

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

**Théorèmes de factorisation pour les opérateurs à
valeurs dans un espace L^p**

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 17, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973____A17_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

THEOREMES DE FACTORISATION POUR LES OPERATEURS
A VALEURS DANS UN ESPACE L^p

par B. MAUREY

Dans l'exposé XV, nous avons démontré que tout opérateur linéaire et continu d'un espace E de type q dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ se factorise par $L^q(\Omega, \mu)$ et la multiplication par une fonction de $L^r(\Omega, \mu)$, $0 < p \leq q \leq 2$, $1/p = 1/q + 1/r$. Dans cet exposé, nous allons examiner les rapports entre ce type de théorème de factorisation et certaines propriétés des opérateurs p -sommants.

Proposition 1 : Soient p et q deux nombres réels tels que $0 < p \leq q \leq +\infty$ C une constante ≥ 0 , et E un espace de Banach vérifiant l'hypothèse suivante :

a) Tout opérateur linéaire continu u de E' dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ (μ quelconque) admet la factorisation $u = T_g \circ v$, où v est un opérateur linéaire continu de E' dans $L^q(\Omega, \mu)$, T_g l'opérateur de multiplication par $g \in L^r(\Omega, \mu)$, $1/p = 1/q + 1/r$, et :

$$\|g\|_{L^r} \leq 1 ; \|v\| \leq C \|u\|$$

Dans ces conditions on a pour tout espace quasi-normé F l'égalité $\pi_q(E, F) = \pi_p(E, F)$, avec plus précisément :

$$\forall w \in \pi_q(E, F), \quad \pi_p(w) \leq C \pi_q(w)$$

Nous démontrerons d'abord un lemme :

Lemme : Sous l'hypothèse a), on a la propriété suivante : toute suite $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E peut s'écrire $x_i = \alpha_i y_i$, avec α_i réel, $y_i \in E$, et :

$$\sum |\alpha_i|^r \leq 1 ; \quad \|(y_i)\|_q^* \leq C \|(x_i)\|_p^*$$

Démonstration : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une suite de vecteurs de E que l'on peut supposer non nuls. Désignons par l_n^p l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la (quasi)-norme $(\sum_{i=1}^n |c_i|^p)^{1/p}$. On définit un opérateur u de E' dans l_n^p par :

$$u(\xi) = (\langle x_i, \xi \rangle)$$

Par hypothèse on peut factoriser u sous la forme

$u = \alpha \circ v$, où $v \in L(E', l_n^q)$ et où α est un opérateur diagonal de multiplication, avec :

$$\sum |\alpha_i|^r \leq 1 ; \quad \|v\| \leq C \|u\|$$

Posons alors $y_i = \alpha_i^{-1} x_i$ (α_i est non nul, car nous avons supposé x_i non nul). On voit que l'opérateur v est défini par :

$$v(\xi) = (\langle y_i, \xi \rangle), \text{ donc :}$$

$$\|(y_i)\|_q^* = \|v\| \leq C \|u\| = C \|(x_i)\|_p^*, \text{ ce qui démontre le lemme.}$$

Démontrons maintenant la proposition : soient F un espace quasi-normé, $w \in \pi_q(E, F)$, et $(x_1, \dots, x_n)$ une suite de vecteurs de E . Ecrivons $x_i = \alpha_i y_i$, la décomposition ayant les propriétés énoncées dans le lemme. Nous aurons d'après l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} (\sum \|w(x_i)\|^p)^{1/p} &= (\sum \|\alpha_i w(y_i)\|^p)^{1/p} \\ &\leq (\sum |\alpha_i|^r)^{1/r} (\sum \|w(y_i)\|^q)^{1/q} \leq \pi_q(w) \|(y_i)\|_q^* \leq C \pi_q(w) \|(x_i)\|_p^*, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\pi_p(w) \leq C \pi_q(w)$.

Remarque 1 : On peut intervertir les rôles de E et E' dans la proposition 1 : si E vérifie a), on aura $\pi_q(E', F) = \pi_p(E', F)$. Cela résulte de la densité de la boule de E dans celle de E'' pour $\sigma(E'', E')$, qui implique :

$$\sup_{\|x\|_{E'} \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x, \xi_i \rangle|^p \right)^{1/p} = \sup_{\|x\|_{E''} \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x, \xi_i \rangle|^p \right)^{1/p}$$

Nous allons voir que la réciproque de la proposition 1 est vraie (moyennant une hypothèse additionnelle si $p < 1$).

Théorème : Soient p et q deux membres réels tels que $0 < p \leq q \leq \infty$, C une constante ≥ 0 et E un espace de Banach (tel que E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique si $p < 1$). Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Tout opérateur linéaire continu u de E' dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ (μ quelconque) admet la factorisation $u = T_g \circ v$, où $v \in L(E', L^q(\Omega, \mu))$, et :

$$\|g\|_{L^r} \leq 1 \quad ; \quad \|v\| \leq C\|u\|$$

b) Toute suite $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E peut s'écrire $x_i = \alpha_i y_i$, avec $\sum |\alpha_i|^r \leq 1$ et :

$$\|(y_i)\|_q^* \leq C\|(x_i)\|_p^*$$

c) Pour tout espace quasi-normé F et tout opérateur $w \in \pi_q(E, F)$, on a :

$$\pi_p(w) \leq C\pi_q(w)$$

Démonstration : Nous avons déjà vu $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c)$. Montrons $c) \Rightarrow a)$, en supposant d'abord que μ soit une probabilité. Soit u un opérateur linéaire de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$. L'opérateur u définit une probabilité cylindrique λ de type p sur E , telle que :

$$\xi(\lambda) = u(\xi)(\mu) \quad ; \quad \|\lambda\|_p^* = \|u\| \quad (\text{cf. exposé IV}).$$

Soit $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ une suite d'éléments de E' . On considère l'opérateur w de E dans l_n^q défini par :

$$w(x) = (\langle x, \xi_i \rangle)$$

On vérifie facilement que $\pi_q(w) \leq (\sum \|\xi_i\|^q)^{1/q}$. (En décomposant w sous la forme :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad (\|\xi_i\|) \quad} & l_n^q \\ x & \xrightarrow{\quad \langle x, \|\xi_i\|^{-1} \cdot \xi_i \rangle \quad} & \langle x, \xi_i \rangle \end{array} \quad)$$

On a donc d'après c) $\pi_p(w) \leq C(\sum \|\xi_i\|^q)^{1/q}$. D'après l'exposé III, prop. (III, 3.1), l'opérateur w est p -radonifiant dans le cas $p \geq 1$ (suppression du bidual ici!), et dans le cas $p < 1$, nous avons supposé que E' vérifie l'hypothèse d'approximation (ce qui l'implique pour le cou-

ple (E, E') d'après S. Simmons) . On aura donc :

$$\|w(\lambda)\|_p \leq \pi_p(w) \|\lambda\|_p^* \leq C \|u\| (\sum \|\xi_i\|^q)^{1/q}$$

Considérons l'application φ de Ω dans l_n^q définie par :

$$\omega \longrightarrow (u(\xi_i)(\omega))$$

On a $w(\lambda) = \varphi(\mu)$. Pour le voir, il suffit de montrer que $c(w(\lambda)) = c(\varphi(\mu))$ pour tout $c \in l_n^{q'}$. Or :

$$\begin{aligned} c(w(\lambda)) &= {}^t w(c)(\lambda) = (\sum c_i \xi_i)(\lambda) = u(\sum c_i \xi_i)(\mu) = \\ &(\sum c_i u(\xi_i))(\mu) = c \circ \varphi(\mu) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\|w(\lambda)\|_p = (\int \|\varphi(\omega)\|^p d\mu(\omega))^{1/p} = (\int (\sum |u(\xi_i)(\omega)|^q)^{p/q} d\mu(\omega))^{1/p}$$

Le résultat découle maintenant du théorème 1 de l'exposé XV, puisque l'on a pour toute suite $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ dans E' :

$$(\int (\sum |u(\xi_i)|^q)^{p/q} d\mu)^{1/p} \leq C \|u\| (\sum \|\xi_i\|^q)^{1/q}$$

Supposons maintenant que μ soit une mesure quelconque, et soit u un opérateur linéaire continu de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$. Si $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ est une suite d'éléments de E' , on peut trouver une fonction $k \geq 0$ sur Ω , telle que $\int k d\mu = 1$, et que :

$$U\{|u(\xi_i)| > 0\} \subset \{k > 0\} = A$$

Considérons l'opérateur $\tilde{k}$ de $L^p(\Omega, \mu)$ dans $L^p(\Omega, k\mu)$ défini par :

$$f \longrightarrow \chi_A k^{-1/p} f ; \text{ on a } \|\tilde{k}\| \leq 1.$$

D'après la première partie de la démonstration l'opérateur $\tilde{k} \circ u$ vérifie la condition de factorisation :

$$\left(\int (\sum |\tilde{k} \circ u(\xi_i)|^q)^{p/q} d(k\mu) \right)^{1/p} \leq C \|\tilde{k} \circ u\| (\sum \|\varepsilon_i\|^q)^{1/q}$$

Mais puisque $\{|u(\xi_i)| > 0\} \subset A$, on a :

$$\left(\int (\sum |\tilde{k} \circ u(\xi_i)|^q)^{p/q} d(k\mu) \right)^{1/p} = \left(\int (\sum |u(\xi_i)|^q)^{p/q} d\mu \right)^{1/p},$$

ce qui prouve que la condition de factorisation est réalisée pour u lui-même, et la démonstration est terminée.

Remarque 2 : Dans le théorème 1, on peut encore échanger les rôles de E et E' . Compte tenu de la remarque 1, il suffit de voir que si $\pi_q(E', F) = \pi_p(E', F)$ pour tout F , tout opérateur linéaire continu u de E dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$ se factorise par $L^q(\Omega, \mu)$. (Alors le théorème 1 fournit la réponse pour les opérateurs de E'' dans $L^p(\Omega, \mu)$). C'est donc trivial pour $p > 1$, car u se prolonge à E'' par bitransposition. Ce sera encore vrai si u est limite simple d'opérateurs (u_i) de norme $\leq \|u\|$ prolongeables à E'' avec conservation de la norme, (car la condition de factorisation passe à la limite simple), en particulier d'opérateurs (u_i) de rang fini, de norme $\leq \|u\|$. Cela règle le cas $p = 1$ (car L^1 vérifie l'hypothèse d'approximation métrique), et le cas $p < 1$, si l'on fait l'hypothèse d'approximation métrique sur E .
