L. Schwartz

Probabilités cylindriques et fonctions aléatoires

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n^o 6, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   L. S C H W A R T Z   1 9 6 9 - 1 9 7 0

PROBABILITES CYLINDRIQUES ET FONCTIONS ALEATOIRES

-=-

Exposé N° 6 — 8 Décembre 1969

§ 1. VARIABLES ALEATOIRES

Un espace probabilisé est un espace topologique séparé Ω muni d'une probabilité de Radon μ.

Une variable aléatoire relative à (Ω,μ), à valeurs dans un espace topologique séparé X, est une μ-classe f d'applications μ-mesurables-Lusin de Ω dans X. La loi de cette variable est la probabilité image $f(\mu)$. Deux variables aléatoires, f, f', relatives à des espaces probabilisés (Ω,μ), (Ω',μ'), à valeurs dans le même espace X, sont dites isonomes, si leurs lois $f(\mu)$, $f'(\mu')$ sont les mêmes. On appellera $L^0(\Omega,\mu\,;X)$ l'ensemble des variables aléatoires relatives à (Ω,μ), à valeurs dans X. Si X est un espace uniforme, on met sur $L^0(\Omega,\mu\,;X)$ la structure uniforme dite de la convergence en mesure ou en probabilité, dont un système fondamental d'entourages est défini par les (V,ε), V entourage de la structure uniforme de X, $\varepsilon > 0$, avec

$$(f,g) \in (V,\varepsilon), \quad f \in L^0(\Omega,\mu\,;X), \quad g \in L^0(\Omega,\mu\,;X),$$

$$\text{si} \quad \mu\{\omega \in \Omega\,;\ (f(\omega),\, g(\omega)) \notin V\} \leq \varepsilon\ .$$

(Si X est seulement un espace topologique, sans structure uniforme, il n'y a pas de topologie raisonnable de la convergence en probabilité sur $L^0(\Omega,\mu\,;X)$).

Si X est un espace vectoriel topologique, en particulier si $X = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $L(\Omega,\mu\,;X)$ est lui aussi un espace vectoriel topologique ; on le note $L^0(\Omega,\mu)$ si $X = \mathbb{K}$.

Proposition (VI ; 1,1)

Soit X un espace uniforme séparé. L'application $f \mapsto f(\mu)$ de $L^0(\Omega,\mu\,;X)$ dans $\mathcal{P}(X)$ est continue ("la convergence en probabilité implique la convergence en loi")

Pour simplifier, nous ne le démontrerons que pour $X = \mathbb{K}$. Comme il s'agit de mesures de masse 1, la convergence étroite est équivalence à la convergence vague, ou encore à la convergence simple sur l'ensemble des fonctions uniformément continues bornées [illegible] $\mathbb{K}$. Or

$$(f(\mu))(\varphi) = \int \varphi\ (f(\omega))d\mu(\omega).$$

Si alors f converge en probabilité vers f_o, on voit aussitôt que $\varphi \circ f$ converge aussi en probabilité vers $\varphi \circ f_o$ à cause de l'uniforme continuité de φ ; alors, φ étant borné, $\int \varphi(f(\omega))d\mu(\omega)$ converge vers $\int \varphi(f_o(\omega))\ d\mu(\omega)$, c q f d.

§ 2. FONCTIONS ALEATOIRES

Une fonction aléatoire relative à (Ω,μ), définie sur un ensemble T, à valeur dans un espace topologique séparé X, est une application f de T dans $L^o(\Omega,\mu\ ;X)$. Pour $t \in T$, f(t) est donc une variable aléatoire à valeurs dans X ; on notera par $f(t)(\omega)$ la "fonction" $\Omega \to X$ qu'elle définit (à un ensemble μ-négligeables près !). Si T est un espace vectoriel et X un espace vectoriel topologique, on dira que la fonction aléatoire est linéaire si f est linéaire de T dans $L^o(\Omega,\mu\ ;X)$. Si T est un espace topologique et X un espace uniforme, on dira que la fonction aléatoire est continue (on dira souvent : continue en probabilité), si f est continue de T dans $L^o(\Omega,\mu\ ;X)$.

Soient $t_1, t_2,\dots,t_n \in T$; alors $f(t_1),f(t_2),\dots,f(t_n)$ sont des μ-classes d'applications μ-mesurables de Ω dans X, donc $(f(t_1), f(t_2),\dots,f(t_n)) : \omega \to (f(t_1)(\omega), f(t_2)(\omega),\dots,f(t_n)(\omega))$ est une μ-classe d'applications μ-mesurables de Ω dans X^n, c'est-à-dire une variable aléatoire à valeurs dans X^n ; elle a une loi $(f(t_1),f(t_2),\dots,f(t_n))(\mu) \in \mathcal{P}(X^n)$, dite loi marginale de la fonction aléatoire relative à $(t_1,t_2,\dots,t_n) \in T^n$. On dit que 2 fonctions aléatoires f, f', relatives à (Ω,μ), (Ω',μ'), mais pour le même ensemble T et le même espace topologique X, sont isonomes, si toutes leurs lois marginales sont les mêmes. La classe d'isonomie d'une fonction aléatoire est la classe (ce n'est pas un ensemble !) des fonctions aléatoires qui lui sont isonomes.

Proposition (VI ; 2,1)

Soit T un ensemble, X un espace topologique complètement régulier, $\check{X}$ son compactifié de Čech. Il existe une correspondance bijective entre les classe d'isonomie de fonctions aléatoires définies sur T à valeurs dans X,

<u>et les probabilités de Radon $\check{\lambda}$ sur $\check{X}^T$, telles que pour tout $t \in T$, la projection $\pi_t(\check{\lambda})$ soit portée par X.</u>

<u>Démonstration</u>

L'énoncé précédent est sans grande valeur, seule importe la correspondance bijective explicite ! Nous allons la donner ici, et ne l'avons pas mise dans l'énoncé pour ne pas le rendre kilométrique.

Soit $\check{\lambda}$ une probabilité de Radon sur $\check{X}^T$, telle que, pour tout $t \in T$, la projection $\pi_t(\check{\lambda})$ sur le $t^{\text{ième}}$ facteur $\check{X}$ soit portée par X. Prenons $\Omega = \check{X}^T$, $\mu = \check{\lambda}$, $f(t) = \pi_t$, application de Ω dans $\check{X}$. Alors π_t est une variable aléatoire relative à (Ω,μ), à valeurs dans $\check{X}$; mais, puisque $\pi_t(\check{\lambda})$ est portée par X, π_t est $\check{\lambda}$-presque partout à valeurs dans X, donc définit une variable aléatoire à valeurs dans X. Finalement $f : t \mapsto f(t) = \pi_t$ est bien une fonction aléatoire définie sur T à valeurs dans X. Si $f^\bullet$ est sa classe d'isonomie, $\check{\lambda} \mapsto f^\bullet$ est une application de l'ensemble des probabilités sur $\check{X}^T$ ayant la propriété indiquée dans l'ensemble des classes d'isonomie de fonctions aléatoires définies sur T à valeurs dans X.

L'application $\check{\lambda} \to f^\bullet$ est injective. Si, en effet, la classe d'isonomie de f est connue, cela veut dire que les images $\pi_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(\check{\lambda})$ de $\check{\lambda}$ par toutes les projections $\pi_{t_1,t_2,\ldots,t_n}$ de $\check{X}^T$ sur tous les produits finis $\check{X}^{\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}}$ sont connues, et $\check{\lambda}$ est connue comme limite projective.

Elle est aussi surjective. Soit en effet f une fonction aléatoire $T \to L^0(\Omega,\mu\,;X)$. Pour toute partie finie $S = \{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ de T, on a une probabilité λ_S sur X^S, à savoir la loi marginale de f relative à S. Si $S \subset S'$, "l'application" (définie à un ensemble μ négligeable près) de Ω dans X^S définie par $(f(t_1),f(t_2),\ldots,f(t_n))$ est la composée de l'application analogue de Ω dans $X^{S'}$ et de la projection $\pi_{S,S'}$ de $X^{S'}$ sur X^S ("oubli" d'un certain nombre de coordonnées !) ; donc $\lambda_S = \pi_{S,S'}\,\lambda_{S'}$. Alors le système des

λ_S est un système projectif de mesures sur X^T, relatif au système projectif de ses projections sur les produits finis de facteurs. Mais la condition de Prokhorov n'a aucune raison d'être réalisée ! On peut alors remplacer partout X par $\check{X}$, car une variable aléatoire à valeurs dans X est à valeurs dans $\check{X}$; et $\check{X}$ est compact. Donc il existe une probabilité *

<u>Remarque</u> : Dans chaque classe d'isonomie, il existe ainsi un représentant, avec toujours le même $\Omega = \check{X}^T$, et les mêmes $f(t) = \pi_T$ donc "la même f' seule la probabilité $\mu = \check{\lambda}$ varie.

§ 3. PROBABILITES CYLINDRIQUES ET FONCTIONS ALEATOIRES LINEAIRES

<u>Proposition (VI ; 3,1)</u>

<u>Soit E un espace vectoriel localement convexe séparé. Il existe des correspondances bijectives entre</u> :

A) <u>les probabilités cylindriques sur E</u> ;

B) <u>les classes d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires sur E', à valeurs scalaires</u> ;

C) <u>les probabilités de Radon $\check{\lambda}$ sur $\mathbf{K}^{E'}$, ayant les 3 propriétés suivantes</u> :

c_1) <u>Pour tout $\xi \in E'$, la variable aléatoire</u> π_ξ : <u>$(\check{\mathbf{K}}^{E'}, \check{\lambda}) \to \mathbf{K}$, projection sur le ξ-ième facteur, est ($\check{\lambda}$-presque sûrement) à valeurs dans $\mathbf{K}$</u> ;

c_2) <u>Pour tout $\xi \in E'$ et tout $k \in \mathbf{K}$, la variable aléatoire</u> $\pi_{k\xi} - k\pi_\xi$ <u>est $\check{\lambda}$ presque sûrement nulle</u> ;

c_3) <u>Pour tous $\xi, \eta \in E'$, la variable aléatoire</u> $\pi_{\xi+\eta} - \pi_\xi - \pi_\eta$ <u>est $\check{\lambda}$-presque sûrement nulle.</u>

<u>Démonstration</u>

La proposition (VI ; 2,1) donne une correspondance bijective entre les classes d'isonomie $f^\bullet$ de fonctions aléatoires f sur E' et les probabilités de Radon $\check{\lambda}$ sur $\check{\mathbf{K}}^{E'}$ vérifiant c_1. Mais $f : E' \to L^0(\Omega,\mu)$ est linéaire si et seulement si $f(\xi+\eta) - f(\xi) - f(\eta)$ et $f(k\xi) - kf(\xi)$ sont nulle

* de Radon $\check{\lambda}$ sur $\check{X}^T$, telle que $\lambda_S = \pi \check{\lambda}$ pour toute partie finie S de T. D'après la construction même de λ, la fonction aléatoire associée est isonome à f, cqfd.

pour $\xi, \eta \in E'$ $k \in \mathbb{K}$. Or il est équivalent de dire que $f(\xi+\eta) - f(\xi) - f(\eta) = 0$, ou de dire que la loi marginale $(f(\xi+\eta), f(\xi) f(\eta))(\mu)$ sur $\mathbb{K}^3$ est portée par le sous-espace $\{(u,v,w) \in \mathbb{K}^3 ; u - v - w = 0\}$ de $\mathbb{K}^3$; cela ne dépend donc que de la classe d'isonomie $f^\cdot$ de f, et peut s'exprimer sur un représentant particulier de cette classe, soit $\Omega = \check{\mathbb{K}}^{\check{E}'}$, $\mu = \check{\lambda}$, $f(\xi) = \pi_\xi$, c'est-à-dire par la condition c_3 ; en raisonnant de même avec $f(k\xi) - kf(\xi)$, on voit qu'il y a bien correspondance bijective entre les objets respectifs de B et C.

Reprenons notre fonction aléatoire linéaire $f : E' \to L^0(\Omega,\mu)$. Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, des éléments de E' définissant une application linéaire de E dans $\mathbb{K}^n$; alors la loi marginale $(f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n))(\mu)$ est une probabilité de Radon $\lambda_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}$ sur $\mathbb{K}^n$. Si maintenant on a $\eta_i = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}\, \xi_j$, $i = 1,2,\ldots,m$, en appelant $c : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ la matrice $c_{i,j}$) l'application (définie à un ensemble μ-négligeable près)$(f(\eta_1),\ldots,f(\eta_m))$ de Ω dans $\mathbb{K}^m$ est composée de $(f(\xi_1),\ldots,f(\xi_n)) : \Omega \to \mathbb{K}^n$ et de c, puisque f est linéaire ; donc la loi marginale $(f(\eta_1),\ldots,f(\eta_m))(\mu)$ est $(c)(f(\xi_1),\ldots,f(\xi_n))(\mu)$ ou $\lambda_{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m} = (c)(\lambda_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n})$. Donc les $\lambda_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}$ forment un système compatible de probabilités de Radon associées aux applications linéaires continues de E dans les $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}$,◆ Les $\lambda_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}$ étant les lois marginales de f, ne dépendent que de sa classe d'isonomie $f^\cdot$, et définissent une application injective $f^\cdot \to \lambda$, $f^\cdot$ classe d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires sur E', λ probabilité cylindrique sur E. <u>La probabilité cylindrique λ, associée à f, est la seule pour laquelle, pour tout $\xi \in E'$, $\xi(\lambda)$ (ou λ_ξ) = $(f(\xi))(\mu)$, loi marginale relative à ξ</u> ; on sait en effet que, si on connaît $\xi(\lambda)$ pour tout ξ, on connait l'image de Fourier de λ, donc λ elle-même.

Inversement, soit λ une probabilité cylindrique sur E. Pour S partie finie de E', $S = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, on a une probabilité de Radon $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)(\lambda) = \lambda_S$ sur $\mathbb{K}^n$ ou $\mathbb{K}^S = \mathbb{K}^{\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}}$; si $S \subset S'$, on a trivialement $\lambda_S = \pi_{S,S'}\, \lambda_{S'}$, où $\pi_{S,S'}$ est la projection de $\mathbb{K}^{S'}$ sur $\mathbb{K}^S$, donc on a un système projectif de probabilités sur les produits finis de

---

◆ donc définissent une probabilité cylindrique λ sur E.

facteurs de $\mathbf{K}^{E'}$; la condition de Prokhorov n'ayant aucune raison d'être réalisée, on a seulement une probabilité de Radon λ sur $\check{\mathbf{K}}^{E'}$, avec $\pi_S \lambda = \lambda_S$. On a donc une probabilité vérifiant c_1 de C ; montrons qu'elle vérifie c_2 et c_3. Prenons, par exemple, c_3. L'application $(\xi+\eta, \xi, \eta)$ de E' dans $\mathbf{K}^3$ (ou $\mathbf{K}^{\{\xi+\eta, \xi, \eta\}}$) définit la probabilité de Radon $(\xi+\eta, \xi, \eta)(\lambda)$; son image par $(u,v,w) \mapsto u-v-w$, $\mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}$, est l'image de λ par 0 donc la probabilité δ sur $\mathbf{K}$, à cause de la compatibilité linéaire des images de λ (définition d'une probabilité cylindrique !). Cela prouve que $\pi_{\xi+\eta,\xi,\eta}(\check{\lambda})$ est portée par l'hyperplan $\{(u,v,w) \in \mathbf{K}^3 ; u-v-w = 0\}$, ou que $\pi_{\xi+\eta} - \pi_\xi - \pi_\eta$ est $\check{\lambda}$-presque partout nulle, d'où c_3, et de même c_2. Si alors f est la fonction aléatoire associée à λ, soit $\Omega = \check{\mathbf{K}}^{E'}$, $\mu = \check{\lambda}$, $f(\xi) = \pi_\xi$, on a bien $(f(\xi))(\mu) = \xi(\lambda)$, c'est donc la réciproque de l'application antérieure, qui est donc bien bijective, c q f d.

Récapitulation

1) Si λ est une probabilité cylindrique sur E, la probabilité $\check{\lambda}$ est la seule probabilité de Radon sur $\check{\mathbf{K}}^{E'}$ vérifiant c_1, c_2, c_3, telle que $\pi_\xi(\check{\lambda}) = \xi(\lambda')$ pour tout $\xi \in E'$. En outre, pour $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in E'^n$ ou $\mathcal{L}(E^n ; \mathbf{K}^n)$, $\pi_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(\check{\lambda}) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathbf{K}^n)$.

2) Si $\check{\lambda}$ est une probabilité de Radon sur $\check{\mathbf{K}}^{E'}$ vérifiant c_1, c_2, c_3, la probabilité cylindrique λ associée est la seule qui vérifie $\xi(\lambda) = \pi_\xi(\check{\lambda})$ pour $\xi \in E'$; ou $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)(\lambda) = \pi_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(\check{\lambda})$ pour $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in E'$

3) Si $f : E' \to L^0(\Omega, \mu)$ est une fonction aléatoire linéaire sur E', la probabilité cylindrique λ associée est la seule pour laquelle $\xi(\lambda)$ soit la loi marginale $(f(\xi))(\mu)$ pour tout $\xi \in E'$, ou pour laquelle $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)(\lambda)$ soit la loi marginale $(f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n))(\mu)$.

4) Si $f : E' \to L^0 (\Omega, \mu)$ est une fonction aléatoire linéaire, la probabilité $\check{\lambda}$ sur $\check{\mathbf{K}}^{E'}$, vérifiant c_1, c_2, c_3, associée à f, est la seule pour laquelle, pour tout $\xi \in E'$, $\pi_\xi(\check{\lambda}) = (f(\xi))(\mu)$; ou pour $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in E'^n$, $\pi_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(\check{\lambda}) = (f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n))(\mu)$;

5) Si $\check{\lambda}$ est une probabilité de Radon sur $\check{\mathbb{K}}^{E'}$ verifiant C_1, C_2, C_3, un représentant de la classe d'isonomie associée est $\Omega = \check{\mathbb{K}}^{E'}$, $\mu = \check{\lambda}$, $f(\xi) = \pi_\xi$.

6) Si λ est une probabilité cylindrique sur E, $f^{\bullet}$ est l'unique classe d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires sur E' tells que pour $\xi \in E'$, la loi marginale $(f^{\bullet}(\xi))(\mu)$ soit $\xi(\lambda)$; ou que, pour $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \in E'^n$, $(f^{\bullet}(\xi_1),f^{\bullet}(\xi_2),\dots,f^{\bullet}(\xi_n))(\mu)$ soit $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)(\lambda)$.

<u>Notation</u> : On notera par λ une probabilité cylindrique sur E, $\check{\lambda}$ la probabilité de Radon associée sur $\check{\mathbb{K}}^{E'}$, $f^{\bullet}_{\lambda}$ la classe d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires associée ; par λ_f la probabilité cylindrique associée à f, $\check{\lambda}_f$ la probabilité de Radon associée sur $\check{\mathbb{K}}^{E'}$.

<u>Remarque</u> : si T est un ensemble, f une fonction aléatoire $T \to L^0(\Omega,\mu)$, elle définit une fonction aléatoire linéaire $\mathbb{K}^{(T)} \to L^0(\Omega,\mu)$, où $\mathbb{K}^{(T)}$ est l'espace des combinaisons $\mathbb{K}$-linéaires formelles d'éléments de T, donc une probabilité cylindrique sur le produit $E = \mathbb{K}^T$, dont le dual est $E' = \mathbb{K}^{(T)}$. On a donc une correspondance bijective entre les probabilités cylindriques sur $\mathbb{K}^T$, et les classes d'isonomie de fonctions aléatoires arbitraires sur T ou linéaires sur $\mathbb{K}^{(T)}$.

Si T est dénombrable (par exemple $T = \mathbb{N}$, alors une fonction aléatoire sur T est une suite de variables aléatoires), la dénombrabilité affirme que la condition de Prokhorov est automatiquement réalisée (oubli de l exposé n°1 ; c'est évident, car si une mesure sur $\check{\mathbb{K}}^{\mathbb{N}}$ a des projections sur tous les facteurs $\check{\mathbb{K}}$ portées par $\mathbb{K}$, elle est trivialement portée par $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$). Donc il y a correspondance bijective entre les classes d'isonomie de suites de variables aléatoires et les probabilités cylindriques ou de Radon sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

§ 4. PROPRIETES RELATIVES DE λ ET DE f.

Proposition (VI ; 4,1)

Soit $f : E' \to L^0(\Omega,\mu)$ une fonction aléatoire linéaire sur le dual E' d'un Banach E. Pour que la probabilité cylindrique λ_f associée soit de type p, $0 < p \leq +\infty$, il faut et il suffit que f soit continue de E' dans $L^p(\Omega,\mu)$, et alors

$$\|\lambda_f\|_p^* = \|f\|_{\mathcal{L}(E' \; ; \; L^p(\Omega,\mu))}$$

Démonstration

L'inégalité ci-dessus est triviale car

$$\|\lambda_f\|_p^* = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|\xi(\lambda_f)\|_p = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|(f(\xi))(\mu)\|$$

$$= \sup_{\|\xi\|\leq 1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p d\,(f(\xi)(\mu))(t)\right)^{1/p} = \sup_{\|\xi\|\leq 1} \left(\int_\Omega |f(\xi)(\omega)|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p}$$

$$= \sup_{\|\xi\|\leq 1} \|f(\xi)\|_{L^p(\Omega,\mu)} = \|f\|_{\mathcal{L}(E';L^p(\Omega,\mu))} .$$

Nous verrons ultérieurement un grand nombre de généralisations et variantes de ce théorème.