

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

**Bases, suites lacunaires dans les espaces  $L^p$ , d'après Kadec et Pelczynski**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1972-1973), exp. n° 18, p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1972-1973\\_\\_A18\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973__A18_0)

© Séminaire Maurey-Schwartz  
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES  
*17, rue Descartes*  
*75230 Paris Cedex 05*

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

BASES, SUITES LACUNAIRES DANS LES ESPACES  $L^p$   
D'APRES KADEC ET PELCZYNSKI

par G. PISIER

Exposé n° XVIII

21 Mars 1973



Soit  $\gamma : l^2 \hookrightarrow L^p([0,1]dt)$  le plongement gaussien canonique de  $l^2$  dans  $L^p([0,1]dt)$ . La probabilité cylindrique correspondante sur  $l^2$  est de type  $p$  et de cotype  $0$ , quel que soit  $p \geq 0$ . Cela signifie que, sur le sous-espace  $\gamma(H)$  de  $L^p$ , la topologie induite par  $L^p([0,1]dt)$ , coïncide avec la topologie induite par  $L^0([0,1]dt)$ . L'objet de cet exposé est l'étude, d'après Kadec et Pelczynski [2] de tels sous-espaces.

Nous aurons besoin de quelques résultats sur les bases dans les espaces  $L^p$ .

### § 1. BASES DANS LES ESPACES QUASI-NORMES

Soit  $E$  un espace vectoriel topologique. Une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  dans  $E$  est une base de  $E$  si tout élément de  $E$  peut s'écrire d'une manière unique comme somme d'une série convergente de la forme

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ , où  $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite de scalaires.

Une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  dans  $E$  est dite suite basique si c'est une base du sous-espace fermé engendré par les  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  que l'on note  $[x_n]$ . On définit alors des formes linéaires sur  $[x_n]$  par :

$$x_n^* \left( \sum_{i=1}^{i=\infty} \alpha_i x_i \right) = \alpha_n$$

Si  $E$  est un Banach, si  $\|x_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$ , il est bien connu que  $(x_n, n \in \mathbf{N})$  est équicontinue sur  $[x_n]$ . Plus précisément :

Proposition 1 : Soit  $E$  un espace quasi-normé complet, une suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'éléments non nuls de  $E$  est basique si et seulement si il existe une constante  $K$  telle que l'on ait :

$$\left\| \sum_{i=1}^{i=m} t_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{i=q} t_i x_i \right\| \quad (1)$$

pour tous entiers  $m, q$  avec  $q \geq m$  et toute suite scalaire  $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

La démonstration est facile. (1) ne fait que traduire

l'équivalence (obtenue par le théorème du graphe fermé) de la quasi-norme initiale avec la quasi-norme définie, si

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i, \text{ par } \|x\|_1 = \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|.$$

Corollaire 1 : Sous les hypothèses de la proposition 1 on a : si E est p-normé

$$\sup_{\substack{x \in [x_n] \\ \|x\| \leq 1}} |x_n^*(x)| = \|x_n^*\| \leq 2^{\frac{1}{p}} \frac{K}{\|x_n\|} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

en effet

$$\begin{aligned} \|x_n^*(x)x_n\|^p &\leq \left\| \sum_{i=1}^{i=n} x_i^*(x)x_i - \sum_{i=1}^{i=n-1} x_i^*(x)x_i \right\|^p \quad \forall n > 1 \\ &\leq 2K^p \|x\|^p \quad (\text{grâce à (1) avec } p \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

d'où  $\forall n \geq 1 : |x_n^*(x)| \leq 2^{\frac{1}{p}} \frac{K}{\|x_n\|} \|x\|$

Définition : Soient E, F deux espaces quasi-normés complets. Une suite basique  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  dans E et une suite basique  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  dans F sont dites équivalentes si pour toute suite scalaire  $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$  converge dans E si et seulement si la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$  converge dans F. Les espaces  $[x_n]$  et  $[y_n]$  sont alors isomorphes ; si U est l'isomorphisme de  $[x_n]$  sur  $[y_n]$  défini par  $Ux_n = y_n, \forall n \in \mathbf{N}$ , on dit que  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont  $\lambda$ -équivalentes si  $\|U\| \|U^{-1}\| \leq \lambda$ .

Les deux théorèmes suivants sont dûs à Bessaga et Pelczynski [1] ils permettent de construire de nouvelles suites basiques en "translatant" une suite basique donnée.

Théorème 1 : Soit E un espace p-normé complet,  $x_n$  une suite basique dans E. Si la suite  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  dans E vérifie  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^p \|x_n^*\|^p = \delta < 1$  alors  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite basique équivalente à  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

Soient  $i, n, m$  des entiers avec  $n \leq i \leq m$ , on a :

$$|t_i| = |x_i^* (\sum_{j=n}^{j=m} t_j x_j)| \leq \|x_i^*\| \|\sum_{j=n}^{j=m} t_j x_j\|$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\sum_{j=n}^{j=m} t_j y_j\|^p &\leq \|\sum_{j=n}^{j=m} t_j x_j\|^p + \sum_{j=n}^{j=m} |t_j|^p \|x_j - y_j\|^p \\ &\leq \|\sum_{j=n}^{j=m} t_j x_j\|^p (1 + \sum_{j=n}^{j=m} \|x_j^*\|^p \|x_j - y_j\|^p) \end{aligned}$$

soit

$$\|\sum_{j=n}^{j=m} t_j y_j\|^p \leq (1 + \delta) \|\sum_{j=n}^{j=m} t_j x_j\|^p \tag{2}$$

On a de même si  $n \leq q$  :

$$\|\sum_{j=n}^{j=q} t_j y_j\|^p \geq \|\sum_{j=n}^{j=q} t_j x_j\|^p (1 - \delta) \tag{3}$$

D'où avec les notations de (1) dans (2) et (3) :

$$\|\sum_{j=1}^{j=m} t_j y_j\| \leq K \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{p}} \|\sum_{j=1}^{j=q} t_j y_j\|.$$

Ce qui prouve que  $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite basique par la proposition 1. L'équivalence de  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  résulte de (2) et (3).

**Remarque 1** : Soit  $V$  l'isomorphisme de  $[x_n]$  sur  $[y_n]$  définie par  $V x_n = y_n$ , on a par (2) et (3)  $\|V\| \|V^{-1}\| \leq \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{1/p}$ ;  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sont donc  $\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{1/p}$  équivalentes.

**Théorème 2** : Soit  $E$  un espace de Banach et  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite basique dans  $E$  telle que  $[x_n]$  est complété - c'est-à-dire qu'il existe une projection  $U$  de  $E$  sur  $[x_n]$  - alors si  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite dans  $E$  vérifiant

$$\|U\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \|x_n - y_n\| = \delta < 1 \tag{4}$$

alors  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite basique et  $[y_n]$  est complété dans  $E$ .

D'après le théorème 1, comme  $\|U\| \geq 1$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite basique équivalente à  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

L'opérateur  $A : E \rightarrow E$ , défini par :

$$\forall x \in E : Ax = x - Ux + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(Ux) y_n$$

est un isomorphisme de  $E$  sur  $E$  ; en effet :  $Ux = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(Ux) x_n$  d'où

$$\|(I - A)x\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(Ux) (x_n - y_n) \right\| \text{ d'où } \|I - A\| \leq \delta < 1.$$

$A$  est donc inversible. De plus  $Ax_n = y_n$  ; l'opérateur  $A \cup A^{-1}$  est donc une projection de  $E$  sur  $[y_n]$ .

Remarque 2 :  $\|I - A\| \leq \delta$  entraîne  $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\delta}$  et  $\|A\| \leq 1 + \delta$  d'où  $\|A \cup A^{-1}\| \leq \|U\| \left( \frac{1+\delta}{1-\delta} \right)$  ; si  $[x_n]$  est  $(1 + \varepsilon)$ -complémenté, alors  $[y_n]$  est  $\left( \frac{1+\delta}{1-\delta} \right) (1 + \varepsilon)$  complémenté.

## § 2. APPLICATION AUX ESPACES $L^p$

Dans toute la suite,  $\Omega$  désigne un ensemble,  $\mathcal{Q}$  une tribu sur cet ensemble, et  $\mu$  une probabilité sur cette tribu. Pour simplifier nous noterons  $L^p$  l'espace  $L^p(\Omega, \mathcal{Q}, \mu)$ , pour  $p \geq 0$ . Nous noterons  $1_A$  la fonction indicatrice d'un ensemble  $A$ , et si  $f$  est une fonction sur  $\Omega$ ,  $\{f > a\}$  est l'ensemble  $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > a\}$ . Nous dirons qu'un sous-espace  $R$  de  $L^p$  "a la topologie de  $L^0$ ", si sa topologie est induite par la topologie de  $L^0$  ; cela signifie que la restriction à  $R$  de l'injection canonique  $L^p \rightarrow L^0$  est un isomorphisme d'e.v.t. ; cela peut s'écrire :

$$\exists \alpha \in ]0, 1[, M > 0 \text{ tels que } \forall r \in R,$$

$$J_\alpha(r) \geq M \|r\|_{L^p}.$$

Si on pose  $\varepsilon = \inf(\alpha, \mu)$ , on obtient une condition qui suffit encore à assurer que  $R$  a la topologie de  $L^0$  :

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \mu\{|r| \geq \varepsilon \|r\|_{L^p}\} \geq \varepsilon.$$

Cela nous conduit à introduire une classe de parties de  $L^p$  : on pose si  $p > 0$  et  $\varepsilon > 0$

$$M_\varepsilon^p = \{x \in L^p : \mu\{|x| \geq \varepsilon \|x\|_{L^p}\} \geq \varepsilon\}.$$

La proposition suivante montre que pour un sous-espace de  $L^p$ , "avoir la topologie de  $L^0$ " équivaut à "avoir la topologie de  $L^q$ " pour un  $q < p$ .

**Proposition** : Soit  $A$  une partie de  $L^p$  ( $p > 0$ ). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $\exists \varepsilon \in ]0, 1[$  tel que  $A \subset M_\varepsilon^p$  .  
 ii)  $\forall q < p$ , il existe une constante  $C_q$  telle que

$$\|a\|_{L^q} \leq \|a\|_{L^p} \leq C_q \|a\|_{L^q} \quad \forall a \in A.$$

- iii)  $\exists q < p$ , et il existe une constante  $C_q$  telle que

$$\|a\|_{L^q} \leq \|a\|_{L^p} \leq C_q \|a\|_{L^q} \quad \forall a \in A.$$

**Démonstration** :

$$i) \Rightarrow ii) : \|a\|_{L^q} = \left( \int |a|^q d\mu \right)^{1/q} \geq \varepsilon^{1 + \frac{1}{q}} \|a\|_{L^p} \quad \forall a \in A$$

ii)  $\Rightarrow$  iii) : trivial

iii)  $\Rightarrow$  i) : Supposons que l'on a :  $\|a\|_{L^p} \leq C_q \|a\|_{L^q}$  et  $a \notin M_\varepsilon^p$  (avec  $0 < \varepsilon < 1$ ); alors si on pose  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$  et  $S_a = \{|a| \geq \varepsilon \|a\|_p\}$ , on a :

$$\begin{aligned} \|a\|_{L^q}^q &= \int_{S_a} |a|^q d\mu + \int_{\complement S_a} |a|^q d\mu \\ &\leq \int_{S_a} |a|^q d\mu + \varepsilon^q \|a\|_p^q \end{aligned} \tag{5}$$



Par l'inégalité de Hölder, on a :

$$\| a 1_{S_a} \|_{L^q} \leq \| a \|_{L^p} \| 1_{S_a} \|_{L^r}$$

soit

$$\left( \int_{S_a} |a|^q d\mu \right)^{1/q} \leq \| a \|_{L^p} \mu(S_a)^{1/r}$$

d'où avec (5)

$$\| a \|_{L^q}^q \leq \| a \|_{L^p}^q [\mu(S_a)^{q/r} + \varepsilon^q].$$

Mais  $a \notin M_\varepsilon^p$  signifie que  $\mu(S_a) < \varepsilon$  d'où si  $\delta = \frac{1}{q} \inf(\frac{q}{r}, q)$ ,

$$\frac{1}{C_q} \| a \|_{L^p} \leq \| a \|_{L^q} < \| a \|_{L^p} 2^{1/q} \varepsilon^\delta$$

d'où nécessairement ( $a \neq 0$ )  $\varepsilon > \varepsilon_0 = \left( \frac{1}{2^{1/q} C_q} \right)^{1/\delta}$

on a donc finalement

$$\| a \|_{L^p} \leq C_q \| a \|_{L^q} \Rightarrow a \in M_\varepsilon^p \text{ pour tout } \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

**Lemme 1** : Les cônes  $M_\varepsilon^p$  ont les propriétés suivantes ( $p > 0$ ) :

a - Si  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$   $M_{\varepsilon_1}^p \supset M_{\varepsilon_2}^p$

b -  $\bigcup_{0 < \varepsilon < 1} M_\varepsilon^p = L^p$

c - Si  $x \notin M_\varepsilon^p$ , il existe un ensemble  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $\mu(A) < \varepsilon$  et  $\int \left( \frac{|x|}{\|x\|_p} \right)^p d\mu > 1 - \varepsilon^p$

Montrons c : on pose  $A = \{ |x| \geq \varepsilon \|x\|_p \}$ ;  $x \notin M_\varepsilon^p \Rightarrow x \neq 0$  et  $\mu(A) < \varepsilon$ ,

$$\int_{A^c} \left( \frac{|x|}{\|x\|_p} \right)^p d\mu < \varepsilon^p \text{ donc } \int_A \left( \frac{|x|}{\|x\|_p} \right)^p d\mu > 1 - \varepsilon^p.$$

**Lemme 2** : Soit  $p > 0$ , soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$ , deux à deux disjoints,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $L^p$  telle que  $\|u_n\|_p = 1$  et

$u_n = 1_{A_n} u_n$  pour tout entier  $n$ . Alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite basique dans

$L^p$ , 1-équivalente à la base canonique de  $l^p$ . De plus si  $p \geq 1$ ,  $[u_n]$  est 1-complémenté dans  $L^p$ .

$$\text{On a : } \left\| \sum_{i=1}^{i=n} t_i u_i \right\|_p = \left( \sum_{i=1}^{i=n} |t_i|^p \right)^{1/p} \text{ d'où la première partie de l'énoncé (avec } \|u_n^*\| = 1 \text{ pour tout entier } n).$$

Si  $p \geq 1$ , soit  $u'_n \in L^{p'}$  telle que

$$\|u'_n\|_{p'} = \langle u'_n, u_n \rangle = 1 ;$$

si on pose  $\forall x \in L^p \quad Px = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u'_n, x \rangle u_n$ , on vérifie aisément que  $P$  projette  $L^p$  sur  $[u_n]$  et que  $\|P\| = 1$ .

Nous pouvons démontrer le principal résultat de [2].

**Théorème 3** : Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $L^p$  avec  $p > 0$  (resp :  $p \geq 1$ ) telle que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  n'est pas inclus dans  $M_\varepsilon^p$ . Alors pour tout  $\delta > 0$ , il existe une suite extraite  $y_k = x_{n_k}$  telle que  $(\frac{y_k}{\|y_k\|_p})_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite basique  $(1 + \delta)$  équivalente à la base canonique de  $l^p$  (resp : et telle que  $[y_n]$  est  $(1 + \delta)$ -complémenté dans  $L^p$ ).

**Démonstration** : On va extraire de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite "translatée" d'une suite basique qui vérifie les hypothèses du lemme 2.

Si  $x \in L^p$ , la fonction d'ensemble  $A \rightarrow \int_A |x|^p d\mu$  est absolument continue par rapport à  $\mu$  ; soit  $\eta$  positif donné avec  $\eta(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^{p-1}}) < 1$  et  $\eta < 1$ .

On peut construire par récurrence une suite extraite de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  soit  $x_{n_k} = y_k$  et une suite d'ensembles  $A'_k$  dans  $\mathcal{C}$  tels que :

$$\int_{A'_k} \left( \frac{y_k}{\|y_k\|_p} \right)^p d\mu > 1 - \eta 4^{-(k+1)p} \tag{4}$$

$$\int_{A'_{k+1}} \sum_{i=1}^{i=k} \left( \frac{|y_i|}{\|y_i\|_p} \right)^p d\mu < \eta 4^{-(k+1)p} \tag{5}$$

[On utilise pour cela le lemme 1 : 1 c assure l'existence d'éléments vérifiant (4) et (5), 1 a et 1 b permettent de choisir  $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ ]

$$\text{On pose alors } A_k = A'_k - \bigcup_{i=k+1}^{\infty} A'_i \text{ et } z_k = \frac{y_k}{\|y_k\|_p} 1_{A_k} .$$

On a :

$$1 \geq \|z_k\|_p^p = \int_{A_k} \left| \frac{y_k}{\|y_k\|_p} \right|^p d\mu \geq \int_{A'_k} \left( \frac{|y_k|}{\|y_k\|_p} \right)^p - \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_{A'_i} \left| \frac{y_k}{\|y_k\|_p} \right|^p d\mu$$

soit par (4) et (5)

$$(6) \quad 1 \geq \|z_k\|_p^p \geq 1 - \eta 4^{-(k+1)p} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \eta 4^{-ip} \geq 1 - \eta 4^{-kp} \left[ \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^{p-1}} \right]$$

(6) entraîne en particulier que  $\|z_k\|_p \neq 0$  ; si on pose  $u_k = \frac{z_k}{\|z_k\|_p}$ ,  $u_k$  vérifie les hypothèses du lemme 2.

On a :

$$(7) \quad \left\| \frac{y_k}{\|y_k\|_p} - z_k \right\|_p^p = \int_{A_k} \left( \frac{|y_k|}{\|y_k\|_p} \right)^p d\mu \leq \int_{A'_k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_{A'_i} < \eta 4^{-(k+1)p} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \eta 4^{-ip} = \eta 4^{-kp} \left( \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^{p-1}} \right)$$

On a donc si  $p \geq 1$

$$\forall k \geq 1 \quad \left\| \frac{y_k}{\|y_k\|_p} - u_k \right\|_p \leq \left\| \frac{y_k}{\|y_k\|_p} - z_k \right\|_p + \|z_k - u_k\|_p$$

d'où par (6) et (7), comme  $\|z_k - u_k\|_p = 1 - \|z_k\|_p \leq 1 - \|z_k\|_p^p$

$$\left\| \frac{y_k}{\|y_k\|_p} - u_k \right\|_p < \eta^{1/p} 4^{-k} + \eta^{1/p} 4^{-k}$$

et avec les notations du lemme (2) :

$$(8) \quad \|p\| \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{y_k}{\|y_k\|_p} - u_k \right\|_p \|u_k^*\| < \eta^{1/p} \frac{2}{3} < 1.$$

De même pour  $0 < p < 1$  :

$$\|z_k - u_k\|_p^p = (1 - \|z_k\|_p)^p \leq \left[ \frac{\eta}{p} 4^{-kp} \left( \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^{p-1}} \right) \right]^p$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{y_k}{\|y_k\|_p} - u_k \right\|_p^p &\leq \left\| \frac{y_k}{\|y_k\|_p} - u_k \right\|_p^p + \|z_k - u_k\|_p^p \\ &< \eta 4^{-kp} \left( \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^{p-1}} \right) + \left[ \frac{\eta}{p} 4^{-kp} \left( \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^{p-1}} \right) \right]^p \end{aligned}$$

d'où

$$(9) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k^*\|_p^p \left\| \frac{y_k}{\|y_k\|_p} - u_k \right\|_p^p \leq K_p \eta + K'_p \eta^p, \quad \text{où } K_p \text{ et } K'_p$$

ne dépendent que de  $p$  ; on obtient donc le résultat dès que  $K_p \eta + K'_p \eta^p < 1$ .

Enfin il suffit de se référer aux remarques 1 et 2 pour prouver que si  $\eta$  est assez petit, la condition de l'énoncé relative à  $\delta$  est vérifiée.

**Proposition 3** : Si  $0 < p < 2$ ,  $l^p$  n'est pas de type  $p$ .

Démonstration : Soit  $(e_i)_{i \in \mathbf{N}}$  la base canonique de  $l^p$ , soit  $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$  une suite stable d'ordre  $p$ . Si  $l^p$  était de type  $p$ , on aurait :

$\forall \alpha \in ]0, 1[$ ,  $\exists K_\alpha > 0$  telle que :

$$J_\alpha \left( \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i e_i f_i(t) \right\|_p, dt \right) \leq K_\alpha \left( \sum_{i=1}^{i=n} \|\alpha_i e_i\|_{\rho^p}^p \right)^{1/p}$$

pour toute suite scalaire  $(\alpha_i)_{i \in \mathbf{N}}$  ; soit

$$J_\alpha \left( \left( \sum_{i=1}^{i=n} |\alpha_i f_i(t)|^p \right)^{1/p}, dt \right) \leq K_\alpha \left( \sum_{i=1}^{i=n} |\alpha_i|^p \right)^{1/p}$$

Or la condition  $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty$  ne suffit pas en général à entraîner la convergence p.s de  $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i f_i(t)|^p$  ; en effet  $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i f_i(t)|^p < \infty$  p.s équivaut à  $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p (1 + |\text{Log } \frac{1}{\alpha_i}|) < \infty$ . (cf. [4] prop. XXVI. 3.3).

**Proposition 4** : Soit  $p \in ]0,2[$  (resp.  $p \in [1,2[$ ) et  $R$  un sous-espace fermé de  $L^p$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- a)  $R$  est de type  $p$ .
- b)  $R$  ne contient pas de sous espace isomorphe à  $l^p$ .
- (resp. b')  $R$  ne contient pas de sous espace complété isomorphe à  $l^p$ .
- c)  $R$  a la topologie de  $L^0$ .

**Démonstration** :

- a)  $\Rightarrow$  b) résulte de la proposition 3
- b)  $\Rightarrow$  b') est trivial .
- b')  $\Rightarrow$  c) résulte du théorème 3.
- c)  $\Rightarrow$  a) a été démontré précédemment (cf. [3] prop. 2).

**Remarque 3** : Comme  $l^2$  est de type 2,  $a \Rightarrow b$  est faux pour  $p = 2$ . D'ailleurs on ne peut obtenir de caractérisation analogue à la proposition 4 qui ne fasse intervenir que la structure de  $R$  à une isomorphie près ; car, par exemple,  $L^2([0,1], dt)$  (qui n'a pas la topologie de  $L^0([0,1], dt)$ !) contient un sous-espace fermé qui lui est isométrique et qui a la topologie de  $L^0([0,1], dt)$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Bessaga , A. Pelczynski : On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. *Studia Math.* XVII (1958). p.151-164.
- [2] I. Kadec, A. Pelczynski : Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the space  $L_p$ . *Studia Math.* XXI, (1962), p.161-176.
- [3] B. Maurey : Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73, exposés X-XI.
- [4] L. Schwartz : Séminaire Schwartz 1969-70, exposé XXVI.