

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. SCHWARTZ

Les applications p -sommantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 2, p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973__A2_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - 75230 PARIS CEDEX 05

Téléphone : 633-25-79

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

LES APPLICATIONS p -SOMMANTES

par L. SCHWARTZ

Exposé N° II

8 Novembre 1972

§ 1. DEFINITIONS SUR DES evt

(1.1) On appelle espace vectoriel E à dual quasi-normé la donnée d'un couple (E, E') d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, en dualité séparante, et d'une quasi-norme $\| \cdot \|$ sur E' pour laquelle la quasi-boule unité est $\sigma(E', E)$ bornée (ce qui revient à dire que l'injection de $(E', \| \cdot \|)$ dans $\sigma(E', E)$, est continue). On appellera E_N la topologie $(E, \| \cdot \|_N)$, normée sur E , ayant pour boule unité (convexe équilibrée $\sigma(E, E')$ -fermée) la polaire de la quasi-boule unité de E' ; c'est la topologie induite par celle du dual fort E'' (espace de Banach) de $(E', \| \cdot \|)$, elle est donc plus fine que $\sigma(E, E')$.

(1.2) On appelle espace bitopologique G la donnée d'un espace vectoriel topologique $(G, \mathcal{C}) = G$, séparé par son dual (mais non nécessairement localement convexe) et d'une "quasi-norme $\| \cdot \|$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ ", dont les quasi-boules sont bornées et fermées pour la topologie donnée $\mathcal{C}$ de G . Si $\mathcal{Q}$ est le sous-espace vectoriel des éléments de quasi-norme finie, $(\mathcal{Q}, \| \cdot \|) \rightarrow (G, \mathcal{C})$ est donc une injection continue. Mais en général, $(\mathcal{Q}, \| \cdot \|)$ a une topologie strictement plus fine que la topologie induite par $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{Q}$. Il importe donc de ne pas confondre ces deux topologies (surtout si $\mathcal{Q}$ est G lui-même). D'où le nom de bitopologique. Nous appellerons $\mathcal{Q}_N$ l'espace $\mathcal{Q}$ muni de la quasi-norme $\| \cdot \|$, alors que $\mathcal{Q}$ et G seront toujours considérés comme muni de la topologie $\mathcal{C}$. Les exemples (1.7) et (1.8) seront particulièrement démonstratifs des différences entre $G_{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{Q}_N$.

Ces définitions sont légèrement différentes de celles de l'exposé I. Voici des exemples fondamentaux :

(1.3) Un Banach E définit un espace à dual quasi-normé, avec pour E' son dual, muni de la norme duale $\| \cdot \|$. Alors $\| \cdot \|_N$ est la norme initiale de E .

(1.3bis) Il en est de même si E est seulement quasi-normé, mais alors E_N est différent de E muni de sa norme initiale. Ainsi :

(1.4) Prenons $(E, E') = (l^s, l^\infty)$, $0 < s < 1$, avec $\| \cdot \| = \| \cdot \|_\infty$ sur E' , c'est un espace à dual quasi-normé (et même à dual normé). ¹Alors

$$\| \cdot \|_N = \| \cdot \|_1 \text{ sur } l^s.$$

(1.5) Soit F un espace vectoriel quasi-normé séparé par son dual F' . Alors $E = \sigma(F', F)$, $E' = F$, $\| \cdot \| = \| \cdot \|_F$ sur E' , est un espace vectoriel à dual quasi-normé. Ici E_N est le dual fort F' de F , espace de Banach.

(1.6) Un Banach G est un espace bitopologique, avec sa norme.

(1.7) Soit H un Banach. Alors $G = \sigma(H', H)$, avec pour norme la norme duale, est un espace bitopologique.

(1.8) Soit G un quasi-Banach séparé par son dual. Son dual fort G' est un Banach, et aussi son bidual G'' , et $G \hookrightarrow G''$ est une injection continue. Prenons $E = \sigma(G'', G')$; appelons quasi-boule unité B'' de E l'adhérence, dans $\sigma(G'', G')$, de la quasi-boule unité B de G ; elle est $\sigma(G'', G')$ -compacte. Elle définit sur $\sigma(G'', G')$ une quasi-norme à valeurs dans $[0, +\infty]$, où $\mathcal{G}$, sous-espace vectoriel des éléments de quasi-norme finie, est le sous-espace vectoriel engendré par B'' . Alors $\sigma(G'', G')$, muni de la quasi-norme jauge de B'' , est un espace bitopologique, à quasi-boules compactes pour sa topologie $\sigma(G'', G')$.

(1.9) Soit E un espace vectoriel à dual quasi-normé. Soit E^* son dual algébrique. Considérons, dans $\sigma(E^*, E)$, l'adhérence B^* de la quasi-boule unité B' de E' . Elle définit, sur E^* , une quasi-norme à valeurs dans $[0, +\infty]$, dont les quasi-boules sont compactes par $\sigma(E^*, E)$; on fait ainsi de $\sigma(E^*, E)$ un espace vectoriel bitopologique à quasi-boules compactes. De même, si G est un espace bitopologique, le couple $((\mathcal{G}_N)', \mathcal{G}_N)$ est un espace $(\mathcal{G}_N)'$ à dual quasi-normé.

(1.10) Un morphisme d'espaces à duals quasi-normés, $E_1 \xrightarrow{v} E$, est une application linéaire v , dont la transposée ${}^t v : E' \rightarrow E_1^*$, envoie la quasi-boule unité de E' dans l'adhérence RB_1^* , dans $\sigma(E_1^*, E_1)$, d'une boule RB_1' de rayon R de E_1' . Le plus petit R possible s'appelle quasi-norme $\| {}^t v \|$ de ${}^t v$.

(1.11) Un morphisme d'espaces bitopologiques, $G \xrightarrow{v} G_1$, est une application linéaire, dont la restriction à $\mathcal{G}_1$ est continue de $(\mathcal{G}_1)_N$ dans $\mathcal{G}_N$; sa quasi-norme $\| v \|$ est sa quasi-norme dans $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1)_N; \mathcal{G}_N$.

§ 2. QUASI-NORMES DANS DES ESPACES DE SUITES

(2.1) Soit G un espace vectoriel bitopologique. Soit $0 < p \leq +\infty$, et soit $g = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G . On posera

$$\|g\|_p = (\sum \|g_n\|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p < +\infty,$$

$$\|g\|_{+\infty} = \sup_n \|g_n\|.$$

On dira que la suite g est l^p ou que $g \in l^p(G)$, si $\|g\|_p < +\infty$; cela exige que g soit dans le sous-espace vectoriel $\mathcal{Q}$ des éléments de quasi-norme finie de G . Alors $l^p(G) = l^p(\mathcal{Q})$ est un espace vectoriel, sur lequel $\|\cdot\|_p$ est une quasi-norme, (si, sur $\mathcal{Q}$, $\|\cdot\|$ est une r -quasi-norme, $r \leq 1$, $\|\cdot\|_p$ est une $\text{Min}(p, r)$ -quasi-norme). Si $\mathcal{Q}_N$ est complet, on montre (Fischer-Riesz) que $l^p(G)$ est complet.

(2.1') On aura aussi besoin de considérer des valeurs de p finies ≤ 0 ♦. Mais alors nous ne considérerons que des suites finies. Soit $g = (g_n)_{0 \leq n \leq N}$ une suite de $N + 1$ éléments de G . On posera

$$\|g\|_p = \left(\sum_{0 \leq n \leq N} \|g_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1 / \left(\sum_{0 \leq n \leq N} \frac{1}{\|g_n\|^{\bar{p}}} \right)^{\frac{1}{\bar{p}}}$$

$$\text{si } p < 0, \quad \bar{p} = |p|;$$

$$\|g\|_0 = \exp \left(\sum_{0 \leq n \leq N} \frac{\log \|g_n\|}{N+1} \right) = \left(\prod_{0 \leq n \leq N} \|g_n\| \right)^{\frac{1}{N+1}}$$

$\|g\|_0$ n'est autre que la moyenne géométrique des éléments de la suite finie g . Pour $p \leq 0$, si l'un des g_n est nul, $\|g\|_p = 0$; il n'est donc pas possible d'identifier une suite de $N + 1$ éléments à une suite de $N + k + 1$ éléments dont les k derniers sont nuls. On a toujours $\|g\|_p < +\infty$.

Si l'un des g_n est dans $G - \mathcal{Q}$, $\|g_n\| = +\infty$ donc $\frac{1}{\|g_n\|^{\bar{p}}} = 0$, et il ne compte pas dans le calcul de $\|g\|_p$. Remarquons que $p \mapsto \|g\|_p$ (qu'on peut calculer, pour $p \geq 0$, en identifiant g à une suite infinie dont tous les éléments de rang $\geq N + 1$ sont nuls) est continue, sauf en géné-

♦ Comme le montrera la proposition (5.7), seules les valeurs > -1 seront en fait utiles.

ral au point $p = 0$.

[Supposons d'abord tous les $g_n \neq 0$. Posons $A(p) = \sum_{0 \leq n \leq N} \|g_n\|^p$, pour $p \neq 0$, $A(0) = N + 1$. La fonction A est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $A'(0) = \sum_{0 \leq n \leq N} \log \|g_n\|$. Lorsque $p \neq 0$ tend vers 0,

$$\begin{aligned} \|g\|_p &= (A(p))^{\frac{1}{p}} = (N+1)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{A(p)}{A(0)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (N+1)^{\frac{1}{p}} \exp \left(\frac{\log A(p) - \log A(0)}{p} \right) \\ &\sim (N+1)^{\frac{1}{p}} \exp \left(\frac{A'(0)}{A(0)} \right) = (N+1)^{\frac{1}{p}} \|g\|_0; \end{aligned}$$

donc, sauf dans le cas d'une suite à 1 élément ($N = 0$), $\|g\|_p$ tend vers $+\infty$ quand $p \neq 0$ tend vers 0.

Si maintenant la suite g a k éléments $\neq 0$, $0 \leq k \leq N + 1$, $\|g\|_p \sim k^{\frac{1}{p}} \left(\prod'_{0 \leq n \leq N} \|g_n\| \right)^{1/k}$, où $\prod'$ est le produit calculé sur les $g_n \neq 0$, et $\|g\|_0 = 0$ si $k < N + 1$].

(2.2) Soit E un espace vectoriel à dual quasi-normé. Soit d'abord $p > 0$, et soit $e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie d'éléments de E (une suite finie peut alors être identifiée à une suite infinie à nombre fini de termes $\neq 0$). On posera

$$\|e\|_p^* = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } p < +\infty;$$

$$\|e\|_{+\infty}^* = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, \xi \rangle| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|e_n\|_{E_N} \quad (\text{de sorte que, dans le cas}$$

de l'exemple (1.3) = (1.6) où $\| \cdot \|_{E_N} = \| \cdot \|_E$, $\|e\|_{+\infty}^* = \|e\|_{+\infty}$).

On dira que e est scalairement l^p , $e \in \mathcal{S}l^p(E)$, si $\|e\|_p^* < +\infty$. Alors $\mathcal{S}l^p(E)$ est un espace vectoriel, sur lequel $\| \cdot \|_p^*$ est une quasi-norme (très exactement une $\text{Min}(p, 1)$ -quasi-norme). D'ailleurs $\xi \mapsto (\langle e_n, \xi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une application linéaire continue de E' dans l^p , et $\|e\|_p^*$ est la quasi-norme de cette application; de sorte que $\mathcal{S}l^p(E) \subset \mathcal{L}(E', l^p)$, et que $\| \cdot \|_p^*$ est la quasi-norme induite sur $\mathcal{S}l^p(E)$ par $\mathcal{L}(E'; l^p)$.

On voit facilement que, si E_N est complet, $\mathcal{S}l^p(E)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E'; l^p)$, donc complet, c'est un quasi-Banach.

(2.2') Maintenant soit p fini ≤ 0 , et soit $e = (e_n)_{0 \leq n \leq N}$ une suite finie d'éléments de E . On posera

$$\begin{aligned} \|e\|_p^* &= \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left(\sum_{0 \leq n \leq N} |\langle e_n, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 1 / \inf_{\|\xi\| \leq 1} \left(\sum_{0 \leq n \leq N} \frac{1}{|\langle e_n, \xi \rangle|^{\bar{p}}} \right)^{\frac{1}{\bar{p}}} \end{aligned}$$

pour $p < 0$, $\bar{p} = |p|$;

$$\|e\|_0^* = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left(\prod_{0 \leq n \leq N} |\langle e_n, \xi \rangle| \right)^{\frac{1}{N+1}}.$$

Si l'un des e_n est nul, $\|e\|_p^* = 0$. Si au contraire tous les e_n sont $\neq 0$, comme E n'est pas réunion finie d'hyperplans, il existe au moins un ξ tel que tous les $\langle e_n, \xi \rangle$ soient $\neq 0$; donc $\|e\|_p^* \neq 0$.

§ 3. LES APPLICATIONS p-SOMMANTES

(3.1) Soient E un espace vectoriel à dual quasi-normé, G un espace vectoriel bitopologique, u une application linéaire de E dans G . On dit que u est p -sommante, $-\infty < p \leq +\infty$, s'il existe une constante M finie ≥ 0 telle que, pour toute suite finie e d'éléments de E ,

$$(3.2) \quad \|u(e)\|_p \leq M \|e\|_p^*.$$

Pour $p > 0$, cette inégalité reste alors vraie pour une suite infinie e , par passage à la limite. La borne inférieure des M pour lesquels l'inégalité ci-dessus est vraie s'appelle quasi-norme p -sommante de u , et se note $\pi_p(u)$. Pour $p > 0$, l'ensemble $\prod_p(E; G)$ des applications p -sommantes de E dans G est un espace vectoriel, sur lequel π_p est une quasi-norme (une $\text{Min}(r, p)$ -quasi-norme, si $\|\cdot\|$ est une r -quasi-norme sur le sous-espace vectoriel G_N des éléments de G de quasi-norme finie).

Pour $p < 0$, et pour une suite finie $(e_n)_{0 \leq n \leq N}$, l'inégalité (3.2) s'écrit :

$$(3.3) \quad \sum_{0 \leq n \leq N} \frac{1}{\|u(e_n)\|^{\bar{p}}} \geq \frac{1}{(\pi_p(u))^{\bar{p}}} \inf_{\|\xi\| \leq 1} \sum_{0 \leq n \leq N} \frac{1}{|\langle e_n, \xi \rangle|^{\bar{p}}}$$

pour $p \neq 0$, $\bar{p} = |p|$;

$$\prod_{0 \leq n \leq N} \|u(e_n)\| \leq (\pi_0(u))^{N+1} \sup_{\|\xi\| \leq 1} \prod_{0 \leq n \leq N} \langle e_n, \xi \rangle.$$

Quel que soit p , on voit que l'image par u de la boule-unité de E_N est contenue dans la quasi-boule de rayon $\pi_p(u)$ de G_N ; il suffit, pour le voir, d'appliquer (3.2) à une suite e à un seul élément. Donc u est linéaire continue de E_N dans G_N ; et $\pi_p(u)$ est au moins égal à la quasi-norme de u dans $\mathfrak{L}(E_N; G_N)$. Pour $p = +\infty$, il est équivalent de dire que u est ∞ -sommante ou qu'elle est continue de E_N dans G_N , et

$$\prod_{\infty}(E; G) = \mathfrak{L}(E_N; G_N), \pi_{\infty}(u) = \|u\|_{\mathfrak{L}(E_N; G_N)}.$$

Proposition (3.4) : Soit $p > 0$. Pour que u , application linéaire continue de E_N dans G_N , soit p -sommante, il faut et il suffit que l'image par u de toute suite e scalairement l^p de E soit une suite l^p de G .

Démonstration : Il est évident que c'est nécessaire, montrons que c'est suffisant. Supposons que u ne soit pas p -sommante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une suite finie $e^{(n)}$, à N_n éléments, telle que $\|e^{(n)}\|_p^* \leq \frac{1}{2^n}$, et $\|ue^{(n)}\|_p \geq 2^n$. Appelons e la suite infinie obtenue en mettant les suites $e^{(n)}$ les unes à la suite des autres; on aura $\|e\|_p^* < +\infty$, $\|u(e)\|_p = +\infty$, ce qui est contradictoire.

Proposition (3.4bis) : Supposons E_N et G_N complets, et soit u une application linéaire continue de E_N dans G_N . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) u est 1-sommante;
- 2) u transforme toute suite scalairement l^1 de E en une suite l^1 de G ;
- 3) u transforme toute suite sommable de E_N en une suite l^1 de G .

Démonstration : L'implication $1 \Rightarrow 2$ résulte de la proposition précédente. D'autre part, toute suite sommable de E_N est scalairement l^1 , donc $2 \Rightarrow 3$. Supposons 3 réalisée. L'espace $S(E_N)$ des suites sommables de E_N est un

sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{S}^1(E)$; comme $\mathcal{S}^1(E)$ est complet, $S(E_N)$ est complet pour la topologie induite.

Alors u définit une application linéaire $\tilde{u}$ de $S(E_N)$ métrique complet dans $l^1(G_N)$ métrique complet; elle est trivialement continue quand on munit $l^1(G_N)$ de la topologie moins fine induite par G_N^N , puisque u est continue de E_N dans G_N ; donc son graphe est fermée, donc $\tilde{u}$ est continue. On en tire aussitôt l'existence d'une constante M telle que l'on ait (3.2) avec $p = 1$, donc u est 1-sommante, $3 \Rightarrow 1$, cqfd.

Proposition (3.5) : Soit u une application p -sommante de E dans G . Soit v un morphisme d'espaces à dual quasi-normés de E_1 dans E , w un morphisme d'espaces bitopologiques de G dans G_1 . Alors $w \circ u \circ v$ est p -sommante de E_1 dans G_1 , et

$$(3.6) \quad \pi_p(w \circ u \circ v) \leq \|w\| \pi_p(u) \|v\|.$$

Démonstration : Soit e_1 une suite finie d'éléments de E_1 . Alors, en supposant $p > 0$:

$$\begin{aligned} \|w \circ u \circ v(e_1)\|_p &\leq \|w\| \|u \circ v(e_1)\|_p \leq \|w\| \pi_p(u) \|v(e_1)\|_p^* \leq \|w\| \pi_p(u) \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|\langle v e_1, \xi \rangle\|_p \\ &= \|w\| \pi_p(u) \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|\langle e_1, {}^t_v \xi \rangle\|_p \leq \|w\| \pi_p(u) \sup_{\substack{\|\eta\| \leq \|{}^t_v\| \\ \eta_1 \in E_1^*}} \|\langle e_1, \eta_1 \rangle\|_p \\ &[\text{la norme } \|\eta_1\| \text{ est ici prise dans l'espace bitopologique } \sigma(E_1^*, E_1) \text{ décrit à (1.9)}] \leq \|w\| \pi_p(u) \|{}^t_v\| \sup_{\substack{\|\eta_1\| \leq 1 \\ \eta_1 \in E_1^*}} \|\langle e_1, \eta_1 \rangle\|_p \\ &= \|w\| \pi_p(u) \|{}^t_v\| \|e_1\|_p^*, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. Nous laissons à l'éventuel lecteur le soin de vérifier que tout se passe de la même manière pour $p < 0$ et $p = 0$; c'est dû à ce que les fonctions $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_p^*$ sont toujours homogènes de degré 1, pour la multiplication par les scalaires.

§ 4. INEGALITES ET FACTORISATION DE PIETSCH.

Théorème (4.1) : Soient E un espace à dual quasi-normé, G un espace bitopologique, u une application linéaire de E dans G. Soit $p < +\infty$. Pour que u soit p-sommante, il faut et il suffit qu'il existe une application linéaire v de E dans un $L^\infty(Z, \cdot)$, où Z est un ensemble muni d'une tribu et ν une probabilité sur Z, telle que la transposée ${}^t v : (L^\infty(Z, \nu))' \rightarrow E^*$ envoie les caractères de l'algèbre $L^\infty(Z, \nu)$ dans une quasi-boule RB^* , où B^* est l'adhérence dans $\sigma(E^*, E)$ de la quasi-boule unité B' de E' ♦, et que l'on ait :

$$(4.2) \quad \|u(x)\| \leq \|v(x)\|_{L^p(Z, \nu)} \quad \text{si } p > 0,$$

$$(4.3) \quad \|u(x)\| \leq \left(\int_Z |(v(x))(z)|^p d\nu(z) \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p < 0 \quad \bullet\bullet$$

♦ v n'est pas nécessairement un morphisme d'espaces à duals quasi-normés de E dans L^∞ , car la quasi-boule RB^* n'étant pas en général convexe, ${}^t v$ n'envoie pas nécessairement toute la boule unité de L^∞ dans RB^* . Ce sera un morphisme si B' est convexe, et on aura alors $R = \|{}^t v\|$. Si E est un Banach, exemple (1.3), v sera simplement une application linéaire continue, $R = \|{}^t v\| = \|v\|$. Ceci montre que l'énoncé donné dans la prop. (3.6) page 200 de Schwartz [1] est inexact : l'application ${}^t v$ définie après (3.7) a seulement la propriété indiquée ici relative aux caractères de L^∞ , points extrémaux de la boule-unité, mais non la propriété indiquée pour toute la boule unité de L^∞ . Le (4.12.1) de Schwartz [1] page 222 doit être modifié de la même manière

♦♦ C'est la même chose, si ce n'est qu'on ne peut pas parler de l'espace L^p pour $p \leq 0$

$$(4.4) \quad \|u(x)\| \leq \exp \left(\int_Z \log |(v(x))(z)| dv(z) \right) \quad \text{si } p = 0.$$

Dans ce cas, $\pi_p(u) \leq R$. En outre, il est possible de choisir pour Z l'adhérence B^{*p} dans $\sigma(E^*, E)$ de la quasi-boule-unité B' de E' , de la munir de la topologie $\sigma(B^*, E)$ qui la rend compacte (voir (1.9)), de prendre pour ν une probabilité de Radon, et de prendre pour ν l'application de E dans $L^\infty(B^*, \nu)$ qui, à $x \in E$, fait correspondre $\nu(x)$, classe dans $L^\infty(B^*, \nu)$ de la fonction continue sur $B^* : \xi \mapsto \pi_p(u) \langle x, \xi \rangle$.

Démonstration :

1) Supposons cette condition réalisée, et montrons que u est p -sommaute, avec $\pi_p(u) \leq R$.

Tout d'abord $L^\infty(Z, \nu)$ est une C^* -algèbre de Banach commutative. Soit $\hat{Z}$ son spectre, compact. Alors on sait qu'il existe un isomorphisme de C^* -algèbres de Banach commutatives, $f \mapsto \hat{f}$, de $L^\infty(Z, \nu)$ sur $C(\hat{Z})$, espace des fonctions continues sur $\hat{Z}$. Soit $\hat{\nu}$ la probabilité de Radon sur $\hat{Z}$ définie par $\hat{\nu}(\hat{f}) = \nu(f)$; elle a pour support $\hat{Z}$ tout entier.

Alors on sait aussi que $C(\hat{Z}) \rightarrow L^\infty(\hat{Z}, \hat{\nu})$ est un isomorphisme (toute fonction sur $\hat{Z}$, $\hat{\nu}$ -mesurable et bornée, est $\hat{\nu}$ -presque partout égale à une fonction continue unique). Si alors f est une ν -classe de fonctions ν -mesurables ≥ 0 sur Z , elle est la limite croissante des $\text{Inf}(f, n)$, $n \in \mathbb{N}$, donc on peut lui faire correspondre une fonction $\hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Inf}(f, n))^\wedge$, fonction $\hat{\nu}$ -mesurable ≥ 0 sur $\hat{Z}$, donc une $\hat{\nu}$ -classe $\hat{f}$ de fonctions $\hat{\nu}$ -mesurables ≥ 0 , avec conservation des intégrales $\int_Z^* f d\nu = \int_{\hat{Z}}^* \hat{f} d\hat{\nu}$; d'où le même résultat pour les ν -classes de fonctions réelles bornées supérieurement ou bornées inférieurement. Il est donc possible de remplacer Z, ν par $\hat{Z}, \hat{\nu}$ dans la propriété supposée, en remplaçant $\nu(x)$ par $\hat{\nu}(x) = (\nu(x))^\wedge$.

Nous conserverons Z, ν , mais supposerons que Z est un espace compact, ν une probabilité de Radon sur Z , et que ν est une application de E dans le Banach $C(Z)$, avec l'inégalité (4.2) ou (4.3) ou (4.4). Supposons d'abord $p > 0$, et soit $e = (e_n)_{0 \leq n \leq N}$ une suite finie d'éléments de E .

$$\begin{aligned}
\|u(e)\|_p^p &= \sum_{0 \leq n \leq N} \|u(e_n)\|_p^p \\
&\leq \sum_{0 \leq n \leq N} \int_Z |(v(e_n))(z)|^p dv(z) \\
&= \int_Z \sum_{0 \leq n \leq N} |\langle v(e_n), \delta_{(z)} \rangle|^p dv(z)
\end{aligned}$$

(où $\delta_{(z)} \in C'(Z)$ est la mesure de Dirac du point z , de norme 1 dans $C'(Z)$)

$$\begin{aligned}
&= \int_Z \sum_{0 \leq n \leq N} |\langle e_n, {}^t v(\delta_{(z)}) \rangle|^p dv(z) \\
&\leq \sup_{z \in Z} \sum_{0 \leq n \leq N} |\langle e_n, {}^t v(\delta_{(z)}) \rangle|^p
\end{aligned}$$

(parce que v est de masse 1)

$$\leq R^p \sup_{\substack{\|\xi\| \leq \|{}^t v\| \\ \xi \in E^*}} \sum_{0 \leq n \leq N} |\langle e_n, \xi \rangle|^p$$

(parce que $\delta_{(z)}$ est un caractère de $C(Z)$)

$$= R^p \sup_{\substack{\|\xi\| \leq 1 \\ \xi \in E'}} \quad (\text{d'après la définition de l'espace}$$

bitopologique $\sigma(E^*, E)$, (1.9)) $= R^p \|e\|_p^{*p}$, donc u est p -sommante, et

$$\pi_p(u) \leq R.$$

Soit maintenant $p < 0$, $\bar{p} = |p|$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\|u(e)\|_p} \right)^{\bar{p}} &= \sum_n \frac{1}{\|u(e_n)\|_p^{\bar{p}}} \\
&\geq \sum_n \int_Z \frac{1}{|(v(e_n))(z)|^{\bar{p}}} dv(z) = \int_Z \sum_n \\
&\geq \inf_{z \in Z} \sum_n \frac{1}{|\langle e_n, {}^t v(\delta_{(z)}) \rangle|^{\bar{p}}} \\
&\geq \frac{1}{R^{\bar{p}}} \inf_{\|\xi\| \leq 1} \sum_n \frac{1}{|\langle e_n, \xi \rangle|^{\bar{p}}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{R^p} \frac{1}{\|e\|_p^{*p}}$$

d'où encore $\|u(e)\|_p \leq R \|e\|_p^*$, donc $\pi_p(u) \leq R$.

Supposons enfin $p = 0$.

$$\prod_{0 \leq n \leq N} \|u(e_n)\| \leq \prod_{0 \leq n \leq N} \exp \left(\int_Z \log |v(e_n)(z)| dv(z) \right)$$

$$= \exp \left(\sum_n \int_Z \dots \right) = \exp \left(\int_Z \sum_n \dots \right)$$

$$\leq \exp \left(\sup_{z \in Z} \sum_n \log | \langle e_n, {}^t_v \delta_{(z)} \rangle | \right)$$

$$= \sup_{z \in Z} \prod_{0 \leq n \leq N} | \langle e_n, {}^t_v(\delta_{(z)}) \rangle |$$

$$\leq R^{N+1} \sup_{\|\xi\| \leq 1} \prod_{0 \leq n \leq N} | \langle e_n, \xi \rangle | = R^{N+1} \|e\|_0^{*(N+1)},$$

d'où encore $\|u(e)\|_0 \leq R \|e\|_0^*$, et $\pi_0(u) \leq R$.

2) Supposons inversement que u soit p -sommante. Prenons $Z = B^*$, $v(x)(\xi) = \pi_p(u) \langle x, \xi \rangle$, donc $v(x) \in C(B^*)$, v application linéaire de E dans $C(B^*)$. La transposée t_v est l'application de $C'(B^*)$ dans E^* qui, à une mesure de Radon $\nu \in C'(B^*)$, fait correspondre l'élément ${}^t_v(\nu)$ de E^* , définissant la forme linéaire sur $E : x \mapsto \pi_p(u) \int_{B^*} \langle x, \xi \rangle dv(\xi)$. En particulier, si $\delta_{(\xi)}$ est un caractère de $C(B^*)$, $\xi \in B^*$, ${}^t_v(\delta_{(\xi)}) = \pi_p(u) \xi \in \pi_p(u) B^*$; t_v envoie donc bien les caractères de $C(B^*)$ dans $\pi_p(u) B^*$, mais, B^* n'étant pas forcément convexe, n'envoie pas en général la boule unité de $C'(B^*)$ dans $\pi_p(u) B^*$.

Nous devons montrer qu'on peut alors trouver une probabilité de Radon ν sur $\sigma(B^*, E)$, telle que l'on ait (4.2), (4.3), ou (4.4). On utilisera pour cela le lemme :

Lemme (4.5) : Soit Γ un ensemble de fonctions sci (semi-continues inférieurement) sur un compact Z à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$. stable par addition, et tel que chaque fonction $\varphi \in \Gamma$ ait un minimum ≤ 0 . Alors

il existe une probabilité de Radon ν sur Γ telle que pour toute $\varphi \in \Gamma$, $\nu(\varphi) \leq 0$.

Démonstration du lemme (4.5) : Supposons d'abord que Γ soit un cône convexe $\subset C(Z)$. Soit Ω le cône convexe ouvert formé des fonctions continues > 0 sur Z . Alors $\Gamma \cap \Omega = \emptyset$. Donc il existe (Hahn-Banach) une forme linéaire continue $\nu \in C'(Z)$, > 0 sur Ω , ≤ 0 sur Γ ; $\nu > 0$ sur Ω signifie que ν est une mesure ≥ 0 non identiquement nulle, on peut donc supposer que c'est une probabilité, d'où le résultat. ♦

Supposons maintenant Γ formé de fonctions sci, et seulement stable par addition. Soit Γ' l'ensemble des fonctions continues φ' sur Z ayant la propriété suivante : il existe $\varphi \in \Gamma$ et k rationnel ≥ 0 tels que $\varphi' \leq k\varphi$. Alors Γ' est encore stable par addition (si $\varphi'_1 \leq \frac{p_1}{q_1} \varphi_1$, $\varphi'_2 \leq \frac{p_2}{q_2} \varphi_2$, on aura $\varphi'_1 + \varphi'_2 \leq \frac{1}{q_1 q_2} (p_1 q_2 \varphi_1 + p_2 q_1 \varphi_2)$, et $p_1 q_2 \varphi_1 + p_2 q_1 \varphi_2 \in \Gamma$) et par multiplication par les scalaires rationnels ≥ 0 ; en outre toute fonction de Γ' a un minimum ≤ 0 . Soit alors Γ'' l'adhérence de Γ' dans $C(Z)$; c'est maintenant un cône convexe fermé, et toute fonction de Γ'' a un minimum ≤ 0 . Donc il existe une probabilité de Radon ν sur Z telle que, pour toute $\varphi'' \in \Gamma''$, $\nu(\varphi'') \leq 0$. Alors, pour $\varphi \in \Gamma$, $\nu(\varphi) = \sup_{\substack{\psi \in C(Z) \\ \psi \leq \varphi}} \nu(\psi) \leq 0$,
cqfd.

Achevons maintenant la démonstration du 2) du théorème (4.1). Soit $e = (e_n)_{0 \leq n \leq N}$ une suite finie d'éléments de E , telle que tous les $u(e_n)$ soient $\neq 0$, donc aussi tous les e_n . Posons

$$\varphi_e(\xi) = \sum_n \|u(e_n)\|^p - (\pi_p(u))^p \sum_n |\langle e_n, \xi \rangle|^p, \quad \text{si } p > 0;$$

$$\varphi_e(\xi) = \frac{1}{(\pi_p(u))^{\bar{p}}} \sum_n \frac{1}{|\langle e_n, \xi \rangle|^{\bar{p}}} - \sum_n \frac{1}{\|u(e_n)\|^{\bar{p}}}, \quad \text{si } p < 0, \bar{p} = |p|;$$

$$\varphi_e(\xi) = \sum_n \log \|u(e_n)\| - \sum_n \log |\langle \pi_0(u) e_n, \xi \rangle| \quad \text{si } p = 0.$$

♦ Un cône ici ne contient pas nécessairement l'origine : c'est un ensemble stable par multiplication par les réels > 0 .

Alors φ_e est une fonction continue sur B^* (topologie $\sigma(E^*, E)$!), à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ (dans $\mathbb{R}$ pour $p > 0$). L'ensemble Γ des φ_e , lorsque N et e varient, est stable par addition, parce que, si $e = (e_n)_{0 \leq n \leq N}$ et $f = (f_m)_{0 \leq m \leq N}$ sont deux suites finies, $\varphi_e + \varphi_f = \varphi_g$, où g est la suite $(e_0, e_1, \dots, e_N, f_0, f_1, \dots, f_M)$ à $M + N + 2$ éléments. (C'est même un cône convexe si $p \neq 0$).

Toute $\varphi \in \Gamma$ a un minimum ≤ 0 sur B^* , ou encore un $\inf \leq 0$ sur B' , par définition même de $\pi_p(u)$. Donc il existe une probabilité de Radon ν sur B^* tel que $\nu(\varphi) \leq 0$ pour toute $\varphi \in \Gamma$, d'après la lemme (4.5). En prenant φ_e définie par une suite e à un seul élément x , on trouve exactement :

$$\|u(x)\| \leq \left(\int_{B^*} |\pi_p(u)(x, \xi)|^p d\nu(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{pour } p \neq 0,$$

$$\|u(x)\| \leq \exp \left(\int_{B^*} \log |\pi_0(u)(x, \xi)| d\nu(\xi) \right), \quad \text{pour } p = 0, \quad \text{c.q.f.d.}$$

Théorème (4.7) (factorisation de Pietsch) : Soit $0 < p < +\infty$. Soient E un espace à dual quasi-normé, G un espace bitopologique tel que G_N soit complet, u une application linéaire de E dans G . Pour qu'elle soit p -sommante, il faut et il suffit qu'il existe un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\quad v \quad} & L^\infty(Z, \nu) & \xrightarrow{\quad j \quad} & L^p(Z, \nu) \\ & \searrow u_1 & & \nearrow j' & \\ & & S & \xrightarrow{\quad u_2 \quad} & G \end{array},$$

où Z, ν, ν sont comme dans le théorème (4.1), où S est un sous-espace vectoriel fermé de $L^p(Z, \nu)$, avec la quasi-norme induite, et j' son injection canonique, et où u_2 est linéaire continue de quasi-norme ≤ 1 de S dans G (c.à.d. dans G_N). Alors $\pi_p(u) \leq R$ défini à (4.1); et on peut prendre $Z = B^*$, $(v(x))(\xi) = \pi_p(u)(x, \xi)$ comme dans (4.1).

Démonstration : Si un tel diagramme existe, on a l'inégalité de Pietsch $\|u(x)\| \leq \|u_1(x)\|_S = \|j^* u_1(x)\|_{L^p(Z, \nu)} = \|j\nu(x)\|_{L^p(Z, \nu)}$, donc u est p -sommante, et $\pi_p(u) \leq R$.

Inversement, supposons u p -sommante. On a une inégalité de Pietsch comme dans (4.1). Alors l'application linéaire $j\nu(x) \mapsto u(x)$ de $j\nu(E)$ dans C_N est bien définie, et continue de quasi-norme ≤ 1 , puisque $\|u(x)\| \leq \|j\nu(x)\|_{L^p}$. Comme C_N est complet, elle se prolonge en une application linéaire continue u_2 , de norme ≤ 1 , de S dans C_N , où S est l'adhérence de $j\nu(E)$ dans $L^p(Z, \nu)$; et, pour $x \in E$, $u(x) = u_2 j\nu(x) = u_2 u_1(x)$ cqfd.

Remarque : Pour $p \leq 0$, il y a bien une inégalité de Pietsch, mais pas de factorisation de Pietsch parce que $L^p(Z, \nu)$ n'existe pas.

§ 5. APPLICATIONS DES THEOREMES DE PIETSCH.

Proposition (5.1) : Soient Z un ensemble muni d'une tribu, ν une mesure ≥ 0 sur cette tribu, α une fonction de $L^p(Z, \nu)$, $0 < p \leq +\infty$. Alors la multiplication par α est une application p -sommante de $L^\infty(Z, \nu)$ dans $L^p(Z, \nu)$, de quasi-norme p -sommante $\leq \|\alpha\|_{L^p(Z, \nu)}$.

Démonstration : Elle se factorise comme suit :

$$L^\infty(Z, \nu) \xrightarrow{\text{Id}} L^\infty\left(Z, \frac{|\alpha|^{p_\nu}}{\|\alpha\|_{L^p}^p}\right) \xrightarrow{\text{Id}} L^p\left(Z, \frac{|\alpha|^{p_\nu}}{\|\alpha\|_{L^p}^p}\right) \xrightarrow[\text{par } \alpha]{\text{multiplication}} L^p(Z, \nu).$$

La première application v , entre espaces de Banach, est linéaire continue de norme ≤ 1 ; la deuxième u est p -sommante, pour $p < +\infty$, de quasi-norme $\pi_p(u) \leq 1$, parce que $\frac{|\alpha|^{p_\nu}}{\|\alpha\|_{L^p}^p}$ est une probabilité, et c'est

vrai aussi pour $p = +\infty$ puisqu'alors toute application linéaire continue u entre Banach est ∞ -sommante, et $\pi_\infty(u) = \|u\|$; la troisième w , la multiplication par α , est linéaire continue de norme $\leq \|\alpha\|_{L^p}$; il suffit donc d'appliquer la proposition (3.5) et l'inégalité (3.6).

Proposition (5.2) : Une application linéaire u , p -sommante, est q -sommante pour $q \geq p$, et $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$.

Démonstration : Montrons d'abord que, si ν est une probabilité sur Z et f une fonction ν -mesurable, $p \mapsto J(p) = \left(\int_Z |f(z)|^p d\nu(z) \right)^{\frac{1}{p}}$ est croissante sur $]-\infty, +\infty]$ (en la remplaçant par ce qu'il faut pour $p = 0$ et $p = +\infty$). Pour $p > 0$, cela résulte de l'inégalité de Hölder. Pour $p < 0$ aussi, car cela revient à dire que $\bar{p} \mapsto \left(\int_Z \left| \frac{1}{f(z)} \right|^{\bar{p}} d\nu(z) \right)^{\frac{1}{\bar{p}}}$ est croissante pour $\bar{p} > 0$. Il suffit donc, pour couvrir tous les cas de figure sur $]-\infty, +\infty]$, de montrer que, lorsque $p > 0$, $J(p) \geq J(0)$, de sorte que la fonction sera croissante sur $[0, +\infty]$, et, par changement de p en $-p$ et de f en $\frac{1}{f}$, elle le sera aussi sur $]-\infty, 0]$, donc sur $]-\infty, +\infty]$ (en fait, $J(p) \geq 0$ est toujours défini pour $p \neq 0$, à valeurs dans $[0, +\infty]$, mais peut n'être pas défini pour $p = 0$; cependant, si J n'est pas identique à $+\infty$ sur $]0, +\infty]$, $J(0)$ est défini et $< +\infty$, et, si J n'est pas identique à 0 sur $]-\infty, 0[$, $J(0)$ est défini et > 0 ; le seul cas où $J(0)$ n'est pas défini est celui où J est $+\infty$ sur $]0, +\infty]$ et 0 sur $]-\infty, 0[$, auquel cas elle est bien croissante malgré son indétermination !). Il suffit de nous placer dans le cas suivant : $J(p_0) < +\infty$ pour un $p_0 > 0$, et $J(0)$ est défini et > 0 , autrement dit $\int_Z |\log|f(z)|| d\nu(z) < +\infty$. En particulier, f est ν -presque partout finie et $\neq 0$. Posons $A(p) = \int_Z |f(z)|^p d\nu(z)$, $p_0 \geq p > 0$. Comme $|f(z)|^p \leq 1 + |f(z)|^{p_0}$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que A est continue sur $]0, p_0]$, et tend, à l'origine, vers $A(0) = \int_Z d\nu(z) = 1$. Dérivons formellement par rapport à p :

$$A'(p) = \int_Z |f(z)|^p \log|f(z)| d\nu(z) ;$$

comme, pour $p \leq p_0 - \varepsilon$, $|f(z)|^p |\log|f(z)|| \leq \text{const.} (|f(z)|^{p_0} + |\log|f(z)||)$, le théorème de dérivation sous le signe $\int$ montre que A est effectivement continuellement dérivable sur $]0, p_0[$, et que $A'(0) = \int \log|f(z)| d\nu(z)$. Donc $J(p) = (A(p))^{\frac{1}{p}}$, d'après la raisonnement fait à $^Z(2.1')$, et compte tenu de $A(0) = 1$, tend vers $\exp(A'(0)) = \exp \int \log|f(z)| d\nu(z)$ lorsque $p > 0$ tend vers 0; la croissance de J dans $]0, p_0]$ montre alors sa croissance dans $[0, p_0]$.

Alors l'inégalité de Pietsch $\|u(x)\| \leq \left(\int_Z |v(x)(z)|^p dv(z) \right)^{\frac{1}{p}}$, si u est p -sommante, avec $R = \pi_p(u)$ (voir définition de R au théorème (4.1)), donne a fortiori $\|u(x)\| \leq \left(\int_Z |v(x)(z)|^q dv(z) \right)^{\frac{1}{q}}$ pour $q \geq p$, donc $\pi_q(u) \leq R = \pi_p(u)$.

Corollaire (5.3) : Pour toute application linéaire u de E dans G , il existe une coupure $p_0 \in \mathbb{R}$ telle que u soit p -sommante pour $p > p_0$ et ne le soit pas pour $p < p_0$.

Nous verrons (conjecture de Pietsch démontrée par B. Maurey et S. Chevet) que, si E est un Banach, la coupure p_0 est ou bien ≥ 1 , ou bien $= 1$, ou bien $-\infty$ (voir (5.6) et (5.7) pour mieux comprendre).

Proposition (5.4) : Soient E Banach et G bitopologique. Si u est p -sommante, $p < +\infty$, elle est faiblement compacte de E dans G_N et G , et transforme tout faiblement compact de E en un compact de G_N et G .

Démonstration : On peut toujours, d'après (5.2), supposer $1 < p < +\infty$. On a la factorisation de Pietsch (4.7), avec v continue. Soit B la boule unité de E ; comme L^p est réflexif, $jv(B)$ est faiblement relativement compacte. Donc $u_1(B)$ est faiblement relativement compacte dans S faiblement fermé de $L^p(Z, \nu)$, donc $u(B) = u_2 u_1(B)$ est faiblement relativement compacte dans G_N , a fortiori dans G . Soit ensuite K un faiblement compact de E ; alors $v(K)$ est faiblement compact dans $L^\infty(Z, \nu)$. Mais L^∞ a la propriété de Dunford-Pettis : si j est une application linéaire continue de L^∞ dans un espace vectoriel localement convexe (ici L^p), qui transforme la boule en une partie faiblement relativement compacte (ici L^p est réflexif), j transforme tout faiblement compact $v(K)$ de L^∞ (faiblement veut dire : pour $\sigma(L^\infty, (L^\infty)')$) en un compact, ici de L^p ; donc $jv(K)$ est compact dans S ; alors $u(K) = u_2 u_1(K)$ est compact dans G_N , a fortiori dans G .

Proposition (5.5) (Dvoretzky-Rogers) : Soit E un Banach. Si toute suite sommable de E est absolument sommable, E est de dimension finie.

Démonstration : En vertu de la proposition (3.4bis), l'application identique de E est 1-sommante. Donc, d'après (5.4) sa boule unité est faiblement compacte parce que faiblement fermée ; donc, par réapplication de

(5.4), compacte, cqfd.

Proposition (5.6) : Soit u une application linéaire continue de rang fini de E_N dans G_N . Alors elle est p-sommante pour tout $p > -1$.

Démonstration : Posons $u(E) = H$, que nous munirons de la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$ par choix d'une base. On peut factoriser u par :

$$E \xrightarrow{u} H = \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{Id}} H = \mathbb{R}^n \hookrightarrow G .$$

D'abord $E \xrightarrow{u} H$ est un morphisme d'espaces à duals quasi-normés. En effet, elle est continue de E_N dans H , muni de la topologie quasi-normée induite par G_N , donc dans $\mathbb{R}^n$; donc t_v est continue de $(\mathbb{R}^n)'$ dans $(E_N)' \subset E^*$, donc envoie la boule unité de $\mathbb{R}^n$ dans une boule de $(E_N)'$, c.à.d. dans l'adhérence, pour $\sigma(E^*, E)$, d'une boule de E' . Ensuite $\mathbb{R}^n \hookrightarrow G_N$ est continue, donc $\mathbb{R}^n \hookrightarrow G$ est un morphisme d'espaces bitopologiques. Il reste donc, par la proposition (3.5), à montrer que l'application identique de $\mathbb{R}^n$ est p-sommante pour $p > -1$. Il suffit de le montrer pour $-1 < p < 0$. $|p| = \bar{p}$. Prenons pour mesure de Pietsch sur $(\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n$ la mesure de Lebesgue sur la boule unité B , normalisée pour qu'elle ait la masse 1. On doit montrer que $\frac{1}{\|x\|^{\bar{p}}} \geq \text{const.} \int_B \frac{1}{|\langle x, \xi \rangle|^{\bar{p}}} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$. On peut se borner, par homogénéité, à $\|x\| = 1$; puis, à cause de l'invariance par rotation, à $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$. Il suffit alors de savoir que, pour tout $\bar{p} < 1$,

$$\int_B \frac{1}{|\xi_1|^{\bar{p}}} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n < +\infty,$$

ce qui résulte aussitôt de $\int_{-1}^1 \frac{d\xi_1}{|\xi_1|^{\bar{p}}} < +\infty$, cqfd.

La proposition suivante montre au contraire que seul le cas $p > -1$ est intéressant :

Proposition (5.7) : Soit u une application linéaire de E dans G, telle que u(E) contienne au moins un sous-espace vectoriel H de dimension 2 de G . Alors u n'est pas p-sommante pour $p' \leq -1$.

Moralement, une application ne peut être p-sommante, $p \leq -1$, que si elle est de rang 0 ou 1.

Démonstration : Supposons qu'elle le soit, nous aboutirons à une contradiction. Soit $\bar{p} = |p|$. Il existe un sous-espace vectoriel L de dimension 2 de E tel que u soit une bijection de L sur H . Munissons L et H de bases, la deuxième image de la première par u , ce qui permet d'identifier L et H à $\mathbb{R}^2$, et la restriction $u : L \rightarrow H$ à l'identité de $\mathbb{R}^2$. Les normes $\mathbb{R}^2$ et E_N sur L sont équivalentes, donc lorsque ξ décrit la quasi-boule unité B' de E' , sa restriction η à L parcourt une partie de $L' = \mathbb{R}^2$ contenue dans et contenant une boule de $\mathbb{R}^2$. Autrement dit les deux valeurs de $\|e\|_p^*$, pour une suite e de L , correspondant à cette suite considérée dans $\mathbb{R}^2$ ou dans E_N , sont majorées chacune par une constante fois l'autre. De même, la norme $\mathbb{R}^2$ et la quasi-norme de G sont équivalentes sur H , donc les deux valeurs de $\|u(e)\|_p$, correspondant à $u(e)$ considérée comme suite dans $\mathbb{R}^2$ ou dans G , sont majorées chacune par une constante fois l'autre. De ce que $u : E \rightarrow G$ est p -sommante, on déduit donc que $u = \text{identité de } \mathbb{R}^2$, est p -sommante. Nous allons montrer que ceci est contradictoire pour $p \leq -1$. Il doit en effet exister une probabilité de Pietsch ν sur la boule unité B de $\mathbb{R}^2$, dont nous retiendrons seulement que, pour tout x de norme 1, $\int_B \frac{1}{|\langle x, \xi \rangle|} d\nu(\xi) < +\infty$.

De cela on déduit d'abord que tout rayon du disque unité est ν -négligeable, sans quoi, en prenant x sur ce rayon, on trouverait une intégrale infinie.

Appelons $F(\theta)$ la ν -mesure du secteur angulaire

$$0 \leq \text{Arg}(\xi_1, \xi_2) \leq \theta$$

(les $\leq$ peuvent être remplacés par des $<$ d'après ce que nous venons de voir). Alors F est une fonction croissante sur $[0, 2\pi]$ $F(0) = 0$, $F(2\pi) = 1$. Donc il existe au moins un point θ^+ où F n'ait pas une dérivée nulle. Il existe donc une suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers θ^+ , et un nombre $\alpha > 0$, tel que

$$\left| \frac{F(\theta_n) - F(\theta^+)}{\theta_n - \theta^+} \right| \geq \alpha.$$

Prenons alors une nouvelle base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$, donnant des coordonnées nouvelles ξ_1, ξ_2 , avec pour deuxième vecteur de base le vecteur unitaire d'argument θ^+ . Prenons pour x le premier vecteur de base. On a l'inégalité

$$+\infty > \int_B \frac{1}{|\langle x, \xi \rangle|^{\bar{p}}} dv(\xi) = \int_B \frac{1}{|\xi'_1|^{\bar{p}}} dv(\xi'_1, \xi'_2).$$

Comme les rayons ne portent pas de masse, si S_n est le secteur angulaire $\theta_n \leq \text{Arg}(\xi_1, \xi_2) \leq \theta'$ ou $\theta' \leq \text{Arg}(\xi_1, \xi_2) \leq \theta_n$ selon que $\theta' < \theta_n$ ou $\theta_n > \theta'$, $\int_{S_n} \frac{1}{|\xi'_1|^{\bar{p}}} dv(\xi'_1, \xi'_2)$ doit donc tendre vers 0 pour n infini, par la convergence dominée de Lebesgue. Or cette intégrale est

$$\geq \frac{1}{|\sin(\theta_n - \theta')|^{\bar{p}}} |F(\theta_n) - F(\theta')| \geq \left| \frac{F(\theta_n) - F(\theta')}{\theta_n - \theta'} \right|$$

(puisque $\bar{p} \geq 1$ et $|\sin u| \leq |u|$) $\geq \alpha$, donc elle ne peut pas tendre vers 0, d'où la contradiction, cqfd.
