

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. NAHOUM

Fonctions aléatoires linéaires. Théorème de dualité

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 4, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973___A4_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
COURS DE MATHÉMATIQUES
17 RUE DESCARTES - PARIS V
Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

FONCTIONS ALEATOIRES LINEAIRES. THEOREME DE DUALITE
=====

par A. NAHOUM

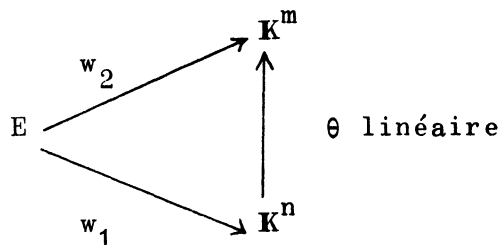
§ 1. FONCTIONS ALEATOIRES LINEAIRES

Définition 1 : Soit E un espace localement convexe séparé (e.l.c.s), à dual quasi-normé ([2]). Une fonction aléatoire linéaire (f.a.l.) sur E' est la donnée d'un espace topologique séparé Ω , d'une probabilité de Radon μ sur Ω et d'une application linéaire $L : E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$ [E e.l.c.s. suffit]. Elle est dite de type p ($0 \leq p \leq +\infty$) si $L(E') \subset L^p(\Omega, \mu)$ et si L est continue : $E'_{||} \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$ [$E'_{||}$ désigne E' muni de la topologie de la quasi-norme ; si $p = 0$, $L^0(\Omega, \mu)$ est muni de la topologie de la convergence en probabilité]. Si $0 < p \leq +\infty$ on note $\|L\|_p^*$ (p -type de L) la quasi-norme d'opérateur.

2) Relation avec les probabilités cylindriques sur E

a) Une f.a.l. sur E' définit de manière canonique une probabilité cylindrique notée λ^L sur E ; on a en outre pour $0 \leq p \leq +\infty$, L de type $p \Leftrightarrow \lambda^L$ de type p ; si $p \neq 0$ $\|L\|_p^* = \|\lambda^L\|_p^*$.

. En effet soit W l'ensemble des applications linéaires continues $E \xrightarrow{w} K^n$, avec n variable [K est le corps des scalaires de E]. Se donner une probabilité cylindrique sur E , c'est se donner pour tout $w \in W$, une probabilité de Radon λ_w sur le K^n correspondant, de sorte que pour tout triangle commutatif comme ci-dessous



on ait $\theta(\lambda_{w_2}) = \lambda_{w_1}$ [vérification facile, à partir de la définition donnée dans [1]].

. Ceci étant, donnons nous L comme au 1), et posons $w \in W$, $w = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ $L(w) = (L(\xi_1), L(\xi_2), \dots, L(\xi_n))$; puis $\lambda_w = L(w)(\mu)$: c'est une probabilité de Radon sur K^n [car $L(w) : \Omega \rightarrow K^n$ est Lusin-mesurable]; si $w_2 = \theta \circ w_1$, avec $\theta \in \mathcal{L}(K^n, K^m)$ comme ci-dessus, on a $\lambda_{w_2} = L(\theta \circ w_1) = \theta \circ L(w_1)(\mu) = \theta(\lambda_{w_1})$ [puisque, L étant linéaire, "respecte les relations linéaires" du genre $w_2 = \theta(w_1)$, entre suites finies de vecteurs de E']; d'où $\lambda^L = (\lambda_w)_{w \in W}$ est une probabilité cylindrique sur E .

. En outre, si $0 < p < +\infty$, on a pour

$$w = \{\xi\}, \quad \|\lambda_\xi\|_p^p = \int_K |t|^p d\lambda_\xi(t) = \int |t|^p dL(\xi)(\mu) = \int |L(\xi)|^p d\mu, \quad \text{d'où}$$

$$\|\lambda^L\|_p^* = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|\lambda_\xi\|_p = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|L(\xi)\|_{L^p(\Omega, \mu)} = \|L\|_p^* \leq +\infty$$

(d'où les propriétés de type dans ce cas; vérifications analogues pour $p = +\infty$, et $p = 0$ (en utilisant alors les J_α introduits dans [1])

b) Inversement, si λ est une probabilité cylindrique sur E , nous allons lui associer une (ou plusieurs) f.a.l. sur E' , L , de sorte que $\lambda = \lambda^L$.

b₁) Si λ de Radon sur E , on peut prendre $(\Omega, \mu) = (E, \lambda)$, et $L(\xi) = \xi \in L^0(E, \lambda)$: on a bien $\lambda_w = w(\lambda) = L(w)(\lambda)$ ($w \in W$), par définition.

b₂) Si λ est cylindrique quelconque, on s'appuie sur un cas particulier du théorème de Prokhorov ([3], page I.4, "1er cas"), disant que si (X_i, τ_{ij}) est un système projectif topologique d'espaces compacts, avec $X = \varprojlim (X_i, \tau_{ij})$, et si (μ_i) est un système projectif correspondant de probabilités de Radon, alors la probabilité de Radon $\mu = \varprojlim \mu_i$ existe toujours, sur X [la condition générale (K, ε) du théorème de Prokhorov est ici automatiquement vérifiée].

. On reprend la définition d'une probabilité cylindrique du 2), en modifiant légèrement les notations ; notons K_w l'espace d'arrivée de w , $w \in W$, et notons $w_1 \zeta w_2$ s'il existe $\theta : K_{w_1} \rightarrow K_{w_2}$ linéaire telle que $w_2 = \theta \circ w_1$: $(K_w)_{w \in W}$ est alors un système projectif d'espaces topologiques, avec pour "transitions" les θ ainsi introduits ; $(\lambda_w)_{w \in W}$ est un système projectif de probabilités de Radon associé.

. Ce qui précède amène à "compactifier la situation" : on remplace K_w par $(K_w)^\vee$, noté $K_w^\vee$, son compactifié de Čech ; les transitions θ par les $\check{\theta}$, leurs extensions naturelles ; et les λ_w par leurs images $\lambda_w^\vee$ par injection canonique $K_w \rightarrow K_w^\vee$. On a un nouveau système projectif d'espaces topologiques -maintenant compacts- avec système projectif de probabilités de Radon associé. D'après le résultat indiqué au début, il existe une probabilité de Radon $\bar{\lambda}$ sur $\Omega = \varprojlim (K_w^\vee)$, telle que pour $\bar{w} : \Omega \rightarrow K_w^\vee$ projection canonique, on ait $\bar{w}(\bar{\lambda}) = \lambda_w^\vee$; notons que $\bar{w}$ est λ -presque partout à valeurs dans K_w , puisque $\lambda_w^\vee$ est portée par K_w , et soit $\bar{\bar{w}}$ la $\bar{\lambda}$ -classe de $\bar{w}$ considérée comme à valeurs dans K_w .

. Alors $L : E' \rightarrow L^0(\Omega, \lambda)$ définie par $L(\xi) = \bar{\xi}$ convient. En effet $L(\xi)(\bar{\lambda}) = \bar{\xi}(\bar{\lambda}) = \lambda_\xi$, $\xi \in E'$; reste à voir que L est linéaire ; fixons $\xi, \eta \in E'$, nous allons montrer que $L(\xi + \eta) - L(\xi) - L(\eta) = 0$ [l'homogénéité se montrerait de même]. Pour cela posons $w_1 = (\xi + \eta, \xi, \eta) \in W$ et définissons $\theta : K_{w_1} \rightarrow K$ linéaire, par $\theta(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha - \beta - \gamma$. Alors

$w_2 : E \rightarrow K = K_{w_2}$ définie par $w_2 = \theta \circ w_1$ est nulle. Donc $\lambda_{w_2} = \theta(\lambda_{w_1}) = \delta$ (mesure de Dirac à l'origine). Donc $\bar{w}_2 = 0$, $\bar{\lambda}$ p.p. Or $\bar{w}_2(\omega) = \bar{\xi} + \bar{\eta}(\omega) - \bar{\xi}(\omega) - \bar{\eta}(\omega)$ pour les $\omega \in \Omega$ tels que les trois termes de cette expression soient dans K lui-même, donc pour $\bar{\lambda}$ presque tous les $\omega \in \Omega$; donc $0 = \bar{w}_2 = \bar{\xi} + \bar{\eta} - \bar{\xi} - \bar{\eta}$ c'est-à-dire $L(\bar{\xi} + \bar{\eta}) - L(\bar{\xi}) - L(\bar{\eta}) = 0$ comme cherché.

. On a donc : L est une f.a.l. et λ^L et λ , ayant les mêmes marges scalaires ($\forall \xi \in E', \lambda_{\xi}^L = \lambda_{\xi}$) sont égales ([1]).

c) Mais L construite au b) n'est pas canonique ; nous dirons que deux f.a.l. sur $E' : L_1 : E' \rightarrow L^0(\Omega_1, \mu_1)$ et $L_2 : E' \rightarrow L^0(\Omega_2, \mu_2)$ sont isonomes (même loi) si elles définissent la même probabilité cylindrique λ sur E ; c'est-à-dire si pour tout $w \in W$ on a $L_1(w)(\mu_1) = L_2(w)(\mu_2)$. Le type est alors le même d'après a) . En résumé,

Théorème 2 : Il y a une bijection entre l'ensemble des probabilités cylindriques (resp de type p) sur E et l'ensemble des classes d'isonomie de f.a.l. (resp de type p) sur E' ($0 \leq p \leq +\infty$).

3) Remarques :

a) si $u : E \rightarrow F$ est linéaire faiblement continue et si $L : E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$ est une f.a.l. sur E' on a $u(\lambda^L) = \lambda^{L \circ u}$

b) On peut définir la transformée de Fourier de la f.a.l. $L : E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$ pour $\mathcal{FL}(\xi) = \int \exp iL(\xi)(\omega) d\mu(\omega)$. Alors $\mathcal{FL} = \mathcal{F}(\lambda^L)$

c) Soit $L : E' \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$ une f.a.l. de type p , et soient $L_i : E' \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$ continues pour $\sigma(E', E)$ de rang fini équicontinues pour la quasi-norme de E' et convergeant simplement vers L . Alors (λ_i^L) est un ensemble de probabilités de Radon sur des sous-espaces de dimension finie de E de type p uniforme, et convergeant cylindriquement vers λ^L : donc λ^L est de type p -approximable. Mais la réciproque est en général inexacte, car si $(\lambda_i) \rightarrow \lambda^L$ on ne peut pas toujours les représenter à partir de $L^0(\Omega, \mu)$. On a ici un exemple des inconvénients de la non canonicité (2) c)).

d) On peut introduire aussi des f.a.l. "abstraites" : si $(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ est un espace de probabilité, soit $L^0(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ l'espace des applications $\Omega \rightarrow K$ mesurables pour les tribus : $\mathcal{Q}$, et tribu borélienne de K . Alors $L : E' \rightarrow L^0(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ linéaire définit encore une probabilité cylindrique sur E , (car pour $w \in W$, $L(w)(P)$ mesure borélienne sur K^n , est automatiquement de Radon). Considérons par exemple $\Omega = E'^*$, complété faible de E , et soit $\mathcal{Q}$ la tribu engendrée par les $w \in W$. On sait que E'^* s'identifie à un espace K^I et dans cette identification $\mathcal{Q}$ devient la tribu

$\mathcal{B}^I$, où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $\mathbf{K}$ (cette tribu est en général plus petite que la tribu borélienne de $\mathbf{K}^I$!). Si λ est une probabilité cylindrique sur E , elle définit un système projectif sur les produits finis $\mathbf{K}^J$, $J \subset I$. D'après un théorème de Kolmogoroff, ce système admet une limite P sur $(\mathbf{K}^I, \mathcal{B}^I) = (E'^*, \mathcal{Q})$. Si nous posons

$$L(\xi) = \xi \in L^0(E'^*, \mathcal{Q}, P) \text{ on a bien } \lambda = \lambda^L.$$

4) f.a.l. et probabilités de Radon

Soit λ une probabilité cylindrique sur E , EVT séparé par son dual, représentée par une f.a.l., L . Y-a-t-il une propriété de L assurant que λ est de Radon sur E ?

a) Remarque : Si $L : E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$, il existe une fonction $\Omega \xrightarrow{\varphi} E'^*$ définie à l'équivalence scalaire μ presque sûre près, scalairement μ mesurable et telle que : $\forall \xi \in E' \quad L(\xi)(\omega) = \langle \xi, \varphi(\omega) \rangle, \mu \text{ p.p.}$
De sorte que $\forall \xi \in E', \lambda_\xi = \xi \circ \varphi(\mu)$. En effet, soit $(\xi_i)_{i \in I}$ une base algébrique de E' ; et pour $i \in I$ définissons de manière quelconque $\mathcal{L}(\xi_i) \in L(\xi_i)$ (c'est une vraie fonction, non une classe); si $\xi = \sum_{i \in I} \alpha_i \xi_i$, somme à support fini, posons, pour $\omega \in \Omega$, $\mathcal{L}(\xi)(\omega) = \sum \alpha_i \mathcal{L}(\xi_i)(\omega)$;
enfin si $w = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) \in E'^n$, posons $\mathcal{L}(w) = (\mathcal{L}(\xi^a))_{1 \leq a \leq n}$. Nous définissons ainsi un système projectif d'applications $\Omega \rightarrow \mathbf{K}^n$, d'où une application $\mathcal{Q} : \Omega \rightarrow \varprojlim (\mathbf{K}^n, w) = E'^*$. Les autres propriétés sont évidentes.

b) Si l'on peut choisir φ dans sa classe de sorte que $\varphi(\Omega) \subset E$, et $\varphi : \Omega \rightarrow E$ μ -mesurable Lusin (pas seulement scalairement) alors $\lambda = \lambda^L$ est de Radon. En effet $\lambda' = \varphi(\mu)$ est de Radon sur E , et $\forall \xi \in E', \lambda'_\xi = \xi(\varphi(\mu)) = \lambda_\xi$ d'après a). On dit alors que L est décomposée par φ .

Exemple : $E = \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$, λ probabilité cylindrique sur $\mathbf{K}^{\mathbb{N}}$. Alors $E = E'^*$, car E est faiblement complet ; et toute $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$ scalairement μ -mesurable est μ -mesurable d'après un résultat classique. Donc φ définie au a) vérifie les conditions de b) et : toute probabilité cylindrique sur $\mathbf{K}^{\mathbb{N}}$ est de Radon (une démonstration directe utilisant le théorème de Prokhorov est facile).

c) Inversement, si λ est de Radon sur E , peut-on choisir φ dans sa classe vérifiant les conditions de b)? On a en fait le résultat suivant :

Théorème 5 : (i) Soit E un EVT séparé par son dual et soit $L: E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$ une f.a.l. sur E' . S'il existe $\varphi: \Omega \rightarrow E$, μ -mesurable et telle que $\forall \xi \in E'$, $\xi \circ \varphi = L(\xi)$ dans $L^0(\Omega, \mu)$, alors $\lambda^L = \varphi(\mu)$ et elle est donc de Radon. De plus λ^L d'ordre $p \Leftrightarrow \varphi \in L^p(\Omega, \mu, E)$; avec si $p \neq 0$, $\|\varphi\| = \|\lambda\|_p$ (si E est à dual quasi-normé)

(ii) la réciproque est vraie si E a ses compacts métrisables - par exemple si E est métrisable, ou souslinien ou dual vague de Fréchet séparable.

(iii) Si φ existe, elle est unique dans $L^0(\Omega, \mu, E)$.

Démontrons (ii) lorsque E est souslinien (par une méthode différente de celle de [3]).

Dans ce cas, il existe une suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E' qui sépare E ([4], proposition II.2). Définissons alors $v: E \rightarrow K^{\mathbb{N}}$ par $v(x) = (\langle x, \xi_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $\lambda_1 = v(\lambda)$; on a $\lambda_1 = \lambda^{L_1}$, où $L_1: K^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{t_v} E' \xrightarrow{L} L^0(\Omega, \mu)$ est décomposée par $\varphi_1: \Omega \rightarrow K^{\mathbb{N}}$, $\varphi(\omega) = (L(\xi_n)(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$. L'application v est injective continue, donc définit un isomorphisme borélien de E sur $v(E)$ (cf. [4]); posons $\varphi = [\overset{-1}{v}|_{v(E)}] \varphi_1$: elle est μ -mesurable, et $\varphi(\mu) = \overset{-1}{v}(\lambda_1) = \lambda$; on a $\overset{-1}{v}|_{v(E)} \circ \varphi_1(\omega) = x$ tel que $v(x) = (L(\xi_n)(\omega))$ donc $\langle x, \xi_n \rangle = L(\xi_n)(\omega)$ pour tout n , ce qui signifie $\xi_n \circ \varphi(\omega) = L(\xi_n)(\omega)$ pour tout n , p.p. Mais (ξ_n) est totale dans $\sigma(E', E)$ puisqu'elle sépare E , donc dans $\tau(E', E)$; et $L: \tau(E', E) \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$ est continue (cela veut exactement dire que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $K \subset E$ faiblement compact convexe tel que $\xi \in K^0 \Rightarrow \lambda_\xi(\xi K) > 1 - \varepsilon$ - ce qui est vrai car λ est de Radon -; donc on a en fait par densité: $\xi \circ \varphi(\omega) = L(\xi)(\omega)$, p.p. pour tout $\xi \in E'$. Donc φ décompose L , cqfd.

(iii) résulte de ce que, si φ_1 et φ_2 décomposent λ , on a: $\forall \xi \in E'$, $\xi \circ \varphi_1(\omega) = \xi \circ \varphi_2(\omega) = L(\xi)(\omega)$ μ -p.p. et que deux fonctions μ -mesurables, égales scalairement μ -p.p sont en fait égales μ -p.p. (voir [3], fin de la page XIII-1, mais c'est facile).

§ 2. THEOREME DE DUALITE1) Cotype

a) Définition 1 : Soit E un e.l.c.s. à dual E' quasi normé, par $\|\cdot\|$. Soit λ une probabilité cylindrique sur E . λ est dite de cotype p ($p < 0$ ou $0 < p < +\infty$) si la convergence vers zéro de $\|\lambda_\xi\|_p = [\int_{\mathbb{R}} t^p d\lambda_\xi(t)]^{1/p}$ entraîne $\|\xi\| \rightarrow 0$. Adaptation évidente si $p = +\infty$. On pose alors $\|\lambda\|_p^* = \sup_{\|\xi\| \geq 1} \frac{1}{\|\lambda_\xi\|_p}$ ($p < 0$ ou $0 < p \leq +\infty$) qu'on appelle le p -cotype de λ ; de sorte que

$$(1) \quad \forall \xi \in E', \quad \|\xi\| \leq \|\lambda\|_p^* \|\xi\|_p$$

b) λ est dite de cotype 0 s'il existe $0 < \alpha < 1$, tel que λ soit de cotype J_α (cf. [1]) au sens suivant : la convergence vers 0 de $J_\alpha(\lambda_\xi) = \inf \{R \in \bar{\mathbb{R}} : \lambda_\xi[R, +\infty] \leq \alpha\}$ entraîne $\|\xi\| \rightarrow 0$. On ne définit pas le 0-cotype de λ .

2) Remarque :

a) Noter la dissymétrie des définitions de type 0 (pour tout $\alpha \dots$) et cotype 0 (il existe $\alpha \dots$)

b) le type exprime la concentration uniforme des λ_ξ , $\|\xi\| \leq 1$. Le cotype la dispersion uniforme des λ_ξ , $\|\xi\| \geq 1$; par exemple s'il existe $\xi \neq 0$ ($\|\xi\| > 1$ si l'on veut) avec $\lambda_\xi = \delta$, alors λ n'est pas de cotype p .

c) Si $E' \xrightarrow{L} L^0(\Omega, \mu)$ est une f.a.l. qui représente λ , λ est de cotype $p \Leftrightarrow$ la convergence vers 0 de $L(\xi)$ dans $L^p(\Omega, \mu)$ entraîne $\|\xi\| \rightarrow 0$

d) λ de cotype $p \Rightarrow \lambda$ de cotype q , pour $q \geq p$.

3) Théorème de dualité.

a) Hypothèses : Dans ce qui suit on se donne un réel p avec $p \neq 0$ et $p \neq \infty$, un e.l.c.s. E à dual quasi normé, la topologie de la quasi norme $\|\cdot\|$ sur E' étant plus fine que $\sigma(E', E)$, les quasi-boules étant $\sigma(E', E)$ bornées et fermées; un espace G bitopologique (cf. [2]), la 1ère topologie (notée $\mathcal{G}$ dans [2]) étant $\sigma(G, G')$ supposée séparée, et la quasi-norme pouvant prendre des valeurs infinies; enfin on se donne $u : \sigma(E, E') \rightarrow \sigma(G, G')$ linéaire et continue.

b) Remarque à propos de la mesure de Pietsch ([2]).

s'il existe une mesure de Radon μ sur $\sigma(E', E)$ (et non seulement sur la

quasi-boule unité) et C fini tels que $\forall x \in E, \|ux\| \leq C(\int |\langle x, \xi \rangle|^p d\mu(\xi))^{1/p}$
 peut-on en déduire que u est p -sommante ?

La réponse n'est pas sûre, car $\xi \mapsto \langle x, \xi \rangle$ n'est pas bornée sur $\sigma(E', E)$
 (alors qu'elle l'était sur la quasi-boule unité). Si nous introduisons
 la fonction bornée $\xi \mapsto \frac{\langle x, \xi \rangle}{\|\xi\|} = v(x)(\xi)$ nous obtenons

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{\sigma(E', E)} |v(x)(\xi)|^p \cdot \|\xi\|^p d\mu(\xi) \right)^{1/p} = C \left(\int |v(x)(\xi)|^p dv'(\xi) \right)^{1/p}$$

mais $dv'(\xi) = \|\xi\|^p \cdot d\mu(\xi)$ n'est plus une probabilité ; pourtant si nous
 supposons que $\|\mu\|_p = \left[\int \|\xi\|^p d\mu(\xi) \right]^{1/p} < +\infty$ (c'est-à-dire que μ est d'ordre
 p) alors $dv(\xi) = \left(\frac{\|\xi\|}{\|\mu\|_p} \right)^p d\mu(\xi)$ est une probabilité, (si $\|\mu\|_p = 0$,

l'hypothèse entraîne : $\forall x \in E, \|ux\| = 0$, et u est p -sommante), l'on a

$$\|ux\| \leq C \cdot \|\mu\|_p \left(\int_{\sigma(E', E)} |v(x)(\xi)|^p dv(\xi) \right)^{1/p}$$

et l'on retombe sur la situation décrite en [2] : $v(x)(\cdot)$ mesurable bornée
 sur $(\sigma(E', E), \nu)$ -espace topologique muni d'une probabilité de Radon et
 inégalité convenable : on peut donc dire que u est p -sommante, avec
 d'ailleurs $\pi_p(u) \leq C \|\mu\|_p$.

c) On se donne maintenant une probabilité de Radon μ sur $\sigma(E', E)$, d'ordre
 p , et l'on cherche une condition assurant qu'elle est mesure de Pietsch
 relative à l'application u . On va supposer que p est l'image par ${}^t u$ d'une
 certaine probabilité cylindrique ρ sur $\sigma(G', G)$; on cherche donc une
 inégalité du genre $\|ux\| \leq C \cdot \left[\int |\langle x, \xi \rangle|^p d\mu(\xi) \right]^{1/p}$. Or

$\left[\int |\langle x, \xi \rangle|^p d\mu(\xi) \right]^{1/p} = \left[\int |t|^p d\mu_x(t) \right]^{1/p}$ car μ est une mesure cylin-
 drique ; c'est l'image de ρ donc : $\dots = \left[\int |t|^p d\rho_{u(x)}(t) \right]^{1/p} = \|\rho_{u(x)}\|_p$;
 on veut donc minorer $\|\rho_{u(x)}\|_p$: il faut une hypothèse du genre cotype,
 et en effet si ρ est de cotype p on a d'après (1) page 6

$\|\rho\|_p \cdot \|\rho_{u(x)}\|_p \geq \|ux\|$: on a l'inégalité cherchée avec $C = \|\rho\|_p^*$, et
 d'après b) u est p -sommante avec $\pi_p(u) \leq \|\rho\|_p^* \cdot \|\mu\|_p$.

Résumons :

Théorème 4 : Les hypothèses étant celles du a), s'il existe une probabi-
 lité cylindrique ρ sur $\sigma(G', G)$ de cotype p , dont l'image par ${}^t u$ est une
 probabilité de Radon sur $\sigma(E', E)$ d'ordre p (relatif à la quasi-norme
 donnée sur E') alors u est p -sommante de $\sigma(E, E')$ dans G . On a en fait

$$\pi_p(u) \leq \|\rho\|_p^* \|\mu\|_p \quad (\mu = t_u(\rho))$$

1er cas particulier : E et G sont des quasi-Banach. Les quasi-normes utiles sont celles de G et la norme de dual de E'.

2ème cas particulier : $E = \sigma(F', F)$ avec F quasi-Banach, la quasi-norme sur E' est celle de F ; $G = \sigma(H', H)$ avec H quasi-Banach; la norme sur G est la norme de dual de H'. Dans ce cas, on peut remplacer l'hypothèse " μ de Radon sur $\sigma(E', E) = \sigma(F, F')$ " par " μ de Radon sur $\sigma(F'', F')$ ", l'ordre étant mesuré par la quasi-norme de F'', (Cf. [2], n°(1-8)) sans changer la conclusion. En effet l'application directe du théorème donne u p-sommante de $\sigma(F', F'')$ dans G, c'est-à-dire $\forall x_1, \dots, x_n \in F'$

$$[\sum \|ux_i\|^p]^{1/p} \leq \pi_p(u) \sup_{\substack{\xi'' \in F'' \\ \|\xi''\| \leq 1}} (\sum |\langle x_i, \xi'' \rangle|^p)^{1/p} = \pi_p(u) \sup_{\substack{\xi \in F \\ \|\xi\| \leq 1}} (\sum |\langle x_i, \xi \rangle|^p)^{1/p}$$

par densité au sens de $\sigma(F'', F')$ de la quasi-boule unité fermée de F dans celle de F''. D'où p-sommante de $\sigma(F', F)$ dans G, comme annoncé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Séminaire Maurey-Schwartz, 1972-1973, Exposé N° I.
- [2] Séminaire Maurey-Schwartz, 1972-1973, Exposé N° II.
- [3] Séminaire L. Schwartz, 1969-1970 : Applications radonifiantes
Ecole Polytechnique, Paris.
- [4] L. Schwartz : Mesures de Radon sur un espace topologique,
Tata Institute (Bombay).