

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. T. LAPRESTÉ

Opérateurs se factorisant par un espace L^p , d'après S. Kwapien

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 16, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973___A15_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

OPERATEURS SE FACTORISANT PAR UN ESPACE L^p

D'APRES S. KWAPIEN

par J. T. LAPRESTÉ

Cet exposé est la suite de l'exposé XIII, dont on reprend les notations.

§ 1 MAXIMALITE DE $\Gamma_{r,s}$

On a démontré dans l'exposé XIII, que

$$\left(\prod_{p,r,s} \pi_{p,r,s}\right) = (\Gamma_{s,r}^*, \gamma_{s,r}^*).$$

Nous allons démontrer maintenant que $\left(\prod_{p,r,s}^* \pi_{p,r,s}\right) = (\Gamma_{s,r}, \gamma_{s,r})$.

1.1 Rappelons tout d'abord la définition et les propriétés élémentaires des ultraproducts : [cf [1]].

Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces de Banach indexée par un ensemble I préordonné filtrant, on désignera par $l_\infty(E_i)_I$ l'espace des familles $x = (x_i)_{i \in I}$ avec $x_i \in E_i$ et $\sup \|x_i\| < +\infty$.

Soit \mathfrak{U} un ultrafiltre tendant vers l'infini sur I ; on définit une semi-norme sur $l_\infty(E_i)_I$ par

$$\|x\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|x_i\|$$

On désignera par $\left(\prod E_i\right)/\mathfrak{U}$ (ultraproduit) le quotient complété de $l_\infty(E_i)_I$ par cette semi-norme.

Si nous supposons données à présent une autre famille F_i d'espaces de Banach, et une famille u_i d'opérateurs linéaires de E_i dans F_i respectivement, on peut si u_i est uniformément bornée en déduire de manière naturelle un opérateur

$$u = \prod u_i / \mathfrak{U}$$

de $\left(\prod E_i\right)/\mathfrak{U}$ dans $\prod F_i / \mathfrak{U}$ vérifiant de plus

$$\|u\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|u_i\| < +\infty.$$

Démontrons à présent que $\Gamma_{r,s}$ est stable par ultraproduit :

1.2 Proposition : Supposons donné pour chaque $i \in I$ un opérateur $u_i \in L(E_i, F_i)$, tel que $\gamma_{r,s}(u_i) \leq 1$, et F_i étant supposé réflexif. On a alors :

$$\gamma_{r,s}(\prod u_i/\mathfrak{A}) \leq 1$$

Δ Par hypothèse on a pour chaque $i \in I$ une factorisation :

$$E_i \xrightarrow{A_i} L^r(\Omega_i, \mu_i) \xrightarrow{M_{\varphi_i}} L^{s'}(\Omega_i, \mu_i) \xrightarrow{B_i} F_i,$$

avec $\|A_i\| \leq 1 + \varepsilon$, $\|B_i\| \leq 1 + \varepsilon$, et où M_{φ_i} est la multiplication par une fonction φ_i que nous pouvons supposer positive,

$$\|\varphi_i\|_{L^p} \leq 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

Par passage à l'ultraproduit on en déduit :

$$\prod E_i/\mathfrak{A} \xrightarrow{A} L^r(\Omega_1, \mu_1)/\mathfrak{A} \xrightarrow{M} L^{s'}(\Omega_1, \mu_1)/\mathfrak{A} \xrightarrow{B} \prod F_i/\mathfrak{A},$$

avec $\|A\| \leq 1 + \varepsilon$, $\|B\| \leq 1 + \varepsilon$ et $\|M\| \leq 1$.

Mais on sait d'après [1] que $\prod L^r(\Omega_i, \mu_i)/\mathfrak{A}$ et $\prod L^{s'}(\Omega_i, \mu_i)/\mathfrak{A}$ s'identifient respectivement à des espaces $L^r(\Omega_1, \mu_1)$ et $L^{s'}(\Omega_2, \mu_2)$.

Dans le cas $r = s'$, la démonstration est achevée puisque $\prod u_i/\mathfrak{A}$ se factorise par un espace L^r . Dans le cas $s' < r$, le résultat découlera de la proposition suivante :

1.3 Proposition : Soit pour chaque $i \in I$ M_i un opérateur positif de $L^r(\Omega_i, \mu_i)$ dans $L^{s'}(\Omega_i, \mu_i)$, tel que $\|M_i\| \leq 1$. On a alors :

$$\gamma_{r,s}(\prod M_i/\mathfrak{A}) \leq 1.$$

Δ Les espaces $\prod L^r/\mathcal{A}$ et $\prod L^{s'}/\mathcal{A}$ sont des espaces réticulés pour l'ordre défini par $f \leq g$ si et seulement si il existe des représentants (f_i) et (g_i) de f et g tels que $f_i \leq g_i$ pour chaque $i \in I$.

Il en résulte aussitôt que $M = \prod M_i/\mathcal{A}$ est un opérateur positif. De plus, l'identification de $\prod L^r/\mathcal{A}$ et $\prod L^{s'}/\mathcal{A}$ à des espaces $L^r(\Omega_1, \mu_1)$ et $L^{s'}(\Omega_2, \mu_2)$ respecte l'ordre que nous avons défini (cf [1]). Par conséquent M est un opérateur positif de norme ≤ 1 , de $L^r(\Omega_1, \mu_1)$ dans $L^{s'}(\Omega_2, \mu_2)$. D'après l'exposé XV, corollaire du théorème 1, l'opérateur M admet la factorisation

$$L^r(\Omega_1, \mu_1) \xrightarrow{v} L^r(\Omega_2, \mu_2) \xrightarrow{M \circ \varphi} L^{s'}(\Omega_2, \mu_2),$$

avec $\|v\| \leq \|M\| \leq 1$; $\|\varphi\|_{L^p} \leq 1$, donc $\gamma_{r,s}(M) \leq 1$. ▼

1.4 Théorème : L'idéal $(\Gamma_{r,s}, \gamma_{r,s})$ est maximal.

Soient E et F deux espaces de Banach. Désignons par I l'ensemble des couples (M, N) ou M (resp. N) est un sous-espace de dimension finie (resp. codimension finie) de E (resp F), ordonné par

$$(M, N) < (M_1, N_1)$$

si et seulement si M est un sous-espace de M_1 et N_1 un sous-espace de N .

Soit \mathcal{U} un ultrafiltre tendant vers l'infini sur I . Si $i = (M, N)$ convenons de poser $M = M_i$, $N = N_i$.

Soit u un opérateur linéaire de E dans F , tel que pour tous couples X, Y d'espaces de dimension finie et A, B d'opérateurs avec $A \in L(X, E)$, $B \in L(F, Y)$, on ait :

$$\gamma_{r,s}(B \circ u \circ A) \leq 1.$$

Nous devons montrer que $\gamma_{r,s}(u) \leq 1$ [XIII, 2.2 ②]. Par hypothèse on a pour chaque $i \in I$ un opérateur u_i de M_i dans F/N_i avec $\gamma_{r,s}(u_i) \leq 1$ on en déduit pour l'opérateur

$$\tilde{u} = \prod u_i/\mathcal{A} \quad \text{de} \quad (\prod M_i)/\mathcal{A} \quad \text{dans} \quad (\prod F/N_i)/\mathcal{A}$$

l'inégalité $\gamma_{r,s}(\tilde{u}) \leq 1$.

D'autre part, on peut définir une injection linéaire isométrique i de E dans $\prod M_i/\mathcal{A}$ de la façon suivante : à chaque $x \in E$, on associe la classe de $(x_i)_{i \in I}$, où $x_i = 0$ si $x \notin M_i$, et $x_i = x$ sinon. De façon similaire, on construit une projection π de norme 1 de $\prod (F/N_i)/\mathcal{A}$ sur F' [il suffit de transposer l'injection de F' dans $\prod N_i^0/\mathcal{A}$].

Finalement, on a $\pi \circ \tilde{u} \circ i = B_F \circ u$, ce qui achève la démonstration .

1.5 Corollaire : $(\prod_{p,r,s}^* \pi_{p,r,s}^*) = (\Gamma_{s,r}^{\gamma_{s,r}})$, lorsque $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \leq 1$.

▲ Nous savons déjà que

$$(\prod_{p,r,s} \pi_{p,r,s}) = (\Gamma_{s,r}^{\gamma_{s,r}^*}) \quad (\text{XIII, 3.9 } \textcircled{2})$$

Il suffit donc de montrer que $(\Gamma_{s,r}^{\gamma_{s,r}}) = (\Gamma_{s,r}^{**\gamma_{s,r}^{**}})$, c'est-à-dire que $\Gamma_{s,r}$ est parfait (XIII, 2.2 $\textcircled{1}$). Or $(\Gamma_{s,r}^{\gamma_{s,r}})$ est maximal, donc parfait d'après XIII, 2.3.

1.6 Remarque : Dans le cas particulier $s = +\infty$, on retrouve les résultats de Pietsch :

$$(\prod_r \pi_r) = (\mathcal{J}_{r'}^*, i_{r'}) ; (\prod_r^* \pi_r^*) = (\mathcal{J}_{r'}^*, i_{r'})$$

§ 2 COMPLEMENTS SUR LES OPERATEURS p.r.s. SOMMANTS : $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$.

Nous allons voir que les éléments de $\prod_{p,r,s}$ s'expriment simplement en fonction de ceux de \prod_r et \prod_s ; plus précisément nous avons le théorème (Kwapien [2])

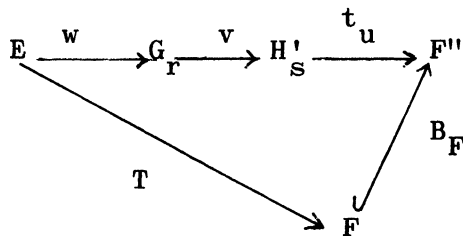
2.1 Théorème : Il est équivalent de dire

① $T \in \prod_{p,r,s} (E, F)$

② Il existe deux probabilités de Radon μ et ν portées respectivement par les boules unités $U_{E'}$ et $U_{F''}$ de E' et F'' telles que pour tout x de E , η de F' on ait

$$(1) \quad \langle Tx, \eta \rangle \leq \prod_{p,r,s} (T) \left(\int_{U_{E'}} |\langle x, \alpha \rangle|^r d\mu(\alpha) \right)^{1/r} \left(\int_{U_{F''}} |\langle \eta, \beta \rangle|^s d\nu(\beta) \right)^{1/s}$$

③ T admet la factorisation suivante



où v est un opérateur continu, w et u des opérateurs respectivement r -sommant et s -sommant ; G_r un sous-espace d'un espace $L^r(\Omega_1, \mu_1)$, H'_s un sous-espace d'un espace $L^s(\Omega_2, \mu_2)$ (Ω_i, μ_i espaces probabilisés).

④ Il existe un Banach G et deux opérateurs A, B : A r -sommant de E dans G , ${}^t B$ s -sommant de F' dans G' avec $T = B \circ A$.

▲ Nous nous cantonnerons au cas où r et s sont différents de $+\infty$ (Dans le cas contraire soit T , soit T' est q -sommant et le problème a déjà été traité dans l'exposé II). On supposera que p vérifie $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$.

① \Rightarrow ②

Considérons l'espace topologique (faiblement compact) K , $K = U_{E'} \times U_{F''}$ et soit C le sous-ensemble de $\mathcal{C}(K)$ défini par :

$$C = \{g : g \in \mathcal{C}(n); g(\eta, \xi) = \prod_{p,r,s} (T) \left[\frac{p}{r} \sum_{i=1}^n |\langle x_i, \eta \rangle|^r + \frac{p}{s} \sum_{i=1}^n |\langle y_i, \xi \rangle|^s \right] - \sum_{i=1}^n |\langle Tx_i, y_i \rangle|^p \}$$

où $(x_i)_{i=1, \dots, n}$, $(y_i)_{i=1, \dots, n}$ sont deux familles arbitraires de vecteurs

respectivement dans E et F'. C'est évidemment un cône convexe de fonctions réelles, de plus la relation :

$$\left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \eta \rangle|^r \right)^{p/r} \left(\sum_{i=1}^n |\langle y_i, \xi \rangle|^s \right)^{p/s} \leq \frac{p}{r} \sum_{i=1}^n |\langle x_i, \eta \rangle|^r + \frac{p}{s} \sum_{i=1}^n |\langle y_i, \xi \rangle|^s$$

puisque $\frac{p}{r} + \frac{p}{s} = 1$, et la définition de $\pi_{p,r,s}^p(T)$ montre que chacun des éléments de C atteint sur K un maximum positif ou nul.

D'après le lemme (4.5) de l'exposé II il existe alors une mesure de probabilité sur K : μ telle que $\mu(g)$ soit positif ou nul pour tout g de C.

Appliquons ce résultat à

$$g_0(\eta, \xi) = \pi_{p,r,s}^p(T) \left[\frac{p}{r} |\langle x, \eta \rangle|^r + \frac{p}{s} |\langle y, \xi \rangle|^s \right] - |\langle Tx, y \rangle|^p$$

on a alors

$$(1)' \quad |\langle Tx, y \rangle|^p \leq \pi_{p,r,s}^p(T) \left[\frac{p}{r} \int_{U_{E'}} |\langle x, \eta \rangle|^r d\mu(\eta) + \frac{p}{s} \int_{U_{F''}} |\langle y, \xi \rangle|^s d\mu(\xi) \right]$$

Soit alors λ un nombre positif non nul. Par homogénéité on voit que dans (1)' on peut remplacer x par λx et y par y/λ sans changer le premier membre ; on conclut alors en utilisant l'inégalité élémentaire

$$a \cdot b = \inf_{\lambda > 0} \left(\frac{1}{\alpha} \lambda^\alpha a^\alpha + \frac{1}{\beta} \lambda^{-\beta} b^\beta \right) \text{ dès que } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3}$$

Soit w_0 l'application de E dans $L^r(U_{E'}, \mu)$ définie par

$$w_0(x)(\eta) = \langle x, \eta \rangle \quad \text{pour } \eta \in U_{E'}$$

et de même u_0 de F' dans $L^s(U_{F''}, \nu)$

$$u_0(y)(\xi) = \langle \xi, y \rangle \quad \text{pour } \xi \in U_{F''}$$

Posons $G = \overline{w_0(E)}$ (adhérence dans $L^r(U_{E'}, \mu)$)

$H = \overline{u_0(F')}$ (adhérence dans $L^s(U_{F''}, \nu)$)

et soient w et u les applications w_0 et u_0 considérées à présent comme à valeur respectivement dans G et H . Par définition w et u sont respectivement r et s -sommante et de plus $\pi_r(w) \leq 1$, $\pi_s(u) \leq 1$.

L'application bilinéaire de $w_0(E) \times u_0(F')$ dans \mathbb{C}

$$v_0 : (w(x), u(y)) \mapsto \langle Tx, y \rangle$$

est bien définie et est continue d'après l'inégalité (1), donc elle s'étend en une forme bilinéaire continue de $G \times H$ dans \mathbb{C} avec conservation de la norme, et induit naturellement une application linéaire continue v de G dans H' . On a alors si $x \in E$ et $y \in F$

$$\begin{aligned} \langle {}^t u v w(x), y \rangle &= \langle v w(x), u(y) \rangle \\ &= v_0(w(x), u(y)) \\ &= \langle Tx, y \rangle \end{aligned}$$

③ \Rightarrow ④ Il suffit de constater que ${}^t u \circ v$ est en fait à image dans F et de poser

$$A = w, B = {}^t u \circ v$$

④ \Rightarrow ① est une simple conséquence de l'inégalité de Hölder. \blacktriangledown

2.2 1) Remarquons qu'une lecture un peu attentive de la démonstration met en lumière le fait que l'on a

$$\pi_{r,s}(T) = \inf(\pi_r(A) \cdot \pi_s({}^t B))$$

sur toutes les décompositions décrites en ④.

2) sur l'inégalité (1) il est facile de constater si l'on a $r \leq r_1$ et $s \leq s_1$ on a également

$$(\prod_{r,s}, \pi_{r,s}) \subset (\prod_{r_1,s_1}, \pi_{r_1,s_1})$$

On peut préciser d'ailleurs cette remarque par le théorème suivant :

2.3 Théorème : Pour tout couple (r,s) avec $r,s < +\infty$ on a l'inclusion $(\prod_{r,s}, \pi_{r,s}) \subset (\prod_{2,2}, \pi_{2,2})$ l'égalité ayant lieu si r et s sont supérieurs ou égaux à 2.

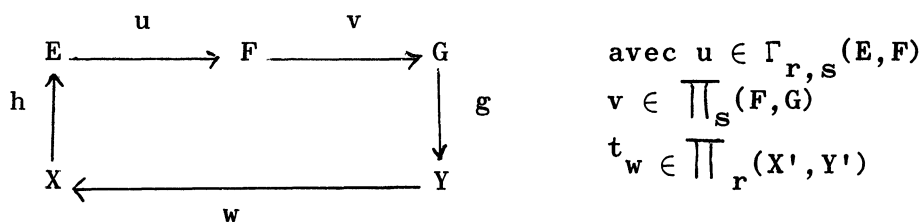
▲ pour ce théorème dû à Pietsch nous renvoyons à [4] . ▼

§ 3 CONSEQUENCES ET APPLICATIONS DE LA THEORIE

La forme des opérateurs (p,r,s) -sommants permet de donner en termes d'opérateurs p -sommants et p -intégraux une caractérisation des opérateurs appartenant à $\Gamma_{r,s}$.

3.1 Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que $u \in \Gamma_{r,s}(E,F)$ est que pour tout espace de Banach G et tout $v \in \prod_s(F,G)$ on ait ${}^t(vu) \in \mathcal{J}_r(G',E')$

▲ ① Supposons que $u \in \Gamma_{r,s}(E,F)$. Considérons le diagramme



X, Y de dimension finie. On a évidemment $wgv \in \prod_{s,r}(F,X)$ soit par adjonction

$$\begin{aligned}
 \text{trace}(wgvuh) &\leq \gamma_{r,s}^*(wgv) \gamma_{r,s}(u) \|h\| \\
 &\leq \pi_r({}^t_w) \|g\| \pi_s(v) \|h\| \gamma_{r,s}(u) \\
 &\leq \alpha({}^t(vu)) \|g\| \|h\| \pi_r({}^t_w)
 \end{aligned}$$

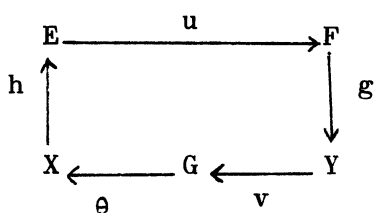
comme $\text{trace}(wgvuh) = \text{trace}({}^t(wgvuh))$ cela montre que ${}^t(vu) \in \prod_r^*(G',E')$ soit ${}^t(vu) \in \mathcal{J}_r(G',E')$ (cf.1.6) et de plus $i_r({}^t(vu)) \leq \pi_s(v) \gamma_{r,s}(u)$.

② Réciproquement soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant le propriété de l'énoncé. Par un argument de graphe fermé il est facile de voir qu'alors l'application \tilde{u}

$$\tilde{u} : \prod_S(F, G) \longrightarrow \mathcal{J}_{r'}(G', E') : v \longmapsto {}^t(vu)$$

est continue soit $i_{r'}({}^t(vu)) \leq \pi_S(v) \|\tilde{u}\|$.

Considérons le diagramme



avec $v \in \prod_S(Y, G)$ et ${}^t\theta \in \prod_{r'}(X', G')$ on a :

$$|\text{trace}(\theta v g u h)| = |\text{trace}({}^t h {}^t(v g u) {}^t\theta)|$$

mais ${}^t(v g u) \in \mathcal{J}_{r'}(G', E')$ et ${}^t\theta \in \prod_{r'}(X', G')$ donc

$$\begin{aligned}
 |\text{trace}(\theta v g u h)| &\leq \|h\| \pi_{r'}({}^t\theta) i_{r'}({}^t(v g u)) \\
 &\leq \|h\| \pi_{r'}({}^t\theta) \pi_S(v) \|\tilde{u}\| \|g\|
 \end{aligned}$$

QED. ▼

On remarque que $\|\tilde{u}\|$ n'est rien d'autre que $\gamma_{r, S}(u)$!

Montrons quelques corollaires. D'abord un théorème démontré primitivement par Persson [5]

3.2 Théorème : Si $v \in \prod_{s'}(L^S, E)$ alors ${}^t v \in \mathcal{J}_{s'}(E', L^{S'})$.

▲ on applique 3.1 en prenant $u = \text{id}_{L^S}$ élément de $\Gamma_{s, s'}(L^S, L^S)$. ▼

Puis le théorème de Kwapien légèrement amélioré :

3.3 Théorème : Si les réels s, q, p, r vérifient $1 \leq s < p \leq q < r < +\infty$; tout opérateur continu T de L^r dans L^s appartient à $\Gamma_{qp'}$.

▲ D'après le théorème 3.1 il suffit de montrer que ${}^t u {}^t v \in \mathcal{J}_q(G', L^{r'})$ dès que $v \in \prod_{p'}(L^s, G)$. Si $v \in \prod_{p'}(L^s, G)$ puisque $p' < s'$ il appartient à fortiori à $\prod_{s'}(L^s, G)$ par 3.2 on a donc ${}^t v \in \mathcal{J}_{s'}(G', L^{s'})$ et donc ${}^t u {}^t v \in \mathcal{J}_{s'}(G', L^{r'})$.

Mais si $q, s, p < r \leq 2$ on a $\prod_s(L^{r'}, G') = \prod_q(L^{r'}, G')$ (exposé V, corollaire 2 du théorème 2) par adjonction on a $\mathcal{J}_s(G', L^{r'}) = \mathcal{J}_q(G', L^{r'})$ ce qui démontre dans ce cas la proposition .

- le cas $2 \leq s, q < r$ se démontre en considérant ${}^t T$. Pour le cas restant c'est-à-dire $s < 2 < r$ il suffit de montrer que T se factorise par L^2 en effet de 2.3 on déduit par adjonction $\Gamma_{22} \subset \Gamma_{r,s}$ pour tout couple r, s . *

Si $v \in \prod_2(L^s, G)$ v a fortiori appartient à $\prod_{s'}(L^s, G)$ et donc ${}^t v \in \mathcal{J}_{s'}(G', L^{s'})$ mais on a par conséquent ${}^t(uv) \in \mathcal{J}_{s'}(G', L^{r'})$.

Comme $r' < 2$ et $s < 2$ on $\prod_2(L^{r'}, G') = \prod_s(L^{r'}, G')$ ce qui par adjonction implique ${}^t(uv) \in \mathcal{J}_2(G', L^{r'})$ (cf [5]).

3.4 Corollaire (Kwapien [2]): E est isomorphe à un sous espace complé-
té de L^p ($1 < p < +\infty$) si et seulement si pour tout opérateur u de L^p
dans G p' -sommant, ${}^t u$ est p' -intégral.

▲ D'après 3.1 l'identité de E appartient à $\Gamma_{p,p'}$ si et seule-
ment si la condition de l'énoncé est satisfaite. Or dire que
 $\text{Id}_E \in \Gamma_{p,p'}(E, E)$ signifie que l'on a la factorisation :

$$E \xrightarrow{u} L^p \xrightarrow{v} E, \quad v \circ u = \text{Id}_E,$$

ce qui se traduit immédiatement par le fait que E est isomorphe à un
sous-espace complé-
té de L^p . ▼

* tel que $rs < \infty$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. Dacunha-Castelle, J. L. Krivine : Application des ultraproducts à l'étude de certaines classes d'espaces de Banach. *Studia Math.* 41, 305-324 (1971).
 - [2] S. Kwapien : On operators factorizable through L^p spaces. *Bull. Soc. Math. de France* (31-32).
 - [3] A. Persson : On some properties of p -nuclear and p -integrable operators, *Studia Math* 33 (1969) .
 - [4] A. Pietsch : Adjungierte normierten Operatorenideale, *Math. Nach.* 48 (1971) 189-211.
 - [5] A. Pietsch : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1970-71, exposé 29.
-