

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. NAHOUM

Applications radonifiantes dans l'espace des séries convergentes. II. Les résultats

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 25, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A24_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

APPLICATIONS RADONIFIANTES DANS L'ESPACE
=====

DES SÉRIES CONVERGENTES
=====

II. LES RÉSULTATS
=====

par A. NAHOUM

§ 2. RECHERCHE DE CONDITIONS NECESSAIRES

Soit α un opérateur diagonal de l^p dans S , $1 \leq p \leq \infty$.
 Nous allons chercher des conditions nécessaires pour que α soit q -radonifiant, $0 \leq q < \infty$.

1) Il faut au moins que α opère continûment de l^p dans S . Soit $a \in l^p$, et soit $b_k = |a_k| \overline{\text{sgn } \alpha_k}$: on a aussi $(b_k) \in l^p$, et donc on doit avoir

$$(1) \quad \sup_n \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k \right| = \sup_n \sum_{k=1}^n |\alpha_k| |a_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k| |a_k| < +\infty ;$$

comme a est quelconque dans l^p , ceci impose $\alpha \in l^{p'}$

2) Considérons la transformation de Hilbert discrète H . Elle est continue de l^p dans l^p , pour $1 < p < +\infty$, définie par $Ha = b$ avec

$$b_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{+\infty} \frac{a_k}{k-n} . \text{ Voir par exemple [4].}$$

- Soit donc $1 < p < +\infty$ et $0 \leq q \leq p'$. Si α est q -sommante de l^p dans S , elle est p' -sommante et aussi $\alpha \circ H$. La base canonique $e = (e_{(N)})$ de l^p est scalairement $l^{p'}$, avec $\|e\|_{p'}^* = 1$; donc nécessairement

$$\left[\sum_N \|\alpha \circ H e_{(N)}\|_S^{p'} \right]^{1/p'} \leq \|e\|_{p'}^* \cdot \pi_{p'}(\alpha \circ H) \leq \|H\|_p \pi_{p'}(\alpha) < +\infty .$$

Or $\alpha \circ H e_{(N)}$ est la suite de terme général $\frac{\alpha_n}{N-n}$, sauf pour $n = N$ qui donne 0. Supposons de plus α positive décroissante ; on a alors :

$$\begin{aligned} [\|H\|_p \cdot \pi_{p'}(\alpha)]^{p'} &\geq \sum_N \sup_m \left| \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^m \frac{\alpha_n}{N-n} \right|^{p'} \geq \sum_{N=2}^{+\infty} \left| \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha_n}{N-n} \right|^{p'} \geq \sum_N \alpha_N^{p'} \cdot \left[\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{N-n} \right]^{p'} \\ &\geq \sum_2^{+\infty} \alpha_N^{p'} \cdot [\text{Log } N]^{p'} . \end{aligned}$$

En résumé : si α positive décroissante, est q -sommante de l^p dans S , avec $1 < p < +\infty$ et $0 \leq q \leq p'$, alors on a :

$$(2) \quad \left[\sum_2^{+\infty} [\alpha_N \cdot \text{Log } N]^{p'} \right]^{1/p'} \leq \|H\|_p \cdot \pi_{p'}(\alpha)$$

3) Passons au cas $p = 1$. Supposons donc α positive décroissante, et $\alpha : l^1 \rightarrow S$ q -sommante pour un $q \in]1, +\infty[$. Soit $p = q'$; soit $\beta \in l^{p'}$, positive décroissante. Alors $\alpha, \beta : l^p \rightarrow l^1 \rightarrow S$ est encore p' -sommante, et donc d'après (2) :

$$\left[\sum_2^{+\infty} (\alpha_N \beta_N \text{Log } N)^{p'} \right]^{1/p'} \leq \|H\|_p \cdot \pi_{p'}(\alpha, \beta) \leq \|H\|_p \cdot \|\beta\|_{p'} \cdot \pi_{p'}(\alpha).$$

Prenons en particulier $\beta_N = \frac{1}{K^{1/p'}}$ pour $N \leq K$, $\beta_N = 0$ sinon. On a $\|\beta\|_{p'} = 1$; et

$$\begin{aligned} [\|H\|_p \cdot \pi_{p'}(\alpha)]^{p'} &\geq \sum_2^{\infty} (\alpha_N \beta_N \text{Log } N)^{p'} = \frac{1}{K} \sum_2^K (\alpha_N \log N)^{p'} \geq \frac{\alpha_K^{p'}}{K} \sum_2^K (\text{Log } N)^{p'} \\ &\geq \frac{\alpha_K^{p'}}{K} \int_1^K (\text{Log } t)^{p'} dt \geq \frac{\alpha_K^{p'}}{K} \int_{K/2}^K (\text{Log } t)^{p'} dt \geq \frac{\alpha_K^{p'}}{2} (\text{Log } K/2)^{p'} \end{aligned}$$

par convexité de $x \mapsto \int_1^x (\text{Log } t)^{p'} dt$.

Donc $(\alpha_K \text{Log } K)$ est une suite bornée.

En résumé : si α est positive décroissante et q -sommante pour un $q \in]0, +\infty[$ de l^1 dans S , alors

$$(3) \quad \alpha_n = o\left(\frac{1}{\text{Log } n}\right)$$

§ 3. CONDITIONS SUFFISANTES

1) Cas $p = 1$: Soit α une application diagonale de l^1 dans S ; supposons de plus $\alpha \in c_0$. Alors α opère en fait de $\sigma(l^1, c_0)$ dans $\sigma(S, S')$. [En effet, d'abord S' est un espace de suites ; ensuite soit $b \in S'$; on a pour toute $a \in S$, en posant

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n : \sum_1^{\infty} a_n b_n = \sum_1^{\infty} (A_n - A_{n+1}) b_n = A_1 b_1 + \sum_2^{\infty} A_k (b_k - b_{k-1})$$

est convergente ; lorsque a décrit S , A décrit c_0 , donc ceci impose

$$|b_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |b_k - b_{k-1}| < +\infty.$$

Maintenant, si $b \in S'$ on a $\alpha(b) \in c_0$,

cqfd]

- Soit λ une probabilité cylindrique de 2-type sur $\sigma(l^1, l^\infty)$, λ_1 son image sur $\sigma(l^1, c_0)$; si $\alpha(\lambda_1)$ est d'ordre 2 sur S , il en sera de même de $\alpha(\lambda)$. Or on peut représenter λ_1 par une fonction aléatoire linéaire et continue $f_1 : c_0 \rightarrow L^2(\Omega, \mu)$ (exposé IV) ; $t_{f_1} : L^2(\Omega, \mu) \rightarrow l^1$ et, L^2 étant de type 2 (exposé X-XI), on a une propriété de factorisation :

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Omega, \mu) & \xrightarrow{t_{f_1}} & l^1 \\ & \searrow g & \uparrow \beta \\ & & l^2 \end{array}$$

où β est une multiplication, $\beta \in l^2$ (exposé XV).

Mais ceci signifie que λ_1 est l'image par β de la probabilité cylindrique λ_2 sur l^2 , représentée par la fonction aléatoire t_g (exposé IV § 1 Remarque 3). On a $\alpha(\lambda_1) = \alpha \circ \beta(\lambda_2)$, qui est de Radon sur S de 2-ordre dès que $\sum (\alpha_n \beta_n \text{Log } n)^2 < +\infty$, d'après le théorème de Merchov (exposé XXIV) donc, puisque $\beta \in l^2$, dès que $(\alpha_n \text{Log } n) \in l^\infty$. Cette condition entraîne $\alpha \in c_0$, donc aussi $\alpha(\lambda)$ de Radon de 2-ordre sur S .

A cette condition $\alpha_n = O(\frac{1}{\text{Log } n})$, α est 2-sommante donc factorise par un Hilbert $\mathcal{K}$ (factorisation de Pietsch) : $\alpha : l^1 \xrightarrow{u} \mathcal{K} \xrightarrow{v} S$, avec u 2-sommante. Mais $\Pi_0(l^1, \mathcal{K}) = \Pi_2(l^1, \mathcal{K})$ (exposé XXIII), l^∞ possède la propriété d'approximation métrique et $\mathcal{K}$ est réflexif. Donc (exposés V et IX) u est 0-radonifiante de l^1 dans $\mathcal{K}$ lui-même ; et donc α de l^1 dans S lui-même.

Théorème 1 [2] : Si α est une suite telle que (3) $\alpha_n = O(\frac{1}{\text{Log } n})$, α définit une application diagonale 0-radonifiante de l^1 dans S . La condition (3) est aussi nécessaire pour que α soit q -radonifiante pour un $q < +\infty$, dans le cas où α est positive décroissante. Ce dernier point résulte du paragraphe 2, 3).

Remarque 1 : S. Kwapien et A. Pelczynski avaient déjà démontré dans [1] que la condition $\alpha_n = O(\frac{1}{(\text{Log } n)^{1+\varepsilon}})$ pour un $\varepsilon > 0$ était suffisante pour que α soit 1-sommante. Ils utilisaient la formule $\pi_1(J_N) \leq \text{Cste. Log}(N+1)$ où $J_N : l_N^1 \hookrightarrow S_N$ [du §1, 1)], sans passer par le théorème de Merchov.

Remarque 2 : On a démontré au passage que toute probabilité cylindrique λ_1 de 2-type sur $\sigma(l^1, c_0)$ est l'image par une application diagonale d'une probabilité cylindrique λ_2 sur l^2 de 2-type. En fait si l'on suppose seulement λ_1 de 0-type, le résultat reste valable, à ceci près évidemment que λ_2 est maintenant de 0-type sur l^2 . En effet λ_1 est alors représentée par $f'_1 : c_0 \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$.

On a d'après l'exposé XXIII une factorisation

$$\begin{array}{ccc} c_0 & \xrightarrow{f'_1} & L^0(\Omega, \mu) \\ & \searrow h_1 & \uparrow \varphi \\ & & L^2(\Omega, \mu) \end{array}$$

D'après la démonstration du théorème, appliquée à h_1 au lieu de f_1 , le diagramme se complète en :

$$\begin{array}{ccc} c_0 & \xrightarrow{\quad} & L^0(\Omega, \mu) \\ \beta \downarrow & \searrow & \uparrow \varphi \\ l^2 & \xrightarrow{t_g} & L^2(\Omega, \mu) \end{array}$$

Si l'on pose $f'_2 = \varphi \circ t_g$, l'image de la probabilité cylindrique de 0-type sur l^2 représentée par f'_2 est bien λ_1 , cqfd.

On a obtenu le résultat suivant : pour qu'un opérateur linéaire u de l^1 dans un espace de Banach F soit 2-sommant (ou 0-sommant) il faut et il suffit que $u \circ \beta$ soit 2-sommant pour tout opérateur diagonal β de l^2 dans l^1 . Le lecteur transposera immédiatement dans le cas d'un espace L^1 .

2) Cas p quelconque, $p \geq 1$

a) Soit $\alpha : l^p \rightarrow S$ diagonale. Si $\alpha = \beta\gamma$ avec $\beta \in l^{p'}$ et $\gamma_n = o(\frac{1}{\text{Log } n})$ on peut factoriser α en $l^p \xrightarrow{\beta} l^1 \xrightarrow{\gamma} S$ avec β diagonale continue, et γ 0-radonifiante d'après le 1). La condition est donc $(\alpha_n \text{Log } n) \in l^{p'}$:

Théorème 2 : Si α est une suite telle que (2) : $\sum |\alpha_n \log n|^{p'} < +\infty$, elle définit une application diagonale 0-radonifiante de l^p dans S lui-même ($1 < p \leq \infty$). Cette condition (2) est aussi nécessaire pour que α soit q -radonifiante pour un $q \leq p'$ lorsque $1 < p < +\infty$, et que α est positive décroissante. Ce dernier point d'après § 2, 2).

b) Restent à régler les cas : $q > p'$ ou $p = +\infty$. On sait ([3], exposé XIV) que l'opération de primitive $f \mapsto Pf$, $Pf(x) = \int_0^x f(t) dt$, $L^p_{loc}(\mathbb{R}, dx) \rightarrow L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, dx)$ est q -radonifiante pour $q > p'$.

On va ramener $l^p \xrightarrow{\alpha} S$ ou ce qui revient au même $l^p \xrightarrow{\sigma \circ \alpha} l^\infty$ (avec toujours $(\sigma a)_n = \sum_{j=1}^n a_j$) à ceci. A $a \in l^p$, on associe $F_a \in L^p$ définie par

$$F_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n a_n 1_{J_n}(x) \text{ où les } k_n \text{ sont des constantes à déterminer, les } J_n \text{ des intervalles adjacents de } \mathbb{R} \text{ (l'extrémité gauche de } J_1 \text{ étant 0) dont les longueurs } |J_n| \text{ sont également à déterminer.}$$

On a $\|F_a\|_p^p = \sum |a_n|^p |k_n|^p |J_n|$. Si l'on impose $|k_n| = |J_n|^{-1/p}$ ($=0$ si $|J_n| = 0$), $a \mapsto F_a$ est une isométrie $l^p \rightarrow L^p$ (ceci si $p < +\infty$; si $p = +\infty$, la condition est $|k_n| = 1$) ; puis

$$\int_{J_1 \cup \dots \cup J_m} F_a(t) dt = \sum_{n=1}^m k_n a_n |J_n| ; \text{ si l'on prend } k_n |J_n| = \alpha_n$$

soit $\text{sgn}(k_n) = \text{sgn}(\alpha_n)$ et $|J_n|^{1/p'} = |\alpha_n|$ (pour $p \leq +\infty$), on a $\|PF_a\|_\infty = \|\sigma a\|_\infty = \|\alpha a\|_S$; les conditions obtenues déterminent les k_n et les J_n , et en outre, si $\alpha \in l^{p'}$, les F_a , $a \in l^p$ ont toutes leur support dans $[0, \|\alpha\|_{p'}^{p'}]$ donc uniformément borné : la topologie induite par L^p_{loc} (resp L^∞_{loc}) sur l'espace engendré par les F_a (resp les PF_a) est celle de L^p (resp L^∞), et donc le résultat évoqué s'applique :

Théorème 3 : Si α est une suite de $l^{p'}$, elle définit une application diagonale α de l^p dans S , qui est q -radonifiante dès que $q > p'$. Cette condition est aussi nécessaire. Ce dernier point d'après § 2, 1).

Remarque 3 : Dans le cas $p = +\infty$, on peut raisonner directement : si α est continue de l^∞ dans S , on a $\alpha \in l^1$ d'après le paragraphe 2, 1). On peut alors décomposer $\alpha : l^\infty \xrightarrow{\alpha} l^1 \hookrightarrow S$, donc α est 1-sommante. La condition $\sum |\alpha_n| \log n < \infty$ est suffisante pour que α soit q -sommante de l^∞ dans S , pour $q < 1$, mais on ne sait pas si cette condition est nécessaire, même pour une suite (α_n) positive décroissante.

Pour $p < +\infty$ les conditions suffisantes obtenues qui couvrent toutes les valeurs de p , et de q sont aussi nécessaires, au moins lorsque α est positive décroissante.

§ 4. INTERPRETATION EN TERMES DE SUITES DE VARIABLES ALEATOIRES

Nous ne la donnerons que dans le cas $p = 1$, $q = 0$, les autres cas étant analogues.

Soient Ω un espace topologique, μ une probabilité de Radon sur Ω et (X_n) une suite de variables aléatoires sur cet espace. Si (X_n) est telle que, pour tout a dans l^∞ , $\sum a_n X_n$ converge dans $L^0(\Omega, \mu)$, alors $f: (a_n) \mapsto \sum a_n X_n$ définit une fonction aléatoire linéaire continue $l^\infty \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$; à f est associée une probabilité cylindrique λ de type 0 sur l^1 (exposé IV). Si maintenant α est une suite de nombres complexes telle que (3) $\alpha_n = O(\frac{1}{\log n})$ alors α définit un opérateur diagonal 0-radonifiant de l^1 dans S , d'après le théorème 1, et donc $\alpha(\lambda)$ est de Radon sur S . Il lui est associé la f.a.l.

$f \circ {}^t\alpha : S \xrightarrow{\alpha} l^\infty \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$; S étant un Banach séparable, d'après le théorème 5, § 1 de l'exposé IV, $f \circ {}^t\alpha$ est décomposée; c'est dire qu'il existe $\Phi : \Omega \rightarrow S$, μ -mesurable, telle que pour $a \in S'$, $f \circ {}^t\alpha(a) = f(\alpha a) = \langle a, \Phi \rangle$ - égalité dans L^0 . Pour $a = e_{(n)}$ on obtient $\alpha_n X_n = \langle e_{(n)}, \Phi \rangle$; donc $\Phi(\omega) = (\alpha_n X_n(\omega)) \in \text{Sp.s.}$; inversement cette dernière propriété implique que $\alpha(\lambda)$ est de Radon sur S - d'après le même théorème de l'exposé IV; si elle a lieu pour α donnée mais pour toute suite (X_n) de $L^0(\Omega, \mu)$, telle que, pour $a \in l^\infty$, $\sum a_n X_n$ converge dans L^0 [et ceci quels que soient Ω et μ , mais sur ce point, on peut améliorer le résultat], et si α est positive décroissante, alors, d'après le théorème 1, on a nécessairement $\alpha_n = O(\frac{1}{\log n})$. [En effet toute f.a.l. continue $f : c_0 \rightarrow L^0$ est évidemment de la forme $a \mapsto \sum a_n X_n$, où $X_n = f(e_{(n)})$]. Enonçons seulement la première partie des résultats :

Théorème 1' : Si (X_n) est une suite de variables aléatoires sur Ω topologique avec μ probabilité de Radon, et si cette suite est telle que pour toute $a \in l^\infty$, la série $\sum a_n X_n$ converge en probabilité, alors la série $\sum \alpha_n X_n(\omega)$ converge p.s. dès que la suite (α_n) vérifie $\alpha_n = O(\frac{1}{\log n})$.

Remarque 4 : On peut facilement s'affranchir de l'hypothèse Ω topologique et μ probabilité de Radon sur Ω . Si les (X_n) sont définies sur un es-

pace mesuré abstrait $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$, on pose $\Omega' = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, μ' est l'image de μ par $\omega \mapsto (X_n(\omega))$, les (X'_n) sont les projections de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$: Ω' est topologique, μ' de Radon et on raisonne sur les (X'_n) .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Kwapień et A. Pełczyński : The main triangle projection ...
Studia Math. Tom 34, 1970.
 - [2] B. Maurey et A. Nahoum : Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t.276,
p.751 (Mars 1973).
 - [3] Séminaire L. Schwartz 1969-70, Ecole Polytechnique, Paris.
 - [4] E. C. Titchmarsh : Reciprocal formulae involving series and
integrals. Math. Z. 25 , 1926, pp.321-381.
-