Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

Jacqueline Martin

Une caractérisation des opérateurs de Hilbert-Schmidt

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. nº 8, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A8_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE L. SCHWARTZ 1969-1970

UNE CARACTERISATION DES OPERATEURS DE HILBERT - SCHMIDT

par Jacqueline MARTIN

Exposé N° 8

5 Janvier 1970

Cet exposé reprend, pour l'essentiel, les résultats développés par A. Pelczynski dans [1]. Le résultat fondamental est le suivant :

H_1 et H_2 étant deux espaces de Hilbert, la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H_1 dans H_2 coïncide avec la classe des opérateurs p sommant, où p est fixé $0 < p < +\infty$.

<u>DEFINITIONS</u>. Soit $T : H_1 \to H_2$, opérateur de H_1 dans H_1.

1) T est un opérateur de Hilbert-Schmidt (noté $T \in \mathfrak{S}_2(H_1,H_2)$) si et seulement si, pour une base orthonormale (ou, ce qui est équivalent, pour toute base orthonormale) $(e_i)_{i\in I}$ de H_1

$$\sum_{i\in I} \|T_{e_i}\|^2 < +\infty$$

2) T est p-sommant (noté $T \in \pi_p(H_1,H_2)$) si et seulement si il existe C constante positive, telle que, pour toute famille finie $(x_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$, k quelconque,

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|Tx_i\|^p\right)^{1/p} \le C \sup_{\|a\|=1} \left(\sum_{i=1}^{k} |\langle x_i , a\rangle|^p\right)^{1/p}$$

Le résultat fondamental s'écrit : $\mathfrak{S}_2(H_1,H_2) = \pi_p(H_1,H_2)$.

Le cas p = 1 a été étudié par Pietsch [2]. Dans un article plus récent [3] Pietsch l'établit pour $1 < p < 2$ et en déduit que, pour $1 \le p < +\infty$ $\mathfrak{S}_2(H_1,H_2) \subset \pi_p(H_1,H_2)$.

Néanmoins, le résultat sera complètement établi dans cet exposé, et pour $0 < p < +\infty$.

RESULTATS PRELIMINAIRES.

1) Soient E et F, deux espaces de Banach, E étant supposé réflexif ; soit $0 \leq p < +\infty$, et T un opérateur linéaire, p sommant de E dans F. Alors T est compact.

E étant réflexif, toute boule de centre 0, fermée, est compacte dans la topologie affaiblie de E. Soit x_n une suite telle que, pout tout n : $\|x_n\|_E \leq a$. On peut extraire (x_{n_k}) convergeant faiblement dans E ; c'est-à-dire que :

$\forall x' \in E' \quad \langle x_{n_k}, x' \rangle \to \langle u, x' \rangle$

$$\text{donc} \quad \|u\|_E \leq a \qquad \text{et} \qquad \|x_{n_k} - u\|_E \leq 2a \,.$$

T étant p-sommant transforme la suite faiblement convergeante (x_{n_k}) en une suite fortement convergente dans F : $(T_{x_{n_k}})$; en effet :

$$\exists \mu \text{ et } \rho \text{ tels que : } \|T(x_{n_k} - u)\|_F \leq \rho\Big(\int_{\varepsilon'} |\langle x_{n_k} - u, x' \rangle|^p \, d\mu(x')\Big)^{1/p}$$

(ε' est la boule unité de E' ; voir Pietsh [3]).

Ceci prouve que l'opérateur T est compact.

Corollaire : Soit $T \in \pi_p(H_1, H_2)$, alors T est compact.

2) Soit T compact de H_1 dans H_2, alors il existe une base orthonormale de $H_1 (f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f'_\alpha)_{\alpha\in A}$ telle que : $Tf_n = \lambda_n g_n$ avec $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, g_n suite orthonormale de H_2, et $Tf'_\alpha = 0$.

Considérons l'opérateur $A = T^*T$; A est compact et symétrique ; l'analyse spectrale nous permet d'affirmer qu'il existe une base orthonormale $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f'_\alpha)_{\alpha\in A}$ de H_1, des scalaires positifs ρ_n, tels que

$$\begin{cases} Af_n = \rho_n f_n & \text{avec } \rho_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \\ Af'_\alpha = 0 & \end{cases}$$

Posons $Tf_n = \lambda_n g_n$

$$<Tf_n, Tf_m> = <Af_n, f_m> = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

$$<Tf_n, Tf_n> = <Af_n, f_n> = \rho_n = \lambda_n^2 \quad \text{d'où la définition de } \lambda_n \text{ ;}$$

g_n est bien une suite orthonormale dans H_2.

$$<Tf'_\alpha, Tf'_\alpha> = <Af'_\alpha, f'_\alpha> = 0 \quad \text{d'où } Tf'_\alpha = 0$$

Remarques : 1. Nous remarquons que seule nous servira la partie $(f_n)_{n\in \mathbb{N}}$ de la base de H_1, $(f'_\alpha)_{\alpha\in A}$ étant une base du noyau de T.

2. $T \in \mathfrak{S}_2(H_1, H_2)$: T est compact ; le résultat ci-dessus est valable et nous avons : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^2 < \infty$.

3) Définition des fonctions de Rademacher.

Soit $n = 1,2,3,\ldots$

$t \in [0,1]$

On définit la $n^{\text{ième}}$ fonction de Rademacher par :

$$r_n(t) = \begin{cases} (-1)^k & \text{pour } \dfrac{k}{2^n} < t < \dfrac{k+1}{2^n} \\ 0 & \text{pour } t = \dfrac{k}{2^n} \text{ et pour } t = 1 \\ & \text{avec } k = 0,1,2,\ldots\ldots,2^n - 1 \end{cases}$$

4) Inégalité de Khintchine

Soit $a_n \in \mathbb{C}$ et $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(t)$ où $r_n(t)$ est la $n^{\text{ième}}$ fonction de Rademacher ; $f(t)$ est la série de Rademacher de coefficients a_n.

Théorème : Si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, la fonction $f(t) \in L^r(0,1)$, $0 < r < \infty$ et l'on a :

$$A_r \|(a_n)\|_{l^2} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^r \, dt \right)^{1/r} \leq B_r \|(a_n)\|_{l^2}$$

A_r et B_r étant des constantes, positives, finies, ne dépendant que de r. (Cf. Zygmund : Trigonometric series, Vol. I p. 212, §8)

<u>Remarque</u> : De ce résultat, on déduit que g et h sont continues pour les topologies des normes :

$$(l^2) \xrightarrow{g} S \subset L^r \;; \qquad S \subset L^r \xrightarrow{h} (l^2)$$

telles que $(a_n) \to \sum_{n=o}^{\infty} a_n r_n(t) \;;\; \sum_{n=o}^{\infty} a_n r_n(t) \to (a_n)$

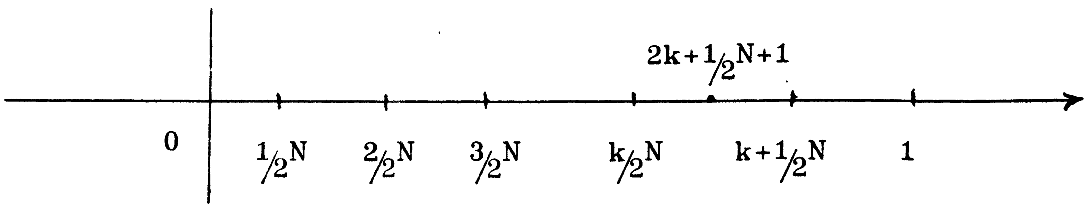
$$S = \{\text{séries de Rademacher de coeff. dans } (l^2)\}$$

<u>$\pi_p(H_1,H_2) \subset \mathfrak{S}_2(H_1,H_2)$</u>

Soit $T \in \pi_p(H_1,H_2)$; soit f_n, λ_n, g_n (Cf. 2) préliminaires). Pour montrer que $T \in \mathfrak{S}_2(H_1,H_2)$, nous allons utiliser une famille finie, particulière, (x_k), d'éléments de H_1, soit :

$$x_k = \sum_{n=1}^{N} r_n^k f_n \qquad \text{avec} \qquad r_n^k = r_n\left(\frac{2k+1}{2^{N+1}}\right)$$

$$n = 1,2,\dots,N$$
$$k = 0,1,2,\dots,2^N - 1$$



On remarque que

$$r_n^k = r_n(t)$$

pour $\qquad \frac{k}{2^N} < t < \frac{k+1}{2^N} \qquad$ et $\qquad n \le N \qquad$ (*)

Les x_k sont les sommets du "cube" unité du sous-espace de H_1 engendré par la famille orthonormale $f_1, f_2, \ldots, f_N$.

En vertu de 2) des préliminaires

$$\|Tx_k\| = \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2\right)^{1/2}$$

d'où

$$\left(\sum_{k=o}^{2^N-1} \|Tx_k\|^p\right)^{1/p} = 2^{N/p}\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2\right)^{1/2}$$

D'autre part, soit $a \in H_1$

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \langle a, f_i\rangle\, f_i + \sum_{\alpha\in A} \langle a, f'_\alpha\rangle\, f'_\alpha$$

$$|\langle x_k, a\rangle|^p = \left|\sum_{n=1}^{N} r_n^k\, \overline{\langle a, f_n\rangle}\right|^p = 2^N \int_{\frac{k}{2^N}}^{\frac{k+1}{2^N}} \left|\sum_{n=1}^{N} r_n(t)\, \overline{\langle a, f_n\rangle}\right|^p dt, \text{ car}^{(*)}$$

$$\left(\sum_{k=o}^{2^N-1} |\langle x_k, a\rangle|^p\right)^{1/p} = 2^{N/p}\left(\int_o^1 \left|\sum_{n=1}^{N} r_n(t)\, \overline{\langle a, f_n\rangle}\right|^p dt\right)^{1/p}$$

D'après l'inégalité de Khintchine

$$\left(\sum_{k=o}^{2^N-1} |\langle x_k, a\rangle|^p\right)^{1/p} \le 2^{N/p} B_p \left(\sum_{n=1}^{N} |\langle a, f_n\rangle|^2\right)^{1/2} \le 2^{N/p} B_p \|a\|$$

B_p, constante ne dépendant que de p.

T étant p-sommant, il existe C tel que :

$$2^{N/p}\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2\right)^{1/2} \le C \sup_{\|a\|=1} \left(\sum_{k=1}^{2^N-1} |\langle x_k, a\rangle|^p\right)^{1/p} \le C\, B_p\, 2^{N/p}$$

Donc $\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2\right)^{1/2} \le C\, B_p$ ceci quel que soit N,

d'où $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2\right)^{1/2} < +\infty$,

$\underline{T \in \mathfrak{S}_2(H_1, H_2)}$.

$\underline{\mathfrak{S}_2(H_1,H_2) \subset \pi_p(H_1,H_2)}$

Soit $T \in \mathfrak{S}_2(H_1,H_2)$; soit f_n, λ_n, g_n (Cf. 2) préliminaires)

$$Tf_n = \lambda_n g_n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$$

$$Tf'_\alpha = 0$$

Soit $x \in H_1$:

$$x = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n f_n + \sum_{\alpha\in A} a_\alpha f'_\alpha$$

$$Tx = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n \lambda_n g_n \quad \text{avec} \quad a_n = \langle x, f_n \rangle$$

Décomposons T de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
x \in H_1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "j_1"'] & H_2 & \sum\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n\lambda_n g_n \\
(l^1) \ni (a_n\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}} \arrow[r, "i"] & (l^2) \ni (a_n\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}} \arrow[u, "j_2"'] &
\end{tikzcd}$$

- $(a_n\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient bien à l^1 car $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartiennent à (l^2)
- i est l'injection canonique de (l^1) dans (l^2) ; i est p-sommante
- j_1 est continue car $\|(a_n\lambda_n)\|_{l^1} \leq \|(a_n)\|_{l^2} \|(\lambda_n)\|_{l^2}$

  et $\|\lambda_n\|_{l^2} < \infty$; $\|(a_n)\|_{l^2} = \|x\|_{H_1}$
- j_2 est une isométrie de (l^2) dans H_2

Donc $\underline{\text{T est p-sommante}}$; $\underline{T \in \pi_p(H_1,H_2)}$.

$(l^1) \xrightarrow{i} (l^2)$: i est p-sommante $0 < p < +\infty$

En effet, on factorise i de la facon suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{(a_n)_{n\in\mathbf{N}}} & (l^1) & \xrightarrow{\qquad i \qquad} & (l^2) & \boxed{(a_n)_{n\in\mathbf{N}}} \\ & g \searrow & & \nearrow h & \\ & & \Sigma & \boxed{\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n r_n(t)} & \\ & & \cap & & \\ & & L^p[0,1] \ ; \ 0 < p < \infty & & \end{array}$$

où Σ = {séries de Rademacher de coefficients dans (l^1)}

La remarque de 4) préliminaires, nous dit que g et h sont continues, g étant continue, il existe $x'_t \in L^{p'}(0,1)$ tel que

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n r_n(t) = \langle a, x'_t \rangle$$

où $$a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in (l^1)$$

L'inégalité de Khintchine s'écrit (a $\in l^1$, donc a $\in l^2$ et le théorème est valable)

$$A_p \|ia\|_{l^2} \leq \left(\int_0^1 |\langle a, x'_t\rangle|^p \, dt\right)^{1/p}$$

Soit i est p-sommante $0 < p < 1$ d'après l'inégalité de Pietsch [3].

Références

[1] A. Pelczynski (Warszawa) : A characterisation of Hilbert-Schmidt operators - Studia Mathematica T. XXVIII (1967) (p. 355-360).

[2] A. Pietsch, Nukleare lokalkonvexe Räume- Berlin 1965.

[3] A. Pietsch, Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen, Studia Mathematica 28(1967) (p. 333-353).