

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PIERRE SAPHAR

Les normes tensorielles g_k et d_k

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 9, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970__A9_0

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V
Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

LES NORMES TENSORIELLES g_k ET d_k

par Pierre SAPHAR

§ 1. RAPPELS SUR LE PRODUIT TENSORIEL

Rappelons brièvement quelques propriétés fondamentales du produit tensoriel.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K . Alors, il existe un espace vectoriel, noté $E \otimes F$, et une application bilinéaire, notée i , de $E \times F$ sur $E \otimes F$, tels qu'à toute application bilinéaire A de $E \times F$ dans un espace vectoriel G , on puisse faire correspondre une application linéaire \tilde{A} unique de $E \otimes F$ dans G avec : $A = \tilde{A} \circ i$. On pose $i(x, y) = x \otimes y$ et on démontre que $E \otimes F$ est engendré par les éléments de la forme $x \otimes y$. Si $u \in E \otimes F$, on peut donc écrire : $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, $x_i \in E$, $y_i \in F$; cette représentation de u n'est d'ailleurs pas unique. On démontre enfin que $E \otimes F$, ainsi défini, est unique à un isomorphisme d'espace vectoriel près.

Nous utiliserons les deux propriétés suivantes :

- Soient E, F, E_1, F_1 , quatre espaces vectoriels, A une application linéaire de E dans E_1 , B une application linéaire de F dans F_1 . Alors, il existe une application linéaire de $E \otimes F$ dans $E_1 \otimes F_1$, notée $A \otimes B$, définie par $[A \otimes B](x \otimes y) = Ax \otimes By$.

- Soit E^* le dual algébrique de E , $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F . Alors, il existe une application linéaire injective de $E^* \otimes F$ dans $\mathcal{L}(E, F)$, $u \rightarrow \tilde{u}$, telle que si $u = \sum_{i=1}^n x_i^* \otimes y_i$, on ait, pour tout x de E , $\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i^* \rangle y_i$.

L'image de $E^* \otimes F$ par cette application est formée des applications de rang fini de E dans F .

§ 2. LES NORMES TENSORIELLES g_k et d_k

Dans toute la suite, E et F désignent deux espaces de Banach sur le même corps K (K est égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C}) ; k sera un nombre réel tel que $1 \leq k \leq +\infty$, k' sera le nombre conjugué : $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$. On note E' (resp. F') le dual topologique de E (resp. F). Enfin, $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F .

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de E , on désigne par $N_k((x_i)_{i \in I})$, ou par $N_k(x_i)$, s'il n'y a pas ambiguïté le nombre réel, fini ou non :

$$N_k(x_i) = \left(\sum_i \|x_i\|^k \right)^{1/k} \quad \text{si } k \text{ est fini,}$$

$$N_\infty(x_i) = \sup_i \|x_i\|$$

Par ailleurs, on dit que la famille (x_i) est :

- de puissance $k^{\text{ième}}$ sommable, si $N_k(x_i)$ est fini,
- scalairement de puissance $k^{\text{ième}}$ sommable si $\sup_{\substack{x' \in E' \\ \|x'\| \leq 1}} N_k(\langle x_i, x' \rangle)$ est fini.

On pose $M_k(x_i) = \sup_{\|x'\| \leq 1} N_k(\langle x_i, x' \rangle)$.

On démontre, sans difficulté, que l'ensemble des familles $(x_i)_{i \in I}$ telles que $N_k(x_i)$ est fini est un espace vectoriel, pour lequel $N_k(x_i)$ est une norme qui en fait un espace de Banach. Cet espace sera noté $l^k(E, I)$. On montre alors, comme dans le cas classique où $E = \mathbb{C}$, que si $1 \leq k < +\infty$, $(l^k(E, I))' = l^{k'}(E', I)$.

De même, on montre que l'ensemble des familles $(x_i)_{i \in I}$ telles que $M_k(x_i)$ est fini est un espace vectoriel, noté $m_k(E, I)$. On vérifie immédiatement que $M_k(x_i)$ est une norme sur $m_k(E, I)$. On peut donner de $m_k(E, I)$ l'interprétation suivante :

Proposition 1 : Si $1 < k \leq +\infty$, $m_k(E, F)$ peut être identifié en tant qu'espace normé à $\mathcal{L}(l^{k'}(E'), E)$. De plus $m_1(E, I)$ peut être identifié à $\mathcal{L}(c_0(I), E)$.

IX.3

L'espace $l^{k'}(I)$ est défini par $l^{k'}(I) = l^{k'}(\mathbb{K}, I)$. L'espace $l^0(I)$ est le sous-espace vectoriel de $l^\infty(I)$ formé des suites qui tendent vers 0 à l'infini.

Démonstration : supposons $1 < k \leq +\infty$. Soit $B \in \mathcal{L}(l^{k'}(I), E)$ et $(e_i)_{i \in I}$ la base canonique de $l^{k'}(I)$; B est bien définie par la donnée des $B(e_i) = x_i$. Par ailleurs, l'application tB de E' dans $l^k(I)$ est définie par ${}^tB(x') = (\langle x_i, x' \rangle)_i$. On a donc :

$$\|B\| = \|{}^tB\| = \sup_{\|(a_i)\|_{k'} \leq 1} \|\sum_i a_i x_i\| = M_k(x_i).$$

On définit ainsi une application linéaire, isométrique, que $\mathcal{L}(l^{k'}(I), E)$ dans $m_k(E, I)$. Montrons que cette application est surjective :

Soient $(x_i)_i \in m_k(E, I)$ et M le sous espace vectoriel de $l^{k'}(I)$ formé des éléments $a = (a_i)_i$ avec $a_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. On sait que M est dense dans $l^{k'}(I)$. Définissons l'application B de M dans E :

$$B(a) = \sum_i a_i x_i.$$

$$\|B(a)\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} |\sum_i a_i \langle x_i, x' \rangle| \leq N_k(a_i) M_k(x_i).$$

Donc, B est continue de M dans E et peut être étendue à $l^{k'}(I)$.

Le résultat est obtenu.

La démonstration pour $k = 1$ est analogue.

Corollaire : $m_k(E, I)$ est un espace de Banach.

Définissons alors les normes g_k et d_k :

on désigne par u un élément de $E \otimes F$; $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$. On pose

$$|u|_{g_k} = g_k(u) = \inf N_k(x_i) M_{k'}(y_i)$$

$$|u|_{d_k} = d_k(u) = \inf M_{k'}(y_i) N_k(x_i),$$

les bornes inférieures étant prises sur l'ensemble des représentations de u de la forme $\sum_i x_i \otimes y_i$. On a alors le résultat suivant :

IX.4

Théorème 1 : Pour tout k , g_k et d_k sont des normes sur $E \otimes F$.

Démonstration : Montrons le résultat pour g_k :

Soient u_1 et u_2 deux éléments de $E \otimes F$. On peut écrire :

$$u_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j} \otimes y_{i,j} \quad j = 1, 2$$

Soit $\eta > 0$. On peut choisir les représentations de u_1 et u_2 telles que :

$$N_k((x_{i,j})_i) \leq (g_k(u_j) + \eta)^{1/k} \quad j = 1, 2$$

$$M_{k'}((y_{i,j})_i) \leq (g_k(u_j) + \eta)^{1/k'} \quad j = 1, 2$$

On en tire immédiatement :

$$N_k((x_{i,j})_{i,j}) \leq (g_k(u_1) + g_k(u_2) + 2\eta)^{1/k},$$

$$M_{k'}((y_{i,j})_{i,j}) \leq (g_k(u_1) + g_k(u_2) + 2\eta)^{1/k'},$$

$$N_k((x_{i,j})_{i,j}) M_{k'}((y_{i,j})_{i,j}) \leq g_k(u_1) + g_k(u_2) + 2\eta.$$

Donc :

$$g_k(u_1 + u_2) \leq g_k(u_1) + g_k(u_2)$$

Il est aisé de montrer que $g_k(\lambda u) = |\lambda| g_k(u)$ pour tout scalaire λ .

Par ailleurs, on sait que $E \otimes F$ et $E' \otimes F'$ sont en dualité. Si $u \in E \otimes F$, et $u' \in E' \otimes F'$, on vérifie que :

$$|\langle u, u' \rangle| \leq g_k(u) d_{k'}(u').$$

Donc : $g_k(u) = 0$ entraîne $u = 0$.

Ainsi, g_k est une norme sur $E \otimes F$ et il en est de même de d_k . On note $E \otimes_{g_k} F$, le produit tensoriel $E \otimes F$ muni de g_k . On définit de même $E \otimes_{d_k} F$.

Proposition 2 : Soient $x \in E$ et $y \in F$. Alors $g_k(x \otimes y) = \|x\| \cdot \|y\|$.

Démonstration : Il est clair que $g_k(x \otimes y) \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

IX.5

Si $u \in E \otimes F$ et $u' \in E' \otimes F'$ on a : $|\langle u, u' \rangle| \leq \|u\|_{g_k} \|u'\|_{d_k}$. Donc $E' \otimes F'$ se plonge dans $(E \otimes F)'$. Notons $\|u'\|_k$ la norme sur $E' \otimes F'$ induite par $(E \otimes F)'$. Soient $x' \in E'$ et $y' \in F'$:

$$\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle = \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle$$

Donc

$$|\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle| \leq \|x' \otimes y'\|_k g_k(x \otimes y) \leq \|x' \otimes y'\|_k \|x\| \|y\|.$$

Il existe x'_0 et y'_0 de norme 1 avec :

$$|\langle x \otimes y, x'_0 \otimes y'_0 \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Puisque $\|x'_0 \otimes y'_0\|_k \leq \|x'_0 \otimes y'_0\|_{d_k}$, on déduit que $\|x'_0 \otimes y'_0\|_{d_k} \leq 1$.

$$\|x\| \|y\| \leq g_k(x \otimes y).$$

Le résultat est obtenu.

Corollaire : $d_k(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$.

Proposition 3 : Soient E, E_1, F, F_1 quatre espaces de Banach, A une application linéaire continue de E dans E_1 , B une application linéaire continue de F dans F_1 .

Alors $A \otimes B$ est une application linéaire continue de $E \otimes F$ dans $E_1 \otimes F_1$ de norme inférieure ou égale à $\|A\| \|B\|$.

Démonstration : Soit $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ un élément de $E \otimes F$. Alors,

$$[A \otimes B](u) = \sum_{i=1}^n Ax_i \otimes By_i$$

Donc

$$N_k(Ax_i) M_k(By_i) \leq \|A\| \|B\| N_k(x_i) M_k(y_i)$$

$$|[A \otimes B](u)|_{g_k} \leq \|A\| \|B\| \|u\|_{g_k}.$$

Le résultat est obtenu.

Etudions le complété de $E \otimes F$, qui sera noté $E \hat{\otimes}_{g_k} F$.

IX.6

Lemme 1 : Soient $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de E et $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de F telles que :

$N_k(x_i) < +\infty$ et de plus $\|x_i\| \rightarrow 0$ si $i \rightarrow +\infty$ dans le cas où $k = +\infty$,
 $M_{k'}(y_i) = a < +\infty$.

Alors la famille $x_i \otimes y_i$ est sommable dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{g}_k} F$.

Démonstration : A $\eta > 0$, on peut faire correspondre une partie B finie de l'ensemble N des entiers positifs ou nuls tels que pour toute partie finie J de N avec $J \cap B = \emptyset$ on ait :

$$N_k((x_i)_{i \in J}) \leq \eta$$

Alors

$$N_k((x_i)_{i \in J}) M_{k'}((y_i)_{i \in J}) \leq a \eta.$$

Le résultat est obtenu.

Proposition 4 : Soient E et F deux espaces de Banach, u un élément de $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{g}_k} F$.

Alors, il existe une suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de E , une suite $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de F telles que :

- $N_k(x_i) < +\infty$ et de plus $\|x_i\| \rightarrow 0$ si $i \rightarrow +\infty$, dans le cas où $k = +\infty$,

- $M_{k'}(y_i) < +\infty$,

- $u = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \otimes y_i$, la série convergeant dans $E \hat{\otimes}_{\mathfrak{g}_k} F$.

De plus, $|u|_{\mathfrak{g}_k} = \inf N_k(x_i) M_{k'}(y_i)$, la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des séries de la forme $u = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \otimes y_i$, (x_i) et (y_i) ayant les propriétés indiquées ci-dessus.

Démonstration : Soit $u \in E \hat{\otimes}_{\mathfrak{g}_k} F$. Alors, il existe une suite (u_n) d'éléments de $E \otimes F$ telle que $|u_n - u|_{\mathfrak{g}_k}^k \rightarrow 0$. On peut écrire :

$$u = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots$$

Quitte à remplacer la suite (u_n) par une suite extraite, on peut supposer que $|u_n - u_{n-1}|_{\mathfrak{g}_k} \leq \frac{1}{2n^2}$ si n est assez grand. On peut alors écrire :

$$u_n - u_{n-1} = \sum_{i=1}^{p(n)} x_{i,n} \otimes y_{i,n}$$

IX.7

avec

$$N_{\mathbf{k}}((x_{i,n})_i) \leq \frac{1}{n}, \text{ si } n \text{ est assez grand}$$

$$M_{\mathbf{k}'}((y_{i,n})_i) \leq \frac{1}{n}, \text{ si } n \text{ est assez grand.}$$

Donc, $N_{\mathbf{k}}((x_{i,n})_{i,n}) < +\infty$, $M_{\mathbf{k}'}((y_{i,n})_{i,n}) < +\infty$.

On peut alors écrire, d'après le lemme 1 :

$u = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \otimes y_i$, les suites (x_i) et (y_i) ayant les propriétés voulues.

Remarquons que l'on a même un peu plus :

A tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre n_0 tel que si $n \geq n_0$ on ait :

$$N_{\mathbf{k}}((x_i)_{i>n}) \leq \varepsilon$$

$$M_{\mathbf{k}'}((y_i)_{i>n}) \leq \varepsilon.$$

Posons : $u_n = \sum_{i=0}^n x_i \otimes y_i$.

On a

$$|u_n|_{\mathfrak{g}_{\mathbf{k}}} \leq N_{\mathbf{k}}((x_i)_{i \leq n}) M_{\mathbf{k}'}((y_i)_{i \leq n})$$

Donc, par passage à la limite :

$$|u|_{\mathfrak{g}_{\mathbf{k}}} \leq N_{\mathbf{k}}(x_i) M_{\mathbf{k}'}(y_i).$$

Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver un entier n tel que :

$$|u_n - u|_{\mathfrak{g}_{\mathbf{k}}} \leq \varepsilon$$

$$N_{\mathbf{k}}((x_i)_{i>n}) \leq \varepsilon$$

$$M_{\mathbf{k}'}((y_i)_{i>n}) \leq \varepsilon$$

On peut choisir les (x_i) et les (y_i) pour $i \leq n$ tels que :

$$N_{\mathbf{k}}((x_i)_{i \leq n}) M_{\mathbf{k}'}((y_i)_{i \leq n}) - \varepsilon \leq |v_n|_{\mathfrak{g}_{\mathbf{k}}}$$

$$N_{\mathbf{k}}((x_i)_{i \leq n}) M_{\mathbf{k}'}((y_i)_{i \leq n}) \leq |u|_{\mathfrak{g}_{\mathbf{k}}} + 2\varepsilon$$

Donc, il existe une constante B , ne dépendant que de u , telle que les

(x_i) et les (y_i) pour $i > n$ puissent être choisis avec :

$$N_k((x_i)_{i \leq n}) \leq B$$

$$M_{k'}((y_i)_{i \leq n}) \leq B$$

Alors :

$$\begin{aligned} N_k(x_i) M_{k'}(y_i) &\leq [N_k((x_i)_{i \leq n}) + N_k((x_i)_{i > n})] \cdot [M_{k'}((y_i)_{i \leq n}) + M_{k'}((y_i)_{i > n})] \\ &\leq |v_n|_{g_k} + \varepsilon + B\varepsilon + B\varepsilon + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$N_k(x_i) M_{k'}(y_i) \leq |u|_{g_k} + 2\varepsilon + 2B\varepsilon + \varepsilon^2$$

Le résultat est obtenu.

§ 3. LES APPLICATIONS k-NUCLEAIRES A GAUCHE ET A DROITE

Proposition 5 : L'injection naturelle de $E' \otimes_{g_k} F$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ est continue et se prolonge en une application linéaire continue de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ dans $\mathcal{L}(E, F)$, de norme inférieure ou égale à 1.

Démonstration : Soit $u = \sum_{i=1}^n x_i' \otimes y_i$ un élément de $E' \otimes_{g_k} F$

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i' \rangle y_i, \quad x \in E$$

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x)| &\leq N_k(\langle x, x_i' \rangle_i) M_{k'}(y_i) \\ &\leq |x|_{g_k}(u) . \end{aligned}$$

$$|\tilde{u}| \leq |u|_{g_k}$$

On note $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ l'espace vectoriel image de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$. Les éléments de $\mathcal{L}_g^k(E, F)$ sont appelés applications k-nucléaires à gauche.

Si $T \in \mathcal{L}_g^k(E, F)$ et $x \in E$ on peut écrire :

$$T_x = \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, x_i' \rangle y_i$$

avec
$$N_k(x'_i) < +\infty \text{ et } |x'_i| \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0 \text{ si } k = +\infty$$

$$M_k(y_i) < +\infty .$$

On ne sait si l'application de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ est toujours injective. Si $T \in \mathcal{L}_g^k(E, F)$, on note $g_k(T)$ la norme quotient associée à cette application. Toutefois, on peut montrer que si E' ou F vérifient l'hypothèse d'approximation (cf. exposé N° 5, p. 4) l'application de $E' \hat{\otimes}_{g_k} F$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ est injective.

Proposition 6 : Soit $T \in \mathcal{L}_g^k(E, F)$. Alors T est compacte.

Démonstration : Soit $T \in \mathcal{L}_g^k(E, F)$. Alors

$$T_x = \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, x'_i \rangle y_i, \quad x'_i \text{ et } y_i \text{ ayant les propriétés indiquées.}$$

Posons :

$$T_n x = \sum_{i=0}^n \langle x, x'_i \rangle y_i, \quad T_n \text{ est de rang fini.}$$

On vérifie immédiatement que

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0 \text{ si } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Le résultat est obtenu.

On introduit de même l'espace $\mathcal{L}_d^k(E, F)$ des applications k -nucléaires à droite.

§ 4. LE CAS OU $k = 1$

Soit $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ un élément de $E \otimes F$.

Grothendieck a introduit la norme :

$$|u|_{\pi} = \inf \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i|,$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des représentations de u .

Grothendieck a de plus démontré la propriété :

$$(E \otimes_{\pi} F)' = B(E, F)$$

$B(E, F)$ étant l'ensemble des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans K .

Ce résultat sera retrouvé comme cas particulier dans le théorème 2. Nous pouvons montrer la :

Proposition 7 : On a $g_1 = d_1 = \pi$.

Démonstration : Montrons que $g_1 = \pi$.

$$\text{Soit } u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$$

$$\begin{aligned} |u|_{g_1} &\leq \sum_{i=1}^n |x_i \otimes y_i|_{g_1} \leq \sum_i \|x_i\| \|y_i\| \\ &\leq |u|_{\pi} . \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que $\|y_i\| = 1$, pour tout i . Alors :

$$\begin{aligned} |u|_{\pi} &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \leq N_1(x_i) M_{\infty}(y_i) \\ |u|_{\pi} &\leq |u|_{g_1} \end{aligned}$$

Le résultat est obtenu. On montre de même que $d_1 = \pi$.

§ 5. LE CAS OU $k = 2$

Dans cette partie, on désigne par H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Soient x_i, y_i deux éléments de $H_i, i = 1, 2$. Alors $H_1 \otimes H_2$ est muni de la forme sesquilinéaire, séparante, définie par :

$$(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = (x_1, x_2)(y_1, y_2).$$

$H_1 \otimes H_2$ muni de cette forme sesquilinéaire est donc un espace préhilbertien séparé, noté $H_2 \otimes_2 H_2$.

On note $H_1 \hat{\otimes}_2 H_2$ le complété de $H_1 \otimes_2 H_2$. Si $u \in H_1 \hat{\otimes}_2 H_2$, $|u|_2$ sera la norme de u dans $H_1 \hat{\otimes}_2 H_2$.

Proposition 8 : Soient $(e_i)_{i \in I}$, $(f_j)_{j \in J}$ des bases orthonormées de H_1 et H_2 . Alors $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ est une base orthonormée de $H_1 \hat{\otimes}_2 H_2$.

Démonstration : En effet, $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ est un système orthonormal et l'on vérifie immédiatement que le sous-espace vectoriel engendré par $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ est dense dans $H_1 \hat{\otimes}_2 H_2$.

Proposition 9 : Il existe une application linéaire, continue, canonique, injective de $H_1 \hat{\otimes}_2 H_2$ dans $\mathcal{L}(H_1, H_2)$. L'image de cette application est formée des applications de Hilbert-Schmidt de H_1 dans H_2 .

Démonstration : Soit φ l'application antilinéaire canonique de H_1 sur H_1' . On peut écrire :

$$u = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \varphi(e_i) \otimes f_j \text{ avec } |u|_2 = \left(\sum_{i,j} |\lambda_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

On pose, si $x \in H_1$:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} (x, e_i) f_j$$

Alors

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x)| &\leq \left(\sum_{i,j} |\lambda_{i,j}|^2 |(x, e_i)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |u|_2 \end{aligned}$$

L'application $u \rightarrow \tilde{u}$ est donc bien linéaire continue. Supposons que $\tilde{u} = 0$. Alors $\lambda_{i,j} = 0$ pour tout i et j et l'on déduit que $u = 0$. L'application est donc injective. Enfin, il est clair que l'on peut écrire :

$$\tilde{u}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x, f_n) g_n$$

avec

$$\sum_n |\lambda_n|^2 < +\infty,$$

f_n et g_n étant deux systèmes orthonormés.

On déduit de l'exposé précédent (N° 8) que \tilde{u} est de Hilbert-Schmidt. Nous allons comparer la norme $|u|_2$ avec les normes $|u|_{g_2}$ et $|u|_{d_2}$.

Lemme 2 : Soient H_1, H_2, H_3 trois espaces de Hilbert et B une application linéaire continue de H_2 dans H_3 . Alors $1 \otimes B$ est une application linéaire continue de $H_1 \otimes_2 H_2$ dans $H_1 \otimes_2 H_3$ de norme inférieure ou égale à $|B|$.

Démonstration : Soit $(e_i)_i$ une base orthonormée de H_1 et $u \in H_1 \otimes H_2$. On peut écrire $u = \sum_{i=1}^n e_i \otimes y_i$ avec $y_i \in H_2$.

On vérifie que :

$$\begin{aligned} |u|_2 &= N_2(y_i) \\ [1 \otimes B](u) &= \sum_{i=1}^n e_i \otimes B(y_i) \\ |[1 \otimes B](u)|_2 &= N_2(By_i) \\ &\leq |B| |u|_2 \end{aligned}$$

Le résultat est obtenu.

Proposition 10 : Soit $u \in H_1 \otimes H_2$. Alors, $|u|_2 = |u|_{g_2} = |u|_{d_2}$.

Démonstration : Soit $u \in H_1 \otimes H_2$. Alors

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes f_i \\ |u|_2 &= \left(\sum_i |\lambda_i|^2 \right)^{1/2} \\ N_2(\lambda_i e_i) M_2(f_i) &= |u|_2 \end{aligned}$$

Donc $|u|_{g_2} \leq |u|_2$

Montrons l'inégalité : $|u|_2 \leq |u|_{g_2}$.

Soit $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ une représentation quelconque de u .

Désignons par (e_i) la base orthonormale de $l^2 = l^2(N)$ et posons :

$$v = \sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i \quad v \in H_1 \otimes l^2$$

Désignons par B l'application de l^2 dans H_2 , définie par :

$$\begin{aligned} B(e_i) &= y_i & 1 \leq i \leq n \\ &= 0 & i > n . \end{aligned}$$

$$[1 \otimes B](v) = u$$

nous donne

$$|u|_2 \leq |B| |v|_2$$

ou

$$\leq M_2(y_i) N_2(x_i)$$

$$|u|_2 \leq |u|_{g_2}$$

Le résultat est obtenu.

On montre de même que sur $H_1 \otimes H_2$, $|u|_2 = |u|_{d_2}$.

Corollaire : $l^2_g(H_1, H_2) = l^2_d(H_1, H_2) = \pi_2(H_1, H_2)$, ($\pi_2(H_1, H_2)$ désignant l'espace des applications de Hilbert Schmidt de H_1 dans H_2).

§ 6. LE THEOREME DE DUALITE

Donnons tout d'abord le complément suivant sur les applications k -sommantes ($1 \leq k < +\infty$).

Proposition 11 : Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F . Supposons que pour toute suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $m_k(E, N)$, (Tx_i) soit dans $l^k(E, N)$. Alors, T est k sommante.

Démonstration : T définit une application linéaire T_1 de $m_k(E, N)$ dans

$l^k(E, N) : (x_i)_i \rightarrow (Tx_i)_i$. Il nous suffit de montrer que T_1 est continue, et pour cela que le graphe de T_1 est fermé, (car $m_k(E, N)$ et $l^k(E, N)$ sont des espaces de Banach).

Supposons que $(x_{i,n})_i \rightarrow (x_i)_i$ dans $m_k(E, N)$

et que $(Tx_{i,n})_i \rightarrow (y_i)_i$ dans $l^k(E, N)$.

Alors $x_{i,n} \rightarrow x_i$ faiblement dans E , pour chaque i . Donc :

$Tx_{i,n} \rightarrow Tx_i$ faiblement dans F , pour chaque i . Mais :

$Tx_{i,n} \rightarrow y_i$ dans F pour chaque i .

On conclut que $Tx_i = y_i$ pour chaque i .

Le résultat est obtenu.

Théorème 2 : Soit k un nombre réel tel que $1 \leq k \leq +\infty$.

Alors, on peut identifier $(E \otimes_{d_k} F)'$ et $\pi_{k'}(E, F')$ en tant qu'espaces de Banach.

Démonstration : Soit $B \in (E \otimes_{d_k} F)'$.

Si $x \in E$ et $y \in F$, on a :

$$|B(x \otimes y)| \leq |B| \|x\| \|y\|, \text{ puisque } |x \otimes y|_{d_k} = \|x\| \|y\|$$

Donc B peut être identifiée à une forme bilinéaire continue sur $E \times F$ ou encore à une application linéaire continue T de E dans F' . On peut écrire : $B(x \otimes y) = \langle Tx, y \rangle$.

Notons $p_k(T)$ la norme de T en tant qu'élément de $(E \otimes_{d_k} F)'$.

$$p_k(T) = \sup_{\substack{N_k(y_i) \leq 1 \\ M_{k'}(x_i) \leq 1}} \left| \sum_{i=1}^n \langle Tx_i, y_i \rangle \right| \quad x_i \in E, \quad y_i \in F$$

Si $k < +\infty$, $(l^k(E, N))' = l^{k'}(E', N)$.

Supposons tout d'abord $k < +\infty$. Alors

$$p_k(T) = \sup_{N_k(y_i) \leq 1} \sup_{|\Sigma \langle Tx_i, y_i \rangle|} = \sup_{M_{k'}(x_i) \leq 1} N_{k'}(Tx_i) = \pi_{k'}(T)$$

Si $k = +\infty$, le dual topologique de $l^1(F')$ est $l^\infty(F'')$. Donc :

$$N_1(Tx_i) = \sup_{N_\infty(y_i'') \leq 1} |\Sigma \langle Tx_i, y_i'' \rangle| \quad y_i'' \in F''$$

Utilisant la densité, pour la topologie affaiblie de F , de la boule unité de F dans la boule unité de F'' on a aussi :

$$N_1(Tx_i) = \sup_{N_\infty(y_i) \leq 1} |\Sigma \langle Tx_i, y_i \rangle| \quad y_i \in F.$$

Donc
$$p_\infty(T) = \pi_1(T)$$

Ainsi, T est un élément de $\pi_{k'}(E, F')$.

Il est, par ailleurs, aisé de vérifier que l'application $B \rightarrow T$ de $(E \otimes_{d_k} F)'$ dans $\pi_{k'}(E, F')$ est linéaire, bijective, isométrique.

Le résultat est obtenu.

Corollaire 1 : $(E \otimes_{d_1} F)' = \mathfrak{L}(E, F')$.

C'est le résultat de Grothendieck sur la norme π .

Corollaire 2 : Soient k et k_1 deux nombres réels tels que $1 \leq k \leq k_1 \leq +\infty$.

Alors $d_{k_1} \leq d_k$ et $g_{k_1} \leq g_k$.

Ce résultat découle immédiatement de la propriété : si $T \in \pi_{k_1'}(E, F')$, alors $T \in \pi_{k'}(E, F')$ et $\pi_{k'}(T) \leq \pi_{k_1'}(T)$.

Proposition 12 : Pour tout k , $\mathfrak{L}_g^k(E, F) \subset \pi_k(E, F)$. Si $T \in \mathfrak{L}_g^k(E, F)$, alors $\pi_k(T) \leq g_k(T)$.

Démonstration : Supposons $k < +\infty$. Soit $T \in \mathcal{L}_g^k(E, F)$ et $x_1 \dots x_p$ une suite de E .

$$\begin{aligned}
 Tx_p &= \sum_{i=0}^{\infty} \langle x, x_i' \rangle y_i \\
 \|Tx_p\|^k &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \langle x_p, x_i' \rangle y_i \right\|^k \\
 &\leq M_{k'}^k(y_i) N_k^k(\langle x_p, x_i' \rangle) \\
 \sum_p \|Tx_p\|^k &\leq M_{k'}^k(y_i) M_k^k(x_p) N_k^k(x_i') \\
 N_k(Tx_p) &\leq g_k(T) M_k(x_p).
 \end{aligned}$$

Le résultat est obtenu dans ce cas.

Il est immédiat si $k = +\infty$.