

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

**Bases, suites lacunaires dans les espaces L^p , d'après
Kadec et Pelczynski (suite et fin)**

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 19, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973___A19_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

BASES, SUITES LACUNAIRES DANS LES ESPACES L^p

D'APRES KADEC ET PELCZYNSKI

(suite et fin)

par G. PISIER

Nous allons énoncer les conséquences du théorème 3 de l'exposé précédent dans les différents cas.

Remarquons tout d'abord que la proposition 4 est vraie sans modification si μ est σ -finie, à condition de définir la topologie de $L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Comme celle qui est définie par les jauges

$$J_{\alpha, A} : f \in L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \inf \{a > 0 \mid \mu(\{|f| > a\} \cap A) \leq \alpha\}$$

où α est positif et A est une partie intégrable. On voit alors que (quelle que soit la mesure μ) si un sous-espace R de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ a la topologie de $L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ alors il est de type p . En effet il existe une partie intégrable $A \in \mathcal{A}$ telle que R se plonge dans $L^p(A, \mathcal{A}|_A, \mu|_A)$, avec la topologie de $L^0(A, \mathcal{A}|_A, \mu|_A)$.

Si μ est supposée δ -finie, il existe une fonction mesurable f , telle que $\{f > 0\} = \Omega$ et $\delta f d\mu = 1$.

L'opérateur $T : g \rightarrow g f^{-1/p}$ de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sur $L^p(\Omega, \mathcal{A}, (f \cdot \mu))$ est une isométrie, et l'opérateur $g \rightarrow g f^{-1/p}$ de $L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sur $L^0(\Omega, \mathcal{A}, (f \mu))$ est un isomorphisme d'e.v.t. On en conclut aisément qu'un sous-espace R de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ a la topologie de $L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ si et seulement si $T(R) \subset L^p(\Omega, \mathcal{A}, (f \mu))$ a la topologie de $L^0(\Omega, \mathcal{A}, (f \mu))$. La proposition 4 s'étend donc au cas où μ est σ -finie. Appliquée à l'espace l^p , cette remarque conduit à un résultat classique :

Proposition 5 : Soit $p > 0$ et $\delta > 0$. Tout sous-espace fermé de dimension infinie de l^p contient un sous-espace $(1 + \delta)$ -isomorphe à l^p [et $(1 + \delta)$ -complémenté si $p \geq 1$].

Démonstration : Si $\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{\{n\}}$, l'espace $L^0(\mathbb{N}, \lambda)$ s'identifie à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; comme la boule de l^p est compacte pour la topologie induite par $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, un sous-espace de dimension infinie de $l^p = L^p(\mathbb{N}, \lambda)$ ne peut avoir la topologie de $L^0(\mathbb{N}, \lambda)$. Il suffit donc d'appliquer la remarque précédente.

Soit $0 < p < q < 2$, le théorème 4 implique que toute probabilité cylindrique de type et cotype p sur $\sigma((L^q)^*, L^q)$ est de cotype 0, puisque L^q est de type p . Si $p \in]0, 1[$ on peut préciser :

Proposition 6 : Soit $0 < p < q \leq 1$. Toute probabilité cylindrique de type et cotype p sur un e.l.c.s. à dual q -normé est de cotype 0.

Démonstration : En effet, l^p n'est pas q -normable. (ou encore : tout e.l.c.s. à dual q -normé est de type p si $0 < p < q \leq 1$. Cf. exposés X - XI corollaire 2).

Rappel : Soit E un e.v.t., une famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite base inconditionnelle de E si, par définition, tout élément de E peut s'écrire d'une manière unique sous la forme $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ où $(\alpha_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaires et où $(\alpha_i x_i)_{i \in I}$ est une famille sommable dans E . Une famille $(x_i)_{i \in I}$ dans E est dite basique inconditionnelle, si c'est une base inconditionnelle du sous-espace fermé engendré par $\{x_i \mid i \in I\}$.

Soient E, F deux espaces de Banach. Une famille basique inconditionnelle $(x_i)_{i \in I}$ dans E et une famille basique inconditionnelle dans F $(y_j)_{j \in J}$ sont dites équivalentes s'il existe une bijection σ de I sur J telle que, pour toute famille scalaire $(\alpha_i)_{i \in I}$, la famille $(\alpha_i x_i)_{i \in I}$ est sommable dans E si et seulement si la famille $(\alpha_i y_{\sigma(i)})_{i \in I}$ l'est dans F .

Soit E un espace de Banach, $(x_i)_{i \in I}$ une base inconditionnelle de E ; alors la norme $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = x \rightarrow \|x\|_1 = \sup_{J \subset I, J \text{ fini}} \left\| \sum_{i \in J} \alpha_i x_i \right\|$ est

équivalente par le théorème de Banach à la norme initiale. Les formes linéaires $x_j^* : \sum_{i \in I} \alpha_i x_i = x \rightarrow \alpha_j = \langle x_j^*, x \rangle$ sont donc continues sur E . On en déduit aisément le résultat suivant : si φ est une application injective de N dans I telle qu'une série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\varphi(n)} x_{\varphi(n)}$ converge [où $(\alpha_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$

est une suite scalaire] alors la famille $(\alpha_{\varphi(n)} x_{\varphi(n)})_{n \in N}$ est sommable dans E . Rappelons enfin le théorème d'Orlicz : dans un espace de Hilbert, toute famille sommable $(x_i)_{i \in I}$ vérifie $\sum_{i \in I} \|x_i\|^2 < \infty$.

Notation : L^p désigne dans la suite l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ où μ est une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) .

Le théorème 3 entraîne que sur un espace de Hilbert toute probabilité cylindrique de type et cotype p , avec $p \neq 2$, est de cotype 0. En fait pour $p > 2$, les sous-espaces de L^p qui ont la topologie de L^0 sont les sous-espaces hilbertisables de L^p :

Théorème 4 : Soit $p > 2$, R un sous-espace fermé de L^p . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) R est hilbertisable.
- ii) R a la topologie de L^0 . (i.e. $\exists \varepsilon > 0$ tel que $R \subset M_\varepsilon^p$)
- iii) Il existe une constante C telle que :

$$\|x\|_{L^2} \leq \|x\|_{L^p} \leq C \|x\|_{L^2} \quad \text{pour tout élément } x \text{ de } R.$$

- iv) Il existe $\varepsilon > 0$ et une base inconditionnelle $(r_i)_{i \in I}$ de R telle que :

$$\forall i \in I \quad r_i \in M_\varepsilon^p .$$

Lemme 3 : Pour tout $p > 2$, il existe une constante B_p telle que pour toute suite finie $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans L^p , on a :

$$\left(\int dt \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t) \varphi_i \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \leq B_p \left(\sum_{i=1}^{i=n} \|\varphi_i\|_{L^p}^2 \right)^{1/2}$$

où $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des variables de Rademacher sur $((0,1), dt)$.

Démonstration du lemme : Par les inégalités de Khintchine (cf.[5]) on a :

$$\begin{aligned} \left(\int dt d\mu(\omega) \left| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i(t) \varphi_i(\omega) \right|^p \right)^{1/p} &\leq B_p \left[\int d\mu(\omega) \left(\sum_{i=1}^{i=n} |\varphi_i(\omega)|^2 \right)^{p/2} \right]^{1/p} \\ &\leq B_p \left[\sum_{i=1}^{i=n} \left(\int |\varphi_i|^p d\mu \right)^{2/p} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

cqfd.

Démonstration du théorème :

i) \Rightarrow ii) : par le théorème 3 car l^p n'est pas hilbertisable.

ii) \Rightarrow iii) : par la proposition 2

iii) \Rightarrow iv) : En effet R considéré comme sous-espace de L^2 admet une base orthonormale (donc inconditionnelle) $(r_i)_{i \in I}$; comme R a la topologie de L^2 , c'est aussi une base inconditionnelle de $R \subset L^p$. De plus, par la proposition 2, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall i \in I, r_i \in M_\varepsilon^p$.

iv) \Rightarrow i) : On peut supposer que $\|r_i\|_{L^p} = 1 \quad \forall i \in I$. On va montrer que $(r_i)_{i \in I}$ est équivalente à la base canonique de $l^2(I)$.

- Supposons d'abord que la famille $(\alpha_i r_i)_{i \in I}$ est sommable dans L^p , alors elle est a fortiori sommable dans L^2 , donc par le théorème d'Orlicz

$$\sum_{i \in I} \|\alpha_i r_i\|_{L^2}^2 < \infty, \text{ d'où}$$

$$\sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 = \sum_{i \in I} \|\alpha_i r_i\|_{L^p}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{i \in I} \|\alpha_i r_i\|_{L^2}^2 < \infty$$

- Réciproquement si $\sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 < \infty$, alors $\sum_{i \in I} \|\alpha_i r_i\|_{L^p}^2 < \infty$. On pose

$J = \{i \in I \mid \alpha_i \neq 0\}$, J est au plus dénombrable. Soit φ une application injective de \mathbb{N} dans I telle que $\varphi(\mathbb{N}) \supset J$. D'après le lemme 3, la suite $\sum_{k=1}^n \alpha_{\varphi(k)} r_{\varphi(k)} \varepsilon_k(\cdot)$ converge dans $L^p([0,1]dt, L^p)$, il existe donc une sous-suite convergeant dans L^p pour presque tout t . Soit $t_0 \in [0,1]$, tel que cette sous-suite converge ; par la continuité des formes linéaires r_i^* sur $[r_i]$, la limite ne peut être que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\varphi(n)} r_{\varphi(n)} \varepsilon_n(t_0)$; enfin comme

$(r_i)_{i \in I}$ est une base inconditionnelle de R , $(\varepsilon_n(t_0) \alpha_{\varphi(n)} r_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable dans L^p , donc $(\alpha_{\varphi(n)} r_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi et finalement $(\alpha_i r_i)_{i \in I}$ est sommable dans L^p . cqfd.

Remarques : 4 : $i \Leftrightarrow ii$ est encore vrai si on suppose seulement que μ est σ -finie sur (Ω, \mathcal{A}) .

5 : En montrant $iv \Rightarrow i$ on a montré en fait que si $(r_i)_{i \in I}$ est une base inconditionnelle normalisée de L^p ($p > 2$) $(r_i)_{i \in I}$ est équivalente à la base canonique de $l^2(I)$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $r_i \in M_\varepsilon^p \quad \forall i \in I$. On en déduit le résultat classique de Bari et Gelfand :

Corollaire 2 : Toutes les bases inconditionnelles normalisées d'un espace de Hilbert sont équivalentes.

Démonstration : On sait que si I et I' sont deux ensembles, $l^2(I)$ et $l^2(I')$ sont isomorphes si et seulement si I et I' sont équipotents. D'après la remarque 5, il suffit donc de plonger l'espace de Hilbert dans un espace L^p de probabilité (avec $p > 2$) pour obtenir le résultat.

Le corollaire suivant généralise les inégalités de Khintchine.

Corollaire 3 : Si $p > 2$, toute famille $(f_i)_{i \in I}$ de v.a.r indépendantes et centrées appartenant à L^p , est équivalente à la base canonique de $l^2(I)$ si et seulement si :

$$\sup_{i \in I} \frac{\|f_i\|_p}{\|f_i\|_2} < \infty \quad (\bullet)$$

(si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille équadistribuée, cette condition est évidemment réalisée).

Démonstration : En effet, on vérifie aisément (à l'aide des espérances conditionnelles) que $(f_i)_{i \in I}$ est basique inconditionnelle. La condition (\bullet) ne fait qu'exprimer (cf. Prop. 2) que $\{f_i | i \in I\}$ est inclus dans M_ε^p pour un ε positif.

Remarque 6 : Rosenthal dans [3] a étudié le sous-espace fermé engendré dans L^p par une suite de v.a.r $(f_n)_{n \geq 1}$ indépendantes et centrées. Il y montre notamment que celui-ci ne dépend à une isomorphie près que de la

suite des nombres $w_n = \frac{\|f_n\|_p}{\|f_n\|_2}$.

Proposition 7 : Soit $p > 2$, tout sous-espace hilbertisable de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est complété dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, si μ est une mesure σ -finie sur (Ω, \mathcal{A}) .

Démonstration : Il suffit de le montrer si μ est une probabilité. Soit R un sous-espace hilbertisable de L^p ; soit j l'injection de L^p dans L^2 ; on note k la restriction de j^{-1} au sous-espace $j(R)$ de L^2 . $k : j(R) \rightarrow L^p$

est continue puisque R a la topologie de L^2 . Soit P la projection orthogonale de L^2 sur $j(R)$, l'opérateur kPj de L^p dans L^p est une projection de L^p sur R .

Problème [1] : Est-ce qu'un sous-espace hilbertisable de L^p pour $1 < p < 2$ est nécessairement complété ? Rosenthal a montré ([4]) que cela était faux si $1 < p < \frac{4}{3}$, on ne connaît pas de contre-exemple si $\frac{4}{3} \leq p < 2$.

Notons qu'un sous-espace hilbertisable complété de L^1 est nécessairement de dimension finie (par exemple parce que $\mathfrak{L}(L^1, L^2) = \pi_0(L^1, L^2)$ comme on le verra plus tard).

Proposition 8 : Soit $S = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite basique normalisée dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, avec $p > 2$, équivalente à la base canonique de l^p ; alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas inclus dans M_ε^p .

Démonstration : En effet $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite basique inconditionnelle, il suffit donc d'appliquer la remarque 5.

proposition

Remarque 6 : Cette dernière/est une réciproque "forte" du théorème 3. Pour $1 \leq p < 2$, on peut démontrer en utilisant le lemme 7 de [2] qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans L^p telle que pour tout $\delta > 0$, il existe une sous-suite basique $(1 + \delta)$ -équivalente à la base de l^p , ne peut être incluse dans M_ε^p quand ε est positif. Ce qui est exactement la réciproque du théorème 3 quand $1 \leq p < 2$.

§ 3 SOUS-ESPACES REFLEXIFS DE L^1

Théorème 5 : Soit R un sous-espace fermé de L^1 , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) R est réflexif
- ii) R est de type 1.
- iii) R ne contient pas de sous-espace isomorphe à l^1 .
- iv) R ne contient pas de sous-espace isomorphe à l^1 et complété dans L^1 .

Démonstration : L'équivalence ii) \Leftrightarrow iii) \Leftrightarrow iv) est contenue dans la proposition 4. De plus i) \Rightarrow iii) est évident. Il suffit donc de montrer qu'un sous-espace fermé non réflexif R de L^1 contient une suite basique équivalente à la base canonique de l^1 .

Lemme 4 : Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base canonique de l^1 , soit $(k_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ et $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites croissantes d'entiers. On pose $\forall \nu \in \mathbb{N}$:

$$z_\nu = \sum_{k_\nu < i \leq k_{\nu+1}} a_i^{(\nu)} (e_{n_{2i}} - e_{n_{2i+1}})$$

avec $a_i^{(\nu)} \geq 0$ pour $k_\nu < i \leq k_{\nu+1}$ et $\sum_{k_\nu < i \leq k_{\nu+1}} a_i^{(\nu)} = 1$.

Alors $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ est une suite basique dans l^1 , équivalente à $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\|z_\nu^*\| = \frac{1}{2}$ pour tout entier ν .

Démonstration du lemme : C'est évident car

$$\left\| \sum_{\nu=1}^m t_\nu z_\nu \right\|_{l^1} = 2 \sum_{\nu=1}^m |t_\nu|.$$

Soit S la sphère unité de R, dire que R n'est pas réflexif équivaut à dire que S n'est pas équi-intégrable dans L^1 (critère de compacité de Dunford-Pettis). On suppose donc que :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \int_{\{|x| > a\}} |x| \, d\mu = \delta > 0.$$

Donc, il existe une suite de réels positifs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, croissante, tendant vers l'infini, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \delta - \frac{\delta}{2n} < \sup_{x \in S} \int_{\{|x| > a_n\}} |x| \, dP < \delta + \frac{\delta}{2n} \tag{*}$$

d'où une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans S telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \delta - \frac{\delta}{2n} < \int_{\{|x_n| > a_n\}} |x_n| \, dP < \delta + \frac{\delta}{2n} \tag{**}$$

On pose : $\hat{x}_n = x_n 1_{\{|x_n| > a_n\}}$, $\bar{x}_n = x_n - \hat{x}_n$.

. On a : $\forall \varepsilon > 0, m\{|\hat{x}_n| \geq \varepsilon \|\hat{x}_n\|\} \leq m\{|\hat{x}_n| \geq 0\} \leq m\{|x_n| > a_n\} \leq \frac{1}{a_n}$
 et comme $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, $\forall \varepsilon > 0 \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \notin M_\varepsilon^p$.

On peut donc (théorème 3) extraire de $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(\hat{x}_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$,
 basique, équivalente à la base canonique de l^1 puisque, d'après (**),
 $\frac{\delta}{2} \leq \|x_{n_i}\| \leq \frac{3\delta}{2}$.

. La suite $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable car : si $\bar{S} = \{\bar{x}_n | n \in \mathbb{N}\}$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \bar{S}} \int |x| dP &= \sup_{p > n} \int_{\{|\bar{x}_p| > a_n\}} |\bar{x}_p| d\mu = \sup_{p > n} \left(\int_{\{|\bar{x}_p| > a_n\}} |x_p| d\mu - \int_{\{|\bar{x}_p| > a_n\}} |x_p| d\mu \right) \\ &\leq \sup_{p > n} \left[\delta + \frac{\delta}{2n} - \left(\delta - \frac{\delta}{2p} \right) \right] \leq \frac{\delta}{n} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc on peut extraire de $(\bar{x}_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ une sous-suite notée \bar{x}_{n_k} qui converge
 faiblement, donc telle que $(\bar{x}_{n_{2k}} - \bar{x}_{n_{2k+1}})$ converge faiblement vers 0.

L'enveloppe convexe de cette dernière suite adhère fortement à 0. Il
 existe donc une suite croissante d'entiers $(k_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ et des nombres positifs
 $(a_i^{(\nu)})_{k_\nu < i \leq k_{\nu+1}}$ avec $\sum_{k_\nu < i \leq k_{\nu+1}} a_i^{(\nu)} = 1$ tels que si

$$z_\nu = \sum_{k_\nu < i \leq k_{\nu+1}} a_i^{(\nu)} (x_{n_{2i}} - x_{n_{2i+1}}) \text{ on a } \lim_{\nu \rightarrow \infty} \|z_\nu - \hat{z}_\nu\| = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\bar{z}_\nu\| = 0 \text{ avec :}$$

$$\hat{z}_\nu = \sum_{k_\nu < i \leq k_{\nu+1}} a_i^{(\nu)} (\hat{x}_{n_{2i}} - \hat{x}_{n_{2i+1}}) \text{ et } \bar{z}_\nu = z_\nu - \hat{z}_\nu ;$$

d'après le lemme 4, il est clair que $(\hat{z}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ est une suite basique
 équivalente à la base canonique de l^1 et que l'on peut en fait choisir
 $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \|\hat{z}_\nu^*\| \|\bar{z}_\nu\| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \|\hat{z}_\nu^*\| \|z_\nu - \hat{z}_\nu\| < 1 .$$

La suite $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ est alors (théorème 1) équivalente à $(\hat{z}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$. On a
 donc obtenu une suite basique dans R équivalente à la base canonique de
 l^1 . cqfd.

A l'aide de ce dernier théorème, on démontrera plus tard (cf. [2]) des résultats beaucoup plus précis sur les sous-espaces réflexifs de L^1 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. Kadec, A. Pelcynski : Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the space L_p . Studia Math. XXI, (1962), p. 161-176.
 - [2] H. P. Rosenthal : On subspaces of L^p . (A paraître).
 - [3] H. P. Rosenthal : On the subspaces of L^p ($p>2$) spanned by sequences of independent random variables. Israel J. Math. 8. 1970. p.273-303.
 - [4] H. P. Rosenthal : Projections onto translation invariant subspaces of $L^p(G)$. Mem. A. M. S. 63 (1966).
 - [5] L. Schwartz : Séminaire Schwartz 1969-70, exposé XXVI.
-