D. Lepingle

Applications p-sommantes ; inégalité de Pietsch ; factorisation

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 7, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

APPLICATIONS p-SOMMANTES ; INEGALITE DE PIETSCH ; FACTORISATION

par D. LEPINGLE

Exposé N° 7

15 Décembre 1969

§ 1. DEFINITION ET PROPRIETES ELEMENTAIRES DES APPLICATIONS (p,q)-SOMMANTES

Définition : Soient une application linéaire T d'un espace normé E dans un espace normé F, et deux réels $0 < p,q < +\infty$. On dit que T est (p,q)-sommante s'il existe un nombre $\rho > 0$ tel que pour toute famille finie $x_1,\dots,x_k$ d'éléments de E on ait l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|T\, x_i\|^q\right)^{1/q} \leq \rho \sup_{\xi\in\mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |<\xi,\, x_i>|^p\right)^{1/p}$$

où $\mathcal{E}'$ est la boule unité fermée du dual E' de E.

On note $\pi_{p,q}(E,F)$ l'ensemble des applications (p,q)-sommantes et $\pi_{p,q}(T)$ le plus petit ρ vérifiant l'inégalité ci-dessus.

Proposition (VII ; 1,1)

$\pi_{p,q}(E,F)$ est un espace vectoriel de norme $\pi_{p,q}(.)$ si $q \geq 1$, de q-quasi-norme $\pi_{p,q}(.)$ si $0 < q < 1$.

Démonstration : Montrons simplement l'inégalité triangulaire.
Soient $S,T \in \pi_{p,q}(E,F)$.

Si $q \geq 1$,
$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{k} \|(S+T)\, x_i\|^q\right)^{1/q} &\leq \left(\sum_{i=1}^{k} (\|S\, x_i\| + \|T\, x_i\|)^q\right)^{1/q}\\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{k} \|S\, x_i\|^q\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{k} \|T\, x_i\|^q\right)^{1/q}\\ &\leq (\pi_{p,q}(S) + \pi_{p,q}(T)) \sup_{\xi\in\mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |<\xi,x_i>|^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

Si $0 < q < 1$,
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \|(S+T)\, x_i\|^q &\leq \sum_{i=1}^{k} (\|S\, x_i\| + \|T\, x_i\|)^q\\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \|S\, x_i\|^q + \sum_{i=1}^{k} \|T\, x_i\|^q\\ &\leq ((\pi_{p,q}(S))^q + (\pi_{p,q}(S))^q) \sup_{\xi\in\mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |<\xi,x_i>|^p\right)^{q/p}\end{aligned}$$

d'où $(\pi_{p,q}(S+T))^q \leq (\pi_{p,q}(S))^q + (\pi_{p,q}(T))^q$

C.Q.F.D.

<u>Proposition (VII ; 1,2)</u>

a) <u>Si $p > q$, $\pi_{p,q}(E,F) = \{0\}$</u>

b) <u>Si $T \in \pi_{p,q}(E,F)$, alors T est bornée et $\|T\| \leq \pi_{p,q}(T)$</u>

c) <u>Si F est complet, $\pi_{p,q}(E,F)$ est complet</u>

d) <u>Si $S \in \pi_{p,q}(F,G)$ et $T \in L(E,F)$, alors $ST \in \pi_{p,q}(E,G)$</u>

<u>Si $S \in L(F,G)$ et $T \in \pi_{p,q}(E,F)$, alors $ST \in \pi_{p,q}(E,G)$</u>

<u>Démonstration</u>

a) Il suffit de prendre $x_1 = \dots = x_n = x \neq 0$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|T x_i\|^q\right)^{1/q} = k^{1/q} \|T x\|$$

$$\sup_{\xi\in\mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |<\xi, x_i>|^p\right)^{1/p} = k^{1/p} \|x\|$$

Le rapport de ces deux quantités n'est borné quand $k \to \infty$ que si $\|T x\| = 0$

b) Evident.

c) Si T_n est une suite de Cauchy dans $\pi_{p,q}(E,F)$, alors, d'après b) c'est une suite de Cauchy dans $L(E,F)$ qui est un Banach. Il existe alor T bornée telle que $\lim \|T - T_n\| = 0$. Si $\pi_{p,q}(T_m - T_n) < \varepsilon$ pour m et $n \geq n_o$, alors,

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|T_m x_i - T_n x_i\|^q\right)^{1/q} \leq \varepsilon \sup_{\xi\in\mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |<\xi,x_i>|^p\right)^{1/p} \quad \text{pour } m,n \geq n_o$$

et pour $m \to \infty$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|T x_i - T_n x_i\|^q\right)^{1/q} \leq \varepsilon \sup_{\xi\in\mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |<\xi,x_i>|^p\right)^{1/p} \quad \text{pour } n \geq n_o$$

d'où $\pi_{p,q}(T - T_n) \leq \varepsilon$ et $T \in \pi_{p,q}(E,F)$.

d) Si T' est la transposée de T, $\mathfrak{J}'$ la boule unité fermée du dual F' de F

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|ST x_i\|^q\right)^{1/q} \leq \pi_{p,q}(S) \sup_{\eta\in\mathfrak{J}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |<\eta,T x_i>|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq \pi_{p,q}(S)\|T\| \sup_{\eta\in\mathfrak{J}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |<\|T\|^{-1} T'\eta, x_i>|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq \pi_{p,q}(S)\|T\| \sup_{\xi\in\mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |<\xi, x_i>|^p\right)^{1/p} .$$

L'autre propriété vient de :

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|ST\, x_i\|^q\right)^{1/q} \leq \|S\| \left(\sum_{i=1}^{k} \|T\, x_i\|^q\right)^{1/q} \leq \|S\|\, \pi_{p,q}(T) \sup_{\xi\in\mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |<\xi,x_i>|^p\right)^{1/p}$$

C.Q.F.D.

<u>Définition</u> : On appelle <u>p-sommante</u> une application (p,p)-sommante. On notera $\pi_{p,p}(E,F)$ par $\pi_p(E,F)$ et $\pi_{p,p}(T)$ par $\pi_p(T)$.

L'inégalité vraie pour tous réels positifs a_i : $\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^p\right)^{1/p}$ pour $p < q$ entraîne $\pi_r(E,F) \subset \pi_{p,q}(E,F)$ pour $p \leq r \leq q$.

§ 2. INEGALITE DE PIETSCH

Théorème : <u>Si E et F sont des espaces vectoriels normés et $0 < p < \infty$, l'application linéaire T de E dans F est p-sommante si et seulement s'il existe sur $\mathcal{E}'$, boule unité fermée de E' muni de la topologie faible, une probabilité de Radon μ et un nombre $\rho > 0$ tels que</u>

$$\forall\, x \in E \quad \|T\, x\| \leq \rho \left(\int_{\mathcal{E}'} |<\xi,x>|^p\, d\mu\right)^{1/p}$$

<u>Le plus petit ρ vérifiant cette inégalité sera précisément</u> $\pi_p(T)$.

<u>Démonstration</u>

Si cette inégalité est vraie, appelons $\omega_p(T)$ le plus petit ρ la vérifiant. Alors,

$$\forall\, k,\ \forall\, x_1,\dots,x_k \in E,\quad \forall\, \xi \in \mathcal{E}',\ \sum_{i=1}^{k} |<\xi,x_i>|^p \leq \sup_{\xi\in\mathcal{E}'} \sum_{i=1}^{k} |<\xi,x_i>|^p$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{k} \|T\, x_i\|^p \leq \rho^p \int_{\mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |<\xi,x_i>|^p\right) d\mu \leq \rho^p \sup_{\xi\in\mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |<\xi\,;\,x_i>|^p\right)$$

et donc T est p-sommante avec $\pi_p(T) \leq \omega_p(T)$.

Inversement, supposons p-sommante, il existe alors ρ tel que

$$\sum_{i=1}^{k} \|T\, x_i\|^p \leq \rho^p \sup_{\xi\in\mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |<\xi,x_i>|^p\right)$$

Pour toute fonction φ de l'espace des fonctions continues réel-les $C_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}')$ sur $\mathcal{E}'$ muni de la topologie faible, pour laquelle il est compa on pose :

$$s(\varphi) = \inf_{x_1, \dots, x_k \in E} \left(\sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\varphi(\xi) + \rho^p \sum_{i=1}^{k} |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right) - \sum_{i=1}^{k} \|Tx_i\|^p \right)$$

Evidemment, $\forall\ \lambda > 0$, $s(\lambda\varphi) = \lambda s(\varphi)$. Montrons que s est sous-additive. Soient $\varepsilon > 0$, et $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que, pour une fonction $\varphi_1 \in C_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}')$,

$$s(\varphi_1) \geq \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\varphi_1(\xi) + \rho^p \sum_{i=1}^{k} |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right) - \sum_{i=1}^{k} \|Tx_i\|^p - \varepsilon$$

Alors,

$$s(\varphi_1 + \varphi_2) \leq \inf_{x_{k+1}, \dots, x_{k+1} \in E} \left(\sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi) + \rho^p \sum_{i=1}^{k+1} |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right) - \sum_{i=1}^{k+1} \|Tx_i\|^p \right)$$

$$\leq s(\varphi_1) - \varepsilon + \inf_{x_{k+1}, \dots, x_{k+1} \in E} \left(\sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\varphi_2(\xi) + \rho^p \sum_{i=k+1}^{k+1} |\langle \xi, x_i \right. \right. - \left. \sum_{i=k+1}^{k+1} \|Tx_i\|^p \right)$$

$$\leq s(\varphi_1) + s(\varphi_2) - \varepsilon$$

et finalement :

$$s(\varphi_1 + \varphi_2) \leq s(\varphi_1) + s(\varphi_2)$$

De plus,

$$\inf_{\xi \in \mathcal{E}'} \varphi(\xi) \leq s(\varphi) \leq \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \varphi(\xi)$$

La fonctionnelle s étant sous-linéaire sur $C_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}')$, le théorème de Hahn-Banach prouve l'existence sur $C_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}')$ d'une forme linéaire μ telle que

$$\langle \varphi, \mu \rangle \leq s(\varphi) \quad \text{pour } \varphi \in C_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}')$$

Pour chaque fonction φ non négative,

$$\langle -\varphi, \mu \rangle \leq s(-\varphi) \leq 0$$

ce qui montre que la forme linéaire μ est positive et continue. En outre, $<1,\mu> \leq s(1) = 1$ et $<-1,\mu> \leq s(-1) = -1$ montrent que $<1,\mu> = 1$.

On définit maintenant la fonction φ_x par $\varphi_x(\xi) = <\xi,x>$. Alors, $|\varphi_x|^p \in C_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}')$ et

$$s(-\rho^p|\varphi_x|^p \leq \sup_{\xi\in\mathcal{E}'} (-\rho^p|\varphi_x(\xi)|^p + \rho^p|<\xi,x>|^p) - \|T x\|^p$$

d'où $$\|T x\|^p \leq <\rho^p|\varphi x|^p, \mu>$$

c'est-à-dire $$\|T x\| \leq \rho(\int_{\mathcal{E}'} |<\xi,x>|^p \, d\mu)^{1/p}$$

puisque μ est une probabilité de Radon sur $\mathcal{E}'$.

On en déduit $\omega_p(T) \leq \pi_p(T)$, d'où finalement $\omega_p(T) = \pi_p(T)$

C.Q.F.D.

Proposition (VII ; 2,1)

Si $0 < p < q < +\infty$, $\pi_p(E,F) \subset \pi_q(E,F)$ et $\pi_p(.) \geq \pi_q(.)$

Démonstration

Si T est p-sommante, il existe sur $\mathcal{E}'$ une probabilité μ telle que $\forall\, x \in E$ $\|T x\| \leq \pi_p(T) \, (\int_{\mathcal{E}'} |<\xi,x>|^p \, d\mu)^{1/p}$ et si r est tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$

$$\|T x\| \leq \pi_p(T) \, (\int_{\mathcal{E}'} |<\xi,x>|^p \, d\mu)^{1/p} \leq \pi_p(T)(\int_{\mathcal{E}'} 1^r \, d\mu)^{1/r} \, (\int_{\mathcal{E}'} |<\xi,x>|^q \, d\mu)^{1/q}$$

ce qui prouve que T est q-sommante avec $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$.

C.Q.F.D.

Proposition (VII ; 2,2)

Une application p-sommante (avec $0 < p < \infty$) transforme toute suite faiblement convergente en suite convergente.

Démonstration

Si $x_n \to 0$ faiblement dans E, alors $\varphi_n \to 0$ en tout point de $\mathcal{E}'$, où φ_n est définie par $\varphi_n(\xi) = \langle\xi, x_n\rangle$. De plus, il existe τ tel que $\forall n$, $\|x_n\| < \tau$ et donc $\forall \xi \in \mathcal{E}'$, $|\varphi_n(\xi)| \leq \|\xi\| \, \|x_n\| \leq \tau$. Le théorème de convergenc de Lebesgue prouve alors que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{E}'} |\langle\xi, x_n\rangle|^p \, d\mu = 0, \qquad \text{d'où} \quad \lim_{n\to\infty} \|T\, x_n\| = 0$$

C.Q.F.D.

§ 3. UNE FACTORISATION DES APPLICATIONS p-SOMMANTES $(p \geq 1)$

Proposition (VII ; 3,1)

L'injection canonique de $C(K)$ dans $L_p(K,\mu)$ où K est un compact et μ une probabilité sur K, est p-sommante et de norme égale à 1.

Démonstration

Sur $C(K)$ on définit les formes linéaires bornées δ_t, $t \in K$, par $\langle\delta_t, x\rangle = x(t)$, d'où $\|\delta_t\| = 1$. Alors, si $\hat{x}_i$ est la μ-classe d'équivalence de x_i, on a pour tous $x_1, \ldots, x_k \in E$

$$\sum_{i=1}^{k} \|\hat{x}_i\|_{L_p}^p = \sum_{i=1}^{k} \int_K |x_i(t)|^p \, d\mu = \int_K \sum_{i=1}^{k} |\langle\delta_t, x_i\rangle|^p \, d\mu \leq \sup_{\|\xi\|\leq 1} \sum_{i=1}^{k} |\langle\xi, x_i\rangle|^p$$

C.Q.F.D.

Proposition (VII ; 3,2)

L'application identique I de $L_\infty(K,\mu)$ dans $L_p(K,\mu)$, où K est un compact et μ une probabilité sur K, est p-sommante.

Démonstration

$L_\infty(K,\mu)$ est une C^*-algèbre. D'après le théorème de Guelfand, $L_\infty(K,\mu)$ est isomorphe à $C(K^*)$, espace des fonctions continues sur l'ensemble K^* des idéaux maximaux réguliers de $L_\infty(K,\mu)$; K^* peut être plongé dans le dual de $L_\infty(K,\mu)$, on le munit de la topologie induite par la topologie faible sur $(L_\infty(K,\mu))'$. Alors, K^* est compact.

Soit A l'isomorphisme entre $L_\infty(K,\mu)$ et $C(K^*)$. Pour $g \in C(K^*)$ l'application μ^* donnée par $\mu^*(g) = \mu(A^{-1}g)$ définit une probabilité de

Radon sur K*. D'après la proposition précédente, l'application canonique I* de C(K*) dans $L_p(K^*,\mu^*)$ est p-sommante. L'image par I* de C(K*) est dense dans $L_p(K,\mu)$. On peut alors définir un isomorphisme isométrique B de $L_p(K^*,\mu^*)$ dans $L_p(K,\mu)$. D'après la proposition (1,2,d), I = BI*A est p-sommante.

$$\begin{array}{ccc} L_\infty(K,\mu) & \xrightarrow{\ I\ } & L_p(K,\mu) \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle B} \\ C(K^*) & \xrightarrow{\ I^*\ } & L_p(K^*,\mu^*) \end{array}$$

C.Q.F.D.

Proposition (VII ; 3,3)

Si $T : E \to F$ est p-sommante $(0 < p < \infty)$, et M un sous-espace de E, alors T_1, restriction de T à M, est p-sommante.

Démonstration

En effet, la restriction à M d'une forme linéaire sur E de norme ≤ 1 est une forme linéaire sur M de norme ≤ 1. En appelant $\mathfrak{M}'$ la boule unité fermée de M', dual de M,

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|T_1 x_i\|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{k} \|T x_i\|^p\right)^{1/p} \leq \rho \sup_{\xi\in\mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |\langle\xi,x_i\rangle|^p\right)^{1/p} \leq$$
$$\leq \rho \sup_{\eta\in\mathfrak{M}'} \left(\sum_{i=1}^{k} |\langle\eta,x_i\rangle|^p\right)^{1/p}$$

C.Q.F.D.

Proposition (VII ; 3,4)

Pour qu'une application $T : E \to F$ soit p-sommante $(1 \leq p < \infty)$, il faut et il suffit qu'il existe un compact K, une mesure de Radon μ sur K et un sous-espace fermé de $L_p(K,\mu)$ muni de la norme induite tels que T soit égale au produit d'une application T_1 p-sommante de E dans S et d'une application continue T_2 de S dans F, de norme égale à $\pi_p(T)$.

Démonstration

C'est évidemment suffisant d'après la proposition (1,2,d). Inversement, à tout $x \in E$, on associe la fonction φ_x de $C(\mathcal{E}')$ définie par $\varphi_x(\xi) = \langle\xi,x\rangle$. On prend pour compact $K = \mathcal{E}'$, pour mesure μ la probabilité de Radon de l'inégalité de Pietsch. Si I est l'application canonique de C(K) dans $L_p(K,\mu)$ et P l'application de E dans C(K) telle que $P(x) = \varphi_x$, on a $\pi_p(I) = \|P\| = 1$. Prenons pour S la fermeture dans $L_p(K,\mu)$ de IP(E). On peut alors définir sur S une application Q dans F telle que $Q(\hat{\varphi}_x) = T_x$ où $\hat{\varphi}_x$ est la classe d'équivalence de φ_x dans $L_p(K,\mu)$; Q est bornée car :

$$\|Q(\hat{\varphi}_x)\| = \|Tx\| \leq \pi_p(T)\left(\int_K |\langle\xi,x\rangle|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \pi_p(T)\|\hat{\varphi}_x\|_{L_p} = \pi_p(T)\|\hat{\varphi}_x\|_S$$

Soit I_1 la restriction à P(E) de I. D'après la proposition précédente, I_1 est p-sommante, et $\pi_p(I_1) \leq 1$. Comme $T = Q\, I_1 P$,
$\pi_p(T) \leq \|P\| . \pi_p(I_1) . \|Q\| \leq \|Q\|$, d'où finalement $\pi_p(T) = \|Q\|$.

$$E \xrightarrow{P} C(K) \xrightarrow{I} L_p(K,\mu)$$

$$E \xrightarrow{P} P(E) \xrightarrow{I_1} S \xrightarrow{Q} F$$

C.Q.F.

<u>Remarque</u> : On obtient le même résultat en remplaçant C(K) par $L_\infty(K,\mu)$, d'après la proposition (3,2).