

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Sur les sous-espaces de L^p , d'après H. P. Rosenthal

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 23, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973___A22_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

SUR LES SOUS-ESPACES DE L^p ,
D'APRÈS H. P. ROSENTHAL

par B. MAUREY

Nous avons vu dans l'exposé XXII que $2 \in I_{L_1}^1$. Nous allons reprendre ce résultat pour une classe un peu plus large d'espaces, introduite par Lindenstrauss et Pelczynski [2] :

On dit qu'un espace de Banach E est un espace $\mathcal{L}_\lambda^p$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \lambda < \infty$, si pour tout sous-espace X de dimension finie de E , il existe un entier n , et un sous-espace Y de E de dimension n , contenant X , et tel que $d(Y, l_n^p) \leq \lambda$.

Théorème 1 : Pour tout nombre réel p tel que $-1 < p \leq 2$, il existe une constante C_p telle que la propriété suivante soit réalisée :

Pour tout opérateur linéaire continu v d'un espace $\mathcal{L}_\lambda^1$ dans un espace quasi-normé F , on a :

$$\pi_p(v) \leq \lambda C_p \pi_2(v)$$

Démonstration : Nous avons vu dans l'exposé XXII que $2 \in I_{L_1}^1$. Soit p tel que $-1 < p \leq 2$. Par un argument standard, il existe une constante C_p telle que l'on ait pour tout F et pour tout $v \in \pi_2(l^1, F)$:

$$\pi_p(v) \leq C_p \pi_2(v)$$

Soit maintenant v un opérateur linéaire 2-sommant d'un espace $\mathcal{L}_\lambda^1$ E dans un espace quasi-normé F . Soient $(x_1, \dots, x_m)$ des éléments de E , X le sous-espace de dimension finie de E engendré par ces vecteurs, n un entier et Y un sous-espace de E , de dimension n , contenant X , et tel que $d(Y, l_n^1) \leq \lambda$. Soit j un isomorphisme de l_n^1 sur Y , tel que $\|j\| \|j^{-1}\| \leq \lambda$, et désignons par v_1 la restriction de v à Y . Considérons la factorisation suivante pour v_1 :

$$Y \xrightarrow{j^{-1}} l_n^1 \xrightarrow{i} l^1 \xrightarrow{\pi} l_n^1 \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{v_1} F,$$

où i et π sont les injections et projections canoniques. On aura

$$\begin{aligned} \pi_p(v_1) &\leq \|j^{-1}\| \pi_p(v_1 \circ j \circ \pi) \leq C_p \|j^{-1}\| \pi_2(v_1 \circ j \circ \pi) \\ &\leq C_p \|j^{-1}\| \|j\| \pi_2(v_1) \leq \lambda C_p \pi_2(v) \end{aligned}$$

On peut donc écrire pour les éléments (x_i) , contenus dans Y :

$$(\sum \|v(x_i)\|^p)^{1/p} \leq \lambda C_p \pi_2(v) \sup_{\|\xi\| \leq 1} (\sum |\langle x_i, \xi \rangle|^p)^{1/p},$$

Soit $\pi_p(v) \leq \lambda C_p \pi_2(v)$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire : Tout opérateur linéaire continu d'un espace $\mathfrak{L}_\lambda^\infty$ dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$, $0 \leq p \leq 2$, se factorise par $L^2(\Omega, \mu)$ et la multiplication par une fonction de L^r , $1/p = 1/2 + 1/r$.

(Notons qu'un espace $C(K)$ est un espace $\mathfrak{L}_\lambda^\infty$ pour tout $\lambda > 1$).

Démonstration : Soit E un espace $\mathfrak{L}_\lambda^\infty$. D'après [3], théorème III, son dual est un espace $\mathfrak{L}_{\lambda'}^1$, pour un certain λ' . Il suffit donc d'appliquer le théorème précédent, et la remarque 2 et le théorème de l'exposé XVII.

Nous en venons maintenant à la deuxième forme du théorème de Grothendieck :

Théorème 2 : (cf. [1] ou [2])

Pour tout nombre réel p tel que $-1 < p \leq \infty$, il existe une constante K_p telle que la propriété suivante soit réalisée : pour tout opérateur linéaire continu v d'un espace $\mathfrak{L}_\lambda^1$ dans un espace de Hilbert H , on a :

$$\pi_p(v) \leq \lambda K_p \|v\|$$

En raisonnant comme dans le théorème 1, il est clair qu'il suffit de montrer que l'on a pour tout opérateur $v \in \mathfrak{L}(l^1, H)$:

$\pi_p(v) \leq K_p \|v\|$. Ce résultat découlera immédiatement du théorème 1 et du lemme suivant :

Lemme : Soit γ_2 la probabilité de Gauss normale sur $\mathbf{R}$. Pour tout opérateur linéaire v de l^1 dans un espace de Hilbert, on a :

$$\pi_2(v) \leq \|\gamma_2\|_2 (\|\gamma_2\|_1)^{-1} \|v\|$$

Démonstration : Considérons l'espace de Hilbert H' . D'après l'exposé V, remarque 2, il existe un espace de probabilité (Ω, μ) et un opérateur linéaire continu u de H' dans $L^0(\Omega, \mu)$ tel que :

- a) u est un plongement isométrique de H' dans $L^1(\Omega, \mu)$
- b) u est continu de H' dans $L^2(\Omega, \mu)$ avec une norme $A_2 = \|\gamma_2\|_2 (\|\gamma_2\|_1)^{-1}$.

Par transposition, on voit que ${}^t u$ identifie H à un quotient de $L^\infty(\Omega, \mu)$ et ${}^t u$ admet la factorisation :

$$L^\infty(\Omega, \mu) \xrightarrow{w_1} L^2(\Omega, \mu) \xrightarrow{w_2} H ,$$

où $\|w_2\| \leq A_2$, et w_1 est l'injection canonique. Soit maintenant v un opérateur linéaire continu de l^1 dans H , ce qui équivaut à la donnée d'une suite (x_n) d'éléments de H , telle que $\|x_n\| \leq \|v\|$ (les x_n sont les images des vecteurs de base de l^1). Puisque H s'identifie à un quotient de $L^\infty(\Omega, \mu)$, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n un vecteur $\tilde{x}_n$ de $L^\infty(\Omega, \mu)$, tel que ${}^t u(\tilde{x}_n) = x_n$, et $\|\tilde{x}_n\| \leq (1 + \varepsilon)\|x_n\|$. Cette suite $\tilde{x}_n$ permet de définir un opérateur $\tilde{v}$ de l^1 dans $L^\infty(\Omega, \mu)$, tel que $v = {}^t u \circ \tilde{v}$, et $\|\tilde{v}\| \leq (1 + \varepsilon)\|v\|$. On a alors :

$$\begin{aligned} \pi_2(v) &\leq \|\tilde{v}\| \pi_2({}^t u) \leq (1 + \varepsilon) A_2 \|v\| \pi_2(w_1) \\ &\leq (1 + \varepsilon) A_2 \|v\| , \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui démontre le lemme.

Nous allons maintenant nous intéresser aux plongements d'espaces de Banach dans des espaces L^p , $0 \leq p \leq 2$. Nous introduisons quelques notations : si E est un espace de Banach, nous désignerons par K_E l'ensemble des réels $q \in]0, 2]$ tels que E soit de type q .

Nous désignerons par J_E l'ensemble des réels $p \in]0, 2]$ tels qu'il existe un espace de probabilité (Ω, μ) et un plongement u de E dans $L^p(\Omega, \mu)$ (c'est à dire que u est un isomorphisme entre E et $u(E)$), avec la propriété supplémentaire que sur $u(E)$, les topologies induites par $L^p(\Omega, \mu)$ et $L^0(\Omega, \mu)$ coïncident.

Théorème 3 : Soit E un espace de Banach de dimension infinie plongeable dans un espace $L^0(\Omega, \mu)$. On a :

$$J_E = K_E \subset I_E ,$$

Si E vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, ou si E est plongeable dans un espace $L^1(\Omega, \mu)$, on a en fait :

$$J_E = K_E = I_E,$$

Démonstration : Soit u un plongement de E dans un espace $L^0(\Omega, \mu)$. Supposons que $q \in K_E$, c'est-à-dire E de type q . D'après l'exposé XII, propositions 6 et 7, l'opérateur u admet la factorisation :

$$E \xrightarrow{u_1} L^q(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^0(\Omega, \mu)$$

Il est clair que u_1 est un plongement de E dans $L^q(\Omega, \mu)$. D'autre part, les topologies induites sur $u_1(E)$ par $L^q(\Omega, \mu)$ et $L^0(\Omega, \mu)$ coïncident. En effet, soit (x_n) une suite d'éléments de E telle que $(u_1(x_n))$ tende vers zéro en probabilité. Alors $u(x_n) = g \cdot u_1(x_n)$ tend aussi vers zéro en probabilité, donc (x_n) tend vers zéro dans E puisque u est un plongement, donc $u_1(x_n)$ tend vers zéro dans $L^q(\Omega, \mu)$. On a donc vu que : $K_E \subset J_E$.

Supposons maintenant que $p \in J_E$. Il existe un espace de probabilité (Ω, μ) , et un plongement u de E dans $L^p(\Omega, \mu)$, tel que sur $u(E)$ les topologies de $L^p(\Omega, \mu)$ et $L^0(\Omega, \mu)$ coïncident, donc aussi les topologies de $L^p(\Omega, \mu)$ et $L^{p-\varepsilon}(\Omega, \mu)$. On en déduit que $u(E)$ est de type p d'après l'exposé X-XI, proposition 2, donc E est également de type p , puisqu'isomorphe à $u(E)$.

On a donc : $K_E = J_E$.

Supposons à nouveau que $q \in K_E$, et soit p tel que $0 < p \leq q$. D'après l'exposé XV, théorème 2, tout opérateur linéaire continu de E dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ se factorise par $L^q(\Omega, \mu)$ et la multiplication par une fonction de $L^r(\Omega, \mu)$, $1/p = 1/q + 1/r$. On en déduit que $q \in I_E$, d'après le théorème de l'exposé XVII (avec interversion des rôles de E et E' : voir la remarque 1 de cet exposé).

On a donc dans tous les cas :

$$K_E = J_E \subset I_E.$$

Soit maintenant $p \in I_E$, (donc $p \leq 2$ puisque E est de dimension infinie d'après la remarque 1, exposé XXII), et supposons que E vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, ou que E soit plongeable dans un espace $L^1(\Omega, \mu)$. Soit u un plongement de E dans $L^0(\Omega, \mu)$ ou dans $L^1(\Omega, \mu)$ suivant le cas.

Si $p < 2$, on peut trouver $q > p$ tel que $q \in I_E$, d'après le corollaire 3, exposé XXII. Si $p = 2$, nous prendrons $q = 2$. D'après le théorème de l'exposé XVII, l'opérateur u se factorise par $L^q(\Omega, \mu)$, $u = T_g \circ u_1$, et d'après un raisonnement que nous avons déjà fait, l'opérateur u_1 est un plongement de E dans $L^q(\Omega, \mu)$, donc E est de type p d'après les résultats de l'exposé X-XI, et ceci achève la démonstration.

Nous allons maintenant démontrer le théorème principal de l'article [4] de H. P. Rosenthal.

Théorème 4 : Soient (Ω, μ) un espace mesuré (quelconque) et E un sous-espace de $L^p(\Omega, \mu)$, $1 \leq p < 2$. Une (et une seule) des conditions suivantes est réalisée :

- a) Il existe un nombre $q > p$ tel que E se plonge dans $L^q(\Omega, \mu)$.
- b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace Y de E , $(1+\varepsilon)$ -isomorphe à l^p , et une projection P de norme $\leq 1 + \varepsilon$ de $L^p(\Omega, \mu)$ sur Y .

Démonstration : Si E est de type p , on a $p \in I_E$, d'après le théorème 3, et il existe un $q > p$ tel que $q \in I_E$, d'après le corollaire 3, exposé XXII. D'après le théorème de l'exposé XVII, l'opérateur d'injection de E dans $L^p(\Omega, \mu)$ se factorise par $L^q(\Omega, \mu)$, donc E se plonge dans $L^q(\Omega, \mu)$.

Supposons que E ne soit pas de type p , et que μ soit une probabilité. La condition b) est alors vérifiée d'après la proposition 4 de l'exposé XVIII. Lorsque μ est σ -finie, on se ramène immédiatement au cas précédent, car $L^p(\Omega, \mu)$ est alors isométrique à $L^p(\Omega, \nu)$, pour une certaine probabilité ν .

Supposons μ quelconque, et supposons que E ne soit pas de type p . Il existe pour tout entier n une suite $(y_i^n)_i$ de vecteurs de E (dont un nombre fini seulement sont non nuls) telle que :

$$(R_n) \quad \left(\int \left\| \sum_i y_i^n f_i(t) \right\|^r dP(t) \right)^{1/r} \geq n \left(\sum_i \|y_i^n\|^p \right)^{1/p}$$

où $r \in]0,1[$ est fixé, et où (f_i) est une suite de variables aléatoires indépendantes p -stables équidistribuées. Pour chacune des fonctions y_i^n , l'ensemble $A_i^n = \{ |y_i^n| > 0 \}$ est σ -fini, c'est-à-dire réunion dénombrable d'ensembles intégrables. Posons $A = \bigcup_{i,n} A_i^n$, et désignons par F le sous-espace de E formé des fonctions g telles que $\{|g| > 0\} \subset A$. Le sous-espace F n'est pas de type p d'après les relations (R_n) , et la mesure $\chi_A \mu$ est σ -finie. D'après la première partie, il existe un sous-espace Y de F , (donc de E), $(1+\varepsilon)$ -isomorphe à l^p , et une projection P_1 de norme $\leq (1+\varepsilon)$ de $L^p(\Omega, \chi_A \mu)$ sur Y . Mais il existe aussi une projection évidente P_2 de norme ≤ 1 de $L^p(\Omega, \mu)$ sur $L^p(\Omega, \chi_A \mu)$, ce qui achève la démonstration.

Remarque : L'énoncé du théorème 4 reste valable pour un sous-espace de $L^p(\Omega, \mu)$, $0 < p < 1$, à condition de supprimer dans b) l'existence d'une projection P de $L^p(\Omega, \mu)$ sur Y .

Corollaire : Soit (Ω, μ) un espace mesuré. Si E est un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega, \mu)$, il existe un nombre $q > 1$ tel que E se plonge dans $L^q(\Omega, \mu)$.

Démonstration : L'espace E , étant réflexif, ne peut pas contenir un sous-espace isomorphe à l^1 .

Citons également le résultat suivant :

Proposition : Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, et E un espace de Banach plongeable dans $L^0(\Omega, \mu)$, vérifiant l'hypothèse d'approximation métrique, et tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{X \in E} d(X, l_n^\infty) = +\infty$$

Il existe alors un nombre $q > 1$ tel que E se plonge dans $L^q(\Omega, \mu)$.

Démonstration : La condition de la proposition implique que $1 \in I_E$, d'après le corollaire 1 de l'exposé XXII. Il existe donc un nombre $q > 1$ tel que $q \in I_E$, d'après le corollaire 3 de l'exposé XXII. Puisque E vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, le plongement de E dans $L^0(\Omega, \mu)$ se factorise par $L^q(\Omega, \mu)$ d'après l'exposé XVII, d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Grothendieck : Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1956) p.1-79.
 - [2] J. Lindenstrauss et A. Pelczynski : Absolutely summing operators in $\mathfrak{L}_p$ -spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968) p.275-326.
 - [3] J. Lindenstrauss et H. P. Rosenthal : The $\mathfrak{L}_p$ -spaces, Israel Journal of Math. Vol. 7 N°4 (1969) p.325-349.
 - [4] H. P. Rosenthal : On subspaces of L^p , Annals of Math. Vol. 97 N°2 p.344-373 (Mars 1973).
-