU THEOREME DE DUALITE

Théorème 2 : Soient  $E$  un elcs à dual  $\mathcal{S}_q$ ,  $F$  un espace  $\mathcal{S}_p$ ,  $0 < p, q \leq 2$  et  $u$  un opérateur linéaire continu de  $E$  dans  $F$ ,  $\lambda_q$  et  $\lambda_p$  respectivement les probabilités cylindriques sur  $E$  et  $\sigma(F', F)$  données par le théorème 1. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $u(\lambda_q)$  est de Radon sur  $\sigma(F'', F')$
- b)  ${}^t u$  est  $t$ -sommante pour tout  $t > -1$ .
- c)  ${}^t u$  est  $s$ -sommante pour un  $s < p^*$
- d)  ${}^t u(\lambda_p)$  est de Radon sur  $\sigma(E^*, E)$  (exposé II, (1,9).)
- e)  $u$  est  $t$ -sommante pour tout  $t > -1$ .
- f)  $u$  est  $r$ -sommante pour un  $r < q^*$

Démonstration : Montrons que a)  $\Rightarrow$  b). Il suffit de montrer que  ${}^t u$  est  $t$ -sommante lorsque  $-1 < t < 0$ . Or si  $u(\lambda_q)$  est de Radon, elle est alors automatiquement d'ordre  $t$ . Puisque  $\lambda_q$  est de cotype  $t$  d'après le théorème 1,  ${}^t u$  est  $t$ -sommante d'après le théorème de dualité (exposé IV, théorème 4). Cela prouve a)  $\Rightarrow$  b), et b)  $\Rightarrow$  c) est trivial. Montrons que c)  $\Rightarrow$  d). Si  $p$  est inférieur ou égal à 1, le couple  $(F', F)$  est supposé vérifier la propriété d'approximation métrique d'après notre définition des espaces  $\mathcal{S}_p$ , donc  ${}^t u$  est  $s$ -radonifiante de  $\sigma(F', F)$  dans  $\sigma(E^*, E)$ , d'où le résultat puisque  $\lambda_p$  est de type  $s$ .

Si  $p > 1$ ,  ${}^t u$  est a fortiori  $\sup(1, s)$ -sommante,  $\lambda_p$  est encore de type  $\sup(1, s)$ , et l'hypothèse d'approximation est inutile dans ce cas (proposition (III, 3, 1), exposé III).

Finalement  $d) \Rightarrow e) \Rightarrow f) \Rightarrow a)$  se démontre de la même façon, et la démonstration est achevée.

Corollaire 1 [6] : Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert,  $u \in L(H_1, H_2)$  et  $\gamma$  la probabilité cylindrique de Gauss sur  $H_1$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $u(\gamma)$  est de Radon
- b)  $u$  est  $p$ -sommante pour un  $p < \infty$
- c)  $u$  est  $p$ -sommante pour tout  $p > -1$
- d)  $u$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Démonstration : L'équivalence de a), b) et c) résulte du théorème 2. Pour conclure il suffit de montrer que  $u$  Hilbert-Schmidt équivaut à  $u$  2-sommante. Si  $u$  est 2-sommante, et si  $(e_i)$  est une base orthonormée (non nécessairement dénombrable) de  $H_1$ , toutes les sous-familles dénombrables  $(e_{i_n})$  de  $(e_i)$  vérifient  $\|(e_{i_n})\|_2^* \leq 1$ , donc  $(\sum_n \|u(e_{i_n})\|^2)^{1/2} \leq \pi_2(u)$ , donc aussi  $(\sum_i \|u(e_i)\|^2)^{1/2} \leq \pi_2(u)$  et  $u$  est Hilbert-Schmidt. Inversement, on sait qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt  $u$  admet la factorisation :

$$H_1 \longrightarrow l^\infty \xrightarrow{\alpha} l^2 \longrightarrow H_2$$

où  $\alpha$  est un opérateur diagonal défini par une suite  $\alpha \in l^2$ , donc  $u$  est 2-sommant (exposé II, proposition (5.1)). Ceci achève la démonstration.

Corollaire 2 [4] : Soient  $1 \leq p \leq q \leq 2$ ,  $p < q^*$ , et soit  $E$  un quotient d'un espace  $L^{q'}(X, \nu)$ . On a pour tout espace quasi-normé  $F$  :

$$-1 < t \leq p \Rightarrow \prod_p(E, F) = \prod_t(E, F)$$

Démonstration : Nous supposons  $1 \leq p < q^*$ , donc  $q > 1$ . Il est alors clair que  $E$  est un elcs à dual  $\mathcal{J}_q$ . Nous pouvons aussi supposer  $p > 1$ . Soit  $u \in \prod_p(E, F)$ . D'après l'exposé II, théorème (4.7), l'opérateur  $u$  admet la factorisation :

$$E \xrightarrow{\bar{u}} S \longrightarrow F$$

où  $S$  est un sous-espace fermé d'un espace  $L^p(\Omega, \mu)$ ,  $p > 1$ , donc un espace  $\mathcal{S}_p$ , et où  $\bar{u} \in \prod_p(E, S)$ . D'après l'implication  $f) \Rightarrow e)$  du théorème 2,  $\bar{u} \in \prod_t(E, S)$ , donc  $u \in \prod_t(E, F)$ , ce qui achève la démonstration.

Si nous supposons  $q \leq 1$  dans le corollaire 2, la même démonstration n'est plus possible, car le sous-espace  $S$  de  $L^p(\Omega, \mu)$ ,  $p < q$ , n'est pas en général séparé par son dual. Néanmoins le résultat reste vrai. Pour le voir, nous appliquerons la même méthode, mais en dimension finie. Nous devons alors travailler de façon plus précise, en donnant des majorations incluant des constantes indépendantes de la dimension.

Soit  $n$  un entier. Nous désignerons par  $C(n)$  l'espace  $C(K)$  lorsque  $K$  est un ensemble fini de  $n$  points. Le dual de  $C(n)$  est l'espace des mesures sur un ensemble à  $n$  points : c'est un espace  $\mathcal{S}_1$  puisque si

$$\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_i, \quad \|\mu\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|.$$

**Proposition 1** : Soient  $t, p$  deux nombres réels tels que  $-1 < t < p < 1$ . Il existe une constante  $C(t, p)$  telle que pour tout entier  $n$ , tout espace quasi-normé  $F$  et tout opérateur linéaire  $u$  de  $C(n)$  dans  $F$ , on ait :

$$\pi_t(u) \leq C(t, p) \pi_p(u)$$

**Démonstration** : Comme précédemment nous écrirons la factorisation de Pietsch pour  $u$  :

$$C(n) \xrightarrow{\bar{u}} S \xrightarrow{v} F$$

où  $u = v \circ \bar{u}$ ,  $S$  est un sous-espace fermé d'un espace  $L^p(\Omega, \mu)$ ,  $\|v\| \leq 1$  et  $\pi_p(\bar{u}) = \pi_p(u)$ . On peut supposer  $\bar{u}$  surjective, donc on peut prendre  $S$  de dimension finie. Il est alors bien clair que les problèmes d'approximation et de séparation par le dual ne se posent plus pour étudier  $\bar{u}$  et  ${}^t\bar{u}$  ! L'espace  $C(n)$  a un dual  $\mathcal{S}_1$ , et  $S$  est un espace  $\mathcal{S}_p$ , donc il existe sur  $C(n)$  et  $S$  respectivement les probabilités cylindriques  $\lambda_1$  et  $\lambda_p$  du théorème 1.

Pour faire la démonstration, nous appliquerons deux fois chacune des inégalités suivantes :

le théorème de dualité :  $\pi_r(w) \leq \|\lambda\|_r^* \|w(\lambda)\|_r$

L'inégalité des applications  $r$ -radonifiantes :  $\|w(\mu)\|_r \leq \pi_r(w) \|\mu\|_r^*$   
(pour  $r > 0$  !) et la croissance de l'ordre :  $r_1 \leq r_2 \Rightarrow \|\mu\|_{r_1} \leq \|\mu\|_{r_2}^*$ .

Nous aurons alors en introduisant un réel  $s > 0$  tel que  $-1 < t < s < p$  :

$$\begin{aligned} \pi_t(u) &\leq \pi_t(\bar{u}) \leq \|\lambda_p\|_t^* \|\bar{u}(\lambda_p)\|_t \leq \|\lambda_p\|_t^* \|\bar{u}(\lambda_p)\|_s \\ &\leq \|\lambda_p\|_t^* \|\lambda_p\|_s^* \pi_s(\bar{u}) \leq \|\lambda_p\|_t^* \|\lambda_p\|_s^* \|\lambda_1\|_s^* \|\bar{u}(\lambda_1)\|_s \\ &\leq \|\lambda_p\|_t^* \|\lambda_p\|_s^* \|\lambda_1\|_s^* \|\bar{u}(\lambda_1)\|_p \leq \|\lambda_p\|_t^* \|\lambda_p\|_s^* \|\lambda_1\|_s^* \|\lambda_1\|_p^* \pi_p(\bar{u}) \\ &= \|\gamma_p\|_t^{-1} \cdot \|\gamma_p\|_s \|\gamma_1\|_s^{-1} \|\gamma_1\|_p \pi_p(u) \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition avec  $C(t,p) = \|\gamma_p\|_t^{-1} \|\gamma_p\|_s \|\gamma_1\|_s^{-1} \|\gamma_1\|_p$ .

Remarque : Ce qui nécessite l'introduction de  $s > 0$  dans la démonstration précédente, c'est le fait qu'il n'y a pas de théorie des applications  $t$ -radonifiantes, pour  $t < 0$ . Si  $t$  est  $> 0$ , on prend simplement  $s = t$ , et  $C(t,p) = \|\gamma_1\|_t^{-1} \|\gamma_1\|_p$ . En fait, on peut prouver que cela reste vrai aussi pour  $-1 < t \leq 0$  (cf [5]).

Lemme 1 : Soient  $E$  un elcs à dual quasi-normé,  $F$  un espace quasi-normé,  $(u_i)$  un filtre sur  $L(E,F)$  convergeant simplement vers  $u \in L(E,F)$ , et tel que pour tout  $i$ ,  $\pi_p(u_i) \leq C$ ,  $-1 < p \leq \infty$ . On a alors  $\pi_p(u) \leq C$ .

Démonstration : Il suffit de remarquer que si  $(x_1, \dots, x_n) \in E$  :

$$(\sum_k \|u(x_k)\|^p)^{1/p} = \lim_i (\sum_k \|u_i(x_k)\|^p)^{1/p}$$

(même pour  $p < 0$ !)

Théorème 3 ("Conjecture de Pietsch", [1], [5]) : Soient  $t$  et  $p$  deux nombres réels tels que  $-1 < t < p < 1$ . Pour tout espace de Banach  $E$ , tout espace quasi-normé  $F$  et tout opérateur  $u \in \prod_p(E,F)$ , on a :

$\pi_t(u) \leq C(t,p) \pi_p(u)$  ( $C(t,p)$  étant la même que dans la proposition 1)

En particulier :  $\prod_p(E, F) = \prod_t(E, F)$

Démonstration : Il suffit d'après le théorème de Pietsch de démontrer le résultat pour l'opérateur p-sommant "de base" :

$j : C(K) \rightarrow L^p(K, \mu)$ , où  $K$  est un espace compact et  $\mu$  une probabilité sur  $K$ .

Soit  $\rho = (\mathcal{U}_i)_{1 \leq i \leq n}$  un recouvrement ouvert de  $K$ . Nous dirons que  $\rho$  est strict si :

$$\forall i, \quad \mathcal{U}_i - \bigcup_{j \neq i} \mathcal{U}_j \quad \text{est non vide.}$$

Si  $\rho$  est strict on peut choisir pour chaque  $i$  un point  $x_i \in \mathcal{U}_i - \bigcup_{j \neq i} \mathcal{U}_j$ . Soit alors  $(\varphi_i)$  une partition de l'unité subordonnée à  $\rho$ , et définissons un opérateur  $\pi_\rho$  de  $C(K)$  dans lui-même par :

$$\pi_\rho(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \varphi_i$$

Soit  $E_\rho = \pi_\rho(C(K))$ . C'est l'espace des fonctions de la forme  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ . On voit que  $E_\rho$  est isométrique à  $C(n)$ . En effet, puisque  $\sum \varphi_i(x) = 1$  pour tout  $x \in K$  :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right\| \leq \sup |\alpha_i|$$

Mais  $(\sum \alpha_i \varphi_i)(x_j) = \alpha_j$ , donc  $\|\sum \alpha_i \varphi_i\| = \sup |\alpha_i|$

L'opérateur  $j \circ \pi_\rho$  de  $C(K)$  dans  $L^p(K, \mu)$  admet la factorisation :

$$C(K) \xrightarrow{\pi_\rho} E_\rho \simeq C(n) \xrightarrow{i_\rho} C(K) \xrightarrow{j} L^p(K, \mu)$$

D'après la proposition 1 :

$$\pi_t(j \circ \pi_\rho) \leq \pi_t(j \circ i_\rho) \leq C(t, p) \pi_p(j \circ i_\rho) \leq C(t, p) \pi_p(j)$$

Mais il est classique qu'il existe un filtre d'opérateurs de la forme  $\pi_\rho$ , avec  $\rho$  strict, qui tend simplement vers l'identité de  $C(K)$ . Alors  $j$  est limite simple des  $j \circ \pi_\rho$ , qui vérifient  $\pi_t(j \circ \pi_\rho) \leq C(t, \rho) \pi_\rho(j)$  : on conclut par le lemme 1.

Nous allons maintenant indiquer comment on peut généraliser le résultat précédent lorsque  $E'$  n'est plus normé, mais  $r$ -normé,  $0 < r \leq 1$ . Nous désignerons par  $C_r(K)$  l'elcs à dual quasi-normé défini de la façon suivante :

On considère l'ensemble  $B_r$  des éléments de  $M(K)$  de la forme  $\mu = \sum \alpha_i \delta_{x_i}$ , avec  $x_i \in K$  et  $\sum |\alpha_i|^r \leq 1$ . On désigne par  $M_r(K)$  le sous-espace de  $M(K)$  engendré par  $\bar{B}_r$  (adhérence pour la topologie vague). C'est un espace  $r$ -normé par la jauge de  $\bar{B}_r$ . L'espace  $C_r(K)$  est alors l'espace  $C(K)$  muni de la topologie  $\sigma(C(K), M_r(K))$ .

Nous noterons  $C_r(n)$  l'espace  $C_r(K)$  lorsque  $K$  est un ensemble à  $n$  points. Son dual est alors  $r$ -normé par :  $\|\sum \lambda_i \delta_i\| = (\sum |\lambda_i|^r)^{1/r}$ , c'est donc un espace  $\mathcal{J}_r$ .

**Proposition 1bis** : Soient  $t, p$  deux nombres réels tels que  $-1 < t < p < r$ . Il existe une constante  $C_r(t, p)$  telle que pour tout entier  $n$ , tout espace quasi-normé  $F$  et tout opérateur linéaire  $u$  de  $C_r(n)$  dans  $F$ , on ait :

$$\pi_t(u) \leq C_r(t, p) \pi_p(u)$$

**Démonstration** : absolument identique à celle de la proposition 1.

**Théorème 3bis** : Soient  $t$  et  $p$  deux réels tels que  $-1 < t < p < r \leq 1$ . Pour tout elcs  $E$  à dual  $r$ -normé, tout espace quasi-normé  $F$  et tout opérateur  $u \in \prod_p(E, F)$ , on a :

$$\pi_t(u) \leq C_r(t, p) \pi_p(u)$$

**Démonstration** : Soit  $E$  un elcs à dual  $r$ -normé. On peut, sans modifier les applications sommantes, remplacer la quasi-boule unité de  $E'$  par son adhérence dans  $\sigma(E^*, E)$ , ce qui revient à supposer la quasi-boule unité de  $E'$  fermée pour  $\sigma(E', E)$ .

Soient  $F$  un espace quasi-normé et  $u \in \prod_p(E, F)$ . D'après l'exposé II, théorème (4.1)  $u$  admet la factorisation :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{u_1} & C(K) & \xrightarrow{\quad} & L^p(K, \mu) \\ & \searrow & & \searrow & \\ & & S & \xrightarrow{v} & F \end{array}$$

avec  $\|v\| \leq 1$ , et où  ${}^t u_1$  envoie les mesures de Dirac de  $K$  dans  $\pi_p(u).B$  ( $B$  : quasi-boule unité de  $E'$ ). Comme  $B$  est  $r$ -convexe, on a aussi  ${}^t u_1(B_r) \subset \pi_p(u).B$ , et aussi  ${}^t u_1(\bar{B}_r) \subset \pi_p(u).B$  puisque  $B$  est fermée pour  $\sigma(E', E)$ . Finalement  $u_1$  est un morphisme de  $E$  dans  $C_r(K)$  avec  $\|{}^t u_1\| \leq \pi_p(u)$ . Il suffit donc de démontrer le résultat pour l'opérateur :

$$j_r : C_r(K) \rightarrow L^p(K, \mu)$$

Mais en fait, d'après la démonstration du théorème (4.1) de l'exposé II, on peut supposer que  $K$  est un compact stonien (car on peut prendre le spectre d'une algèbre  $L^\infty(X, \nu)$ .)

Soit  $\pi_\rho$  l'opérateur introduit dans la démonstration du théorème 3. Puisque  $K$  est stonien, on peut supposer que les  $(\varphi_i)$  ne prennent que les valeurs 0 ou 1. (Car étant donné un recouvrement ouvert fini  $(\mathcal{U}_i)$ , il existe un recouvrement ouvert fini plus fin  $(\mathcal{V}_j)$  tel que chaque  $\mathcal{V}_j$  soit ouvert et fermé, et les  $\mathcal{V}_j$  deux à deux disjoints.) Considérons l'opérateur  ${}^t \pi_\rho$ . On a :

$$\langle {}^t \pi_\rho(v), f \rangle = \langle v, \pi_\rho(f) \rangle = \sum v(\varphi_i) f(x_i), \text{ donc : } {}^t \pi_\rho(v) = \sum v(\varphi_i) \delta_{x_i}$$

Montrons que  $\pi_\rho$  est un morphisme de  $C_r(K)$  dans lui-même, avec  $\|{}^t \pi_\rho\| \leq 1$ . Soit  $v = \sum_j \lambda_j \delta_{y_j}$ ,  $\sum_j |\lambda_j|^r \leq 1$ .

$${}^t \pi_\rho(v) = \sum_i \left\{ \sum_j \lambda_j \varphi_i(y_j) \right\} \delta_{x_i}, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \|{}^t \pi_\rho(v)\|^r &\leq \sum_i \left| \sum_j \lambda_j \varphi_i(y_j) \right|^r \leq \sum_{i,j} |\lambda_j|^r |\varphi_i(y_j)|^r \\ &= \sum_j |\lambda_j|^r \sum_i \varphi_i(y_j) \leq 1 \quad (\text{car } \varphi_i = 0 \text{ ou } 1) \end{aligned}$$

L'opérateur  $j_r \circ \pi_\rho$  admet alors la factorisation :

$$C_r(K) \xrightarrow{\pi_\rho} E_\rho \simeq C_r(n) \xrightarrow{i_\rho} C_r(K) \xrightarrow{j_r} L^p(K, \mu)$$

où  $\pi_\rho$  et  $i_\rho$  sont des morphismes,  $\|\pi_\rho\| \leq 1$ ,  $\|i_\rho\| \leq 1$ .

On achève comme dans le théorème 3 en appliquant la proposition 1bis et le lemme 1.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Chevet : 2 journées p-radonifiantes, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-1972.
- [2] D. Dacunha-Castelle et J. Bretagnolle : Applications de l'étude de certaines formes linéaires aléatoires, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série t.2 (1969) p. 437-480.
- [3] C. S. Herz : Analyse harmonique à plusieurs variables, Publications du Séminaire de Math. d'Orsay 1964-1965.
- [4] S. Kwapien : On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators. Stud. Math. 38 (1970) p. 193-201.
- [5] B. Maurey : Démonstration d'une conjecture de Pietsch et applications (Preprint, Ecole Polytechnique, Juin 1972).
- [6] A. Pelczynski : A characterisation of Hilbert-Schmidt operators Stud. Math. 28 (1967) p. 355-360.
- [7] Séminaire L. Schwartz : Applications radonifiantes, 1969-1970.