

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Théorèmes de Nikishin : théorèmes de factorisation pour les applications linéaires à valeurs dans un espace $L^0(\Omega, \mu)$ (suite et fin)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 12, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1972-1973___A11_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

THEOREMES DE NIKISHIN : THEOREMES DE FACTORISATION

POUR LES APPLICATIONS LINEAIRES A VALEURS

DANS UN ESPACE $L^0(\Omega, \mu)$

(suite et fin)

par B. MAUREY

Nous allons terminer le paragraphe 3, commencé dans l'exposé précédent. Tout d'abord nous exploiterons les résultats du paragraphe 2 en termes de parties de type (p, V) .

Posons pour alléger l'écriture, si $\alpha \in]0, 1[$ et si p et s sont deux réels tels que $0 < p < s \leq 2$:

$$C(\alpha, p, s) = \inf_{0 < r < p} \alpha^{-1/r} A_{p,s}^{-1} A_{r,s} A_{r,p}^{-1}$$

Proposition 5 : Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, et A une partie s -convexe équilibrée de $L^0(\Omega, \mu)$, $0 < s \leq 1$ ♦. Supposons $J_\beta(A)$ fini pour un $\beta \in]0, 1[$. Pour tout $p < s$, A est de type (p, V_β) , et l'on a pour tout $\alpha \in]0, 1[$,

$$K_{\alpha, p}(V_\beta, A) \leq C(\alpha, p, s) \cdot J_\beta(A)$$

Démonstration : Soient (x_1, \dots, x_n) une suite d'éléments de A , $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une suite de réels et (f_1, \dots, f_n) une suite stable d'ordre p ($p < s$) sur un espace de probabilité (X, P) .

Considérons l'opérateur linéaire u de l^s dans $L^0(\Omega, \mu)$ défini par :

$$(c_i) \in l^s \longrightarrow \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

Puisque A est s -convexe équilibrée on a :

$$\|(c_i)\|_{l^s} \leq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n c_i x_i \in A \Rightarrow J_\beta\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i\right) \leq J_\beta(A),$$

d'où par homogénéité : $\forall x \in l^s, j_{V_\beta}(u(x)) \leq J_\beta(A) \|x\|_{l^s}$.

Désignons par (e_i) la base canonique de l^s . Nous aurons :

♦ c'est-à-dire : $x, y \in A, |\lambda|^s + |\mu|^s \leq 1 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in A$

$$\begin{aligned}
J_\alpha(j_{V_\beta}(\sum \lambda_i x_i f_i(t)), dP(t)) &= J_\alpha(j_{V_\beta}(u(\sum \lambda_i e_i f_i(t))), dP(t)) \\
&\leq J_\beta(A) J_\alpha(\|\sum \lambda_i e_i f_i(t)\|, dP(t)) \leq J_\beta(A) K_{\alpha,p}(1^s) (\sum |\lambda_i|^p)^{1/p} \\
&\leq \alpha^{-1/r} A_{p,s}^{-1} A_{r,s} A_{r,p}^{-1} J_\beta(A) \text{ d'après le corollaire 2,}
\end{aligned}$$

et le résultat est démontré (en prenant l'inf sur r , ce qui fait apparaître $C(\alpha, p, s)$.)

Le premier théorème de Nikishin résulte immédiatement de la conjonction des propositions 4 et 5 :

Théorème 2 : Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, A une partie s -convexe* de $L^0(\Omega, \mu)$, et p un nombre réel tel que $0 < p < s$. On suppose que $J_\alpha(A)$ est fini pour un $\alpha \in]0, 1/8[$. Il existe une partie mesurable Ω_α de Ω , telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 8\alpha$, et que :

$$\forall f \in A, \quad \left(\int_{\Omega_\alpha} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq 2^{1/p} A_p^{1/2} C(\alpha, p, s) J_\alpha(A)$$

Si E est un espace quasi-normé et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^0(\Omega, \mu)$, nous poserons pour tout $\alpha \in]0, 1[$:

$$J_\alpha(u) = J_\alpha(u(B)),$$

B étant la quasi-boule unité de E . On a alors :

$$\forall x \in E, \quad J_\alpha(u(x)) \leq J_\alpha(u) \cdot \|x\|$$

Proposition 6 : Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, p un nombre réel tel que $0 < p \leq 2$, E un espace quasi-normé de type p et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^0(\Omega, \mu)$.

Pour tout $\alpha \in]0, 1/8[$, il existe une partie mesurable Ω_α de Ω telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 8\alpha$, et que :

$$\forall x \in E \quad \left(\int_{\Omega_\alpha} |u(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq 2^{1/p} A_p^{1/2} K_{\alpha,p}(E) J_\alpha(u) \|x\|$$

* équilibrée

Démonstration : D'après la proposition 4, il suffit de montrer que $K_{\alpha,p}(V_\alpha, u(B)) \leq J_\alpha(u)K_{\alpha,p}(E)$.

(B désignant la quasi-boule unité de E). Soient alors (x_1, \dots, x_n) une suite d'éléments de B, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une suite de réels et (f_1, \dots, f_n) une suite stable d'ordre p sur un espace de probabilité (X, P) . Nous aurons :

$$\begin{aligned} J_\alpha(j_{V_\alpha}(\sum \lambda_i u(x_i) f_i(t)), dP(t)) &\leq J_\alpha(u) J_\alpha(\|\sum \lambda_i x_i f_i(t)\|, dP(t)) \\ &\leq J_\alpha(u) K_{\alpha,p}(E) (\sum |\lambda_i|^p)^{1/p}, \text{ d'où le résultat.} \end{aligned}$$

Soit (X, ν) un espace mesuré quelconque. Nous avons vu que l'espace $L^q(X, \nu)$ est de type p lorsque $0 < p < q \leq 2$ (corollaire 1 de la proposition 2) et de type 2 lorsque $2 \leq q < \infty$ (proposition 3). On obtient donc comme corollaire de la proposition 6 le second théorème de Nikishin :

Théorème 3 : Soient (X, ν) un espace mesuré quelconque, (Ω, μ) un espace de probabilité, et u un opérateur linéaire continu de $L^q(X, \nu)$ dans $L^0(\Omega, \mu)$.
a) Supposons $0 < q \leq 2$. Pour tout $p < q$ et tout $\alpha \in]0, 1/8[$, il existe une partie mesurable Ω_α de Ω , telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 8\alpha$, et que :

$$\forall x \in L^q(X, \nu), \quad \left(\int_{\Omega_\alpha} |u(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq 2^{1/p} A_p^{1/2} C(\alpha, p, q) J_\alpha(u) \|x\|$$

b) Supposons $2 \leq q < \infty$. Pour tout $\alpha \in]0, 1/8[$, il existe une partie mesurable Ω_α de Ω , telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq 8\alpha$, et que :

$$\forall x \in L^q(X, \nu) \quad \left(\int_{\Omega_\alpha} |u(x)|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} A_2^{1/2} \alpha^{-1/q} A_{q,2}^{-1} J_\alpha(u) \|x\|$$

Remarque : Le point b) est une légère amélioration de Nikishin, qui donnait $\int_{\Omega_\alpha} |u(x)|^{2-\varepsilon} d\mu$ au lieu de $\int_{\Omega_\alpha} |u(x)|^2 d\mu$.

Le point b) reste vrai lorsque $q = +\infty$, mais la démonstration est plus difficile et sera vue plus tard. La méthode de ce chapitre ne donne pas le résultat, car l'espace $L^\infty(X, \nu)$ n'est pas de type 2.

§ 4. CONSEQUENCES DES THEOREMES DE NIKISHIN

Les conséquences des théorèmes de Nikishin dans la théorie des opérateurs radonifiants ont été développées par S. Chevet [1]. Nous allons les présenter sous une forme très légèrement différente.

Nous sortirons un tout petit peu du cadre des probabilités cylindriques : nous appellerons mesure cylindrique positive bornée λ un système projectif de mesures positives bornées sur les quotients E/N . Nous appellerons masse de λ , notée $\|\lambda\|$, la masse (qui est la même pour toutes) des mesures qui forment le système projectif. Par la suite, nous dirons simplement mesure cylindrique en omettant "positive bornée".

Une mesure cylindrique λ sur un elcs E peut être représentée par une fonction aléatoire linéaire de E' dans un espace $L^0(\Omega, \mu)$, où μ est une mesure de masse $\|\lambda\|$.

Soient E un elcs et (λ_n) une suite de mesures cylindriques sur E telle que $\sum \|\lambda_n\|$ soit fini. Pour chaque sous-espace fermé de codimension finie N de E , on peut considérer sur E/N la mesure de Radon $\mu_N = \sum \pi_N(\lambda_n)$. Il est aisé de vérifier que les (μ_N) forment un système projectif. On définit ainsi une mesure cylindrique μ que nous noterons $\sum \lambda_n$.

Soit E un elcs. Munissons E' de la topologie forte de dual de E . Nous dirons qu'une mesure cylindrique λ sur E est de type p ($0 \leq p \leq +\infty$) si elle peut être représentée par une fonction aléatoire linéaire continue de E' dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$.

Nous obtenons comme conséquence du théorème 2 le résultat suivant :

Théorème 4 : Soient E un elcs, λ une probabilité cylindrique de type zéro sur E , et p un nombre réel tel que $0 < p < 1$. On peut trouver une suite (λ_n) de mesures cylindriques sur E , telle que $\lambda = \sum \lambda_n$, et que chaque λ_n soit de type p .

Démonstration : Puisque λ est de type zéro, on peut la représenter par une fonction aléatoire continue u de E' dans un espace $L^0(\Omega, \mu)$ (μ étant une probabilité). Puisque u est continue, on peut trouver pour tout entier n un voisinage W_n de zéro dans E' , que l'on peut supposer convexe et équilibré, tel que :

$$u(W_n) \subset V_{1/n} = \{f \in L^0 \mid J_{1/n}(f, \mu) \leq 1\}$$

D'après le théorème 2, il existe pour chaque n une partie mesurable Ω_n de Ω , telle que $\mu(\Omega - \Omega_n) \leq 8/n$ et telle que :

$$(1) \quad \forall x \in W_n \quad \left(\int_{\Omega_n} |u(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq 2^{1/p} A_p^{1/2} C(1/n, p, 1)$$

Posons $A_n = \Omega_n - \left(\bigcup_{j < n} \Omega_j \right)$. Les ensembles (A_n) sont deux à deux disjoints, et $\bigcup_{j \leq n} A_j = \bigcup_{j \leq n} \Omega_j$. Par conséquent $\mu(\Omega - \bigcup_n A_n) = 0$.

Désignons par μ_n la restriction de μ à l'ensemble A_n . Nous aurons $\mu = \sum \mu_n$. Désignons par u_n l'opérateur linéaire u considéré comme opérateur de E' dans $L^0(\Omega, \mu_n)$. D'après la relation (1) ci-dessus (vraie a fortiori pour A_n), l'opérateur u_n est continu de E' dans $L^p(\Omega, \mu_n)$. Il définit donc une mesure cylindrique λ_n de type p sur E , de masse $\|\lambda_n\| = \|\mu_n\| = \mu(A_n)$.

Il nous reste à montrer que $\lambda = \sum \lambda_n$. Pour cela il suffit de prouver que si $\xi \in E'$, on a :

$$\xi(\lambda) = \sum \xi(\lambda_n).$$

La mesure $\xi(\lambda)$ est l'image de μ par $u(x)$. Mais puisque $\mu = \sum \mu_n$, on a :

$$\xi(\lambda) = u(\xi)(\mu) = \sum u(\xi)(\mu_n) = \sum \xi(\lambda_n),$$

ce qui achève la démonstration.

Soient E et F deux elcs, u un opérateur linéaire continu de E dans F , p un nombre réel ≥ 0 . Nous dirons que u est $(p, 0)$ -radonifiant de E dans F si toute probabilité cylindrique λ de type p sur E a une image

$u(\lambda)$ de Radon sur F . (Bien évidemment, le même résultat sera vrai pour une mesure cylindrique). Nous allons démontrer la "conjecture de Pietsch dans les elcs".

Corollaire 1 : Soient E et F deux elcs, u un opérateur linéaire continu et p un nombre réel tel que $0 < p < 1$. Si u est $(p,0)$ -radonifiant, il est aussi 0 -radonifiant de E dans F .

Démonstration : Soit λ une probabilité cylindrique de type zéro sur E . D'après le théorème 4, on peut écrire $\lambda = \sum \lambda_n$, où chaque λ_n est de type p . Par hypothèse $u(\lambda_n)$ est de Radon sur F pour chaque n , donc aussi $u(\lambda) = \sum u(\lambda_n)$.

Corollaire 2 . (Théorème de Minlos) : Soit E un elcs conucléaire et quasi-complet. Toute probabilité cylindrique de type zéro sur E est de Radon sur E . (Autrement dit, l'identité de E est 0 -radonifiante).

Démonstration : D'après [2], proposition (XIV,2;2), l'identité de E est $(p,0)$ -radonifiante pour tout $p > 0$. On applique donc le corollaire 1.

§ 5. LE POINT DE VUE DES THEOREMES DE FACTORISATION

Nous allons voir que les théorèmes de Nikishin peuvent également être exprimés comme théorèmes de factorisation :

Proposition 7 : Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, E un espace quasi-normé et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^0(\Omega, \mu)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe une partie mesurable $\Omega_\alpha \subset \Omega$, telle que $\mu(\Omega - \Omega_\alpha) \leq \alpha$, et une constante K_α telles que :

$$\forall x \in E \quad \left(\int_{\Omega_\alpha} |u(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq K_\alpha \|x\|$$

b) L'opérateur u admet la factorisation :

$$E \xrightarrow{v} L^p(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^0(\Omega, \mu)$$

où v est linéaire continu de E dans $L^p(\Omega, \mu)$, et où T_g est l'opérateur de multiplication par une fonction mesurable g .

Démonstration : Comme dans la démonstration du théorème 4, on peut trouver une suite de parties (A_n) deux à deux disjointes, et une suite de nombres C_n tels que :

$$\mu(\Omega - \bigcup_n A_n) = 0$$

$$\forall n, \quad \|x\| \leq 1 \Rightarrow \left(\int_{A_n} |u(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq C_n$$

Considérons la fonction mesurable g définie par :

$$g = \sum 2^n C_n \chi_{A_n}.$$

Soit $x \in E$, tel que $\|x\| \leq 1$. Nous aurons :

$$\int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{g} \right|^p d\mu = \sum_n \frac{1}{2^{np} C_n^p} \int_{A_n} |u(x)|^p d\mu \leq \sum_n 2^{-np}$$

On peut donc poser $v(x) = \frac{u(x)}{g}$. L'opérateur v sera continu de E dans $L^p(\Omega, \mu)$, et on aura bien :

$$u = T_g \circ v$$

Montrons que b) \Rightarrow a). Soit $\alpha > 0$ donné. On peut trouver un entier n tel qu'en posant $\Omega_n = \{|g| \leq n\}$, on ait : $\mu(\Omega - \Omega_n) \leq \alpha$. On aura alors :

$$\left(\int_{\Omega_n} |u(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega_n} \left| n \frac{u(x)}{g} \right|^p d\mu \right)^{1/p} \leq n \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq n \|v\| \|x\|,$$

ce qui achève la démonstration.

Nous allons donner une conséquence de la proposition 7 pour les espaces de Banach plongeables dans un espace $L^0(\Omega, \mu)$. (Nous dirons qu'un espace E est plongeable dans $L^0(\Omega, \mu)$, s'il existe un opérateur linéaire u de E dans $L^0(\Omega, \mu)$ tel que u soit un isomorphisme topologique

de E sur $u(E)$. Par exemple, les espaces L^p , $0 < p \leq 2$, sont plongeables dans des espaces $L^0(\Omega, \mu)$ (exposé V.).

Proposition 8 : Si un espace de Banach E est plongeable dans un espace $L^0(\Omega, \mu)$, il est également plongeable pour tout $p < 1$ dans un espace $L^p(\Omega, \mu)$.

Démonstration : Soit u un plongement de E dans un espace $L^0(\Omega, \mu)$. L'image $u(B)$ de la boule unité B de E est une partie convexe équilibrée et bornée dans $L^0(\Omega, \mu)$, donc $J_\alpha(u(B))$ est fini pour tout $\alpha \in]0, 1[$. D'après le théorème 2 et la proposition 7, l'opérateur u admet pour tout $p < 1$ la factorisation :

$$E \xrightarrow{v} L^p(\Omega, \mu) \xrightarrow{T_g} L^0(\Omega, \mu)$$

Il nous suffit de montrer que v est un plongement de E dans $L^p(\Omega, \mu)$. Soit donc (x_n) une suite de vecteurs de E telle que $v(x_n)$ tende vers zéro dans $L^p(\Omega, \mu)$. Alors $gv(x_n) = u(x_n)$ tend vers zéro dans $L^0(\Omega, \mu)$ donc (x_n) tend vers zéro dans E , puisque u est un plongement de E dans $L^0(\Omega, \mu)$.

Remarque : Le résultat précédent est à rapprocher du problème suivant : si un espace de Banach E est plongeable dans un espace $L^0(\Omega, \mu)$, est-il plongeable dans un espace L^1 ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Chevet : Une propriété caractéristique des processus linéaires continus, Deux journées p -radonifiantes, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-1972.
- [2] Séminaire L. Schwartz 1969-1970.