L. Schwartz

Ordre et type ; problèmes d'approximation ; applications radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 5, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE L. SCHWARTZ 1969-1970

ORDRE ET TYPE ; PROBLEMES D'APPROXIMATION ; APPLICATIONS RADONIFIANTES

Exposé N° 5

1er Décembre 1969

§ 1. ORDRE ET TYPE

Rappelons que si Φ est un poids et θ une fonction s.c.i. ≥ 0 (finie ou non) sur un espace vectoriel topologique E, une probabilité de Radon λ sur E est dite d'ordre (Φ,θ), si $\Phi(\theta(\lambda))$ (écrit aussi $\Phi(\lambda,\theta)$) ≤ 1. Si E est un Banach, et si Φ est un poids homogène, il est sous-entendu que θ est la norme ou proportionnelle à la norme, suivant les cas ; on écrit $\Phi(\lambda)$ au lieu de $\Phi(\lambda,\|\ \|_E)$, mais λ est dite d'ordre Φ si $\Phi(\lambda) < +\infty$, c'est-à-dire s'il existe $M \geq 0$ fini, tel que λ soit d'ordre $(\Phi, \frac{1}{M}\|\ \|_E)$ $(M = \Phi(\lambda)$ par exemple).

Soit maintenant θ' une fonction ≥ 0 arbitraire (finie ou non) sur E'. Une probabilité cylindrique λ sur E est dite de type (Φ,θ'), si, pour tout $\xi \in E'$, $\Phi(\xi(\lambda)) \leq \theta'(\xi)$ [Φ étant un poids, donc une fonction sur $\mathcal{P}(\overline{\mathbf{R}}_+)$, se prolonge en une fonction sur $\mathcal{P}(\overline{\mathbf{R}})$, par l'application que $t \mapsto |t|$, $\overline{\mathbf{R}} \to \overline{\mathbf{R}}_+$, définit de $\mathcal{P}(\overline{\mathbf{R}})$ dans $\mathcal{P}(\overline{\mathbf{R}}_+)$; $\xi(\lambda) \in \mathcal{P}(\overline{\mathbf{R}})$, donc $\Phi(\xi(\lambda))$ a un sens. Il sera commode, bien qu'abusif, si μ est une probabilité sur $\overline{\mathbf{R}}$, de noter $|\mu|$ son image dans $\mathcal{P}(\overline{\mathbf{R}}_+)$ par $t \mapsto |t|$; et donc d'écrire que $\Phi(\xi(\lambda)) = \Phi(|\xi(\lambda)|)$, qu'on écrira aussi $\Phi(|\xi|(\lambda))$].

Si Φ est homogène et E Banach, on dit que λ est de type Φ s'il existe un $M \geq 0$ fini tel que λ soit de type $(\Phi, M\|\ \|_{E'})$, autrement dit tel que $\Phi(\xi(\lambda)) \leq M\|\xi\|$; le plus petit nombre M ayant cette propriété, soit $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{\|\xi\|\leq 1} \frac{\Phi(\xi(\lambda))}{\|\xi\|}$, s'écrit $\Phi^*(\lambda)$; donc λ est de type Φ si et seulement si $\Phi^*(\lambda) < +\infty$.

Si λ est de Radon, bien évidemment $\Phi^*(\lambda) \leq \Phi(\lambda)$, parce que pour $\|\xi\| \leq 1$, la fonction $x \mapsto |\langle\xi,x\rangle|$ est majorée par la fonction $x \to \|x\|$, donc $\xi(\lambda)$ a une image dans $\mathcal{P}(\overline{\mathbf{R}}_+)$ qui est majorée (pour la relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\overline{\mathbf{R}}_+)$) par $\theta(\lambda)$, si $\theta = \|\ \|_E$.

Un des cas les plus importants dans la suite sera : E Banach. $\theta = \|\ \|_p$, $0 < p < +\infty$. Alors λ est de Radon d'ordre p si et seulement si

$\|\lambda\|_p = (\int_E \|x\|^p \, d\lambda(x))^{1/p} < +\infty$; λ est cylindrique de type p, si et seulement s'il existe $M \geq 0$ fini tel que, pour $\xi \in E'$, $(\int_{\mathbb{R}} |t|^p \, d(\xi(\lambda))(t))^{1/p} \leq M\|\xi\|$, et le plus petit de ces M est $\|\lambda\|_p^*$. Et $\|\lambda\|_p^* = \|\lambda\|_p$ si λ est de Radon.

§ 2. APPLICATIONS $(A,\alpha' ; B,\beta)$-RADONIFIANTES.

Définition : soient A, B, deux poids, α' une fonction ≥ 0 sur E', β une fonction ≥ 0 s.c.i. sur G, u une application linéaire faiblement continue de E dans G. On dira que u est $(A,\alpha' ; B,\beta)$-radonifiante, si, pour toute probabilité cylindrique λ sur E, de type (A,α'), $u(\lambda)$ est de Radon sur G, d'ordre (β,β).

Si E et G sont des Banach, A et B des poids homogènes, on dira que u est (A ; B)-radonifiante, si, pour toute λ cylindrique sur E, de type A, $u(\lambda)$ est de Radon sur G, d'ordre B. Si $0 < p \leq +\infty$, on dira que u est p-radonifiante, si elle est $(\| \|_p ; \| \|_p)$-radonifiante.

§ 3. APPLICATIONS APPROXIMATIVEMENT RADONIFIANTES.

Définition : On dit qu'une probabilité cylindrique λ sur E est de type (Φ,θ')-approximable (resp. très approximable), si elle est cylindriquement adhérente à l'ensemble des probabilités de Radon, portées par des compacts de sous-espaces vectoriels de dimension finie (resp. par des ensembles finis), de type (Φ,θ').

Si E est un Banach, et Φ un poids homogène, λ est dite de type Φ approximable (resp. très approximable), s'il existe $M \geq 0$ fini tel qu'elle soit de type $(\Phi, M\| \|_{E'})$-approximable (resp. très approximable). Le plus petit de ces M se notera $\Phi^{*a}(\lambda)$ (resp. $\Phi^{*ta}(\lambda)$). Bien évidemment $\Phi^*(\lambda) \leq \Phi^{*a}(\lambda) \leq \Phi^{*ta}(\lambda)$.

Pour le cas approximable, on peut se borner à considérer les probabilités de Radon portées par des sous-espaces vectoriels de dimension finie, de type (Φ,θ'), sans imposer la compacité du support. En effet, si λ est de Radon, elle est limite étroite donc cylindrique, de ses "tronquées" $\chi_K\lambda + \lambda(\complement K)\delta$, (probabilités obtenues en déplaçant toute la masse portée par $\complement K$ sur l'origine), K compact ; ces tronquées sont à support compact, et, pour tout $\xi \in E'$, $|\xi|(\chi_K\lambda + \lambda(\complement K)\delta) \leq |\xi|(\lambda)$ (pour la relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}_+)$), donc $\Phi(|\xi|(\chi_K\lambda + \lambda(\complement K)\delta)) \leq \Phi(\xi(\lambda)) \leq \theta'(\xi)$.

Définition : on dira que $u : E \to G$ est approximativement (resp. très approximativement) $(A,\alpha' ; B,\beta)$-radonifiante, si, pour toute λ cylindrique sur E, de type (A,α')-approximable (resp. très approximable), $u(\lambda)$ est de Radon sur G, d'ordre (B,β).

Proposition (V ; 3.1)

Soient E, G, des espaces vectoriels localement convexes, séparés, u linéaire faiblement continue de E dans G. Soient A, B, des poids, α' une fonction ≥ 0 sur E', β une fonction s.c.i. ≥ 0 sur G. On suppose B et β compacts. Pour que u soit approximativement (resp. très approximativement) $(A,\alpha' ; B,\beta)$-radonifiante, il faut et il suffit que, pour toute λ de Radon sur E, portée par un compact de dimension finie (resp. par un ensemble fini), de type (A,α'), $u(\lambda)$ (qui est forcément de Radon avec la même propriété) soit d'ordre (B,β).

Démonstration : c'est évidemment nécessaire, montrons que c'est suffisant. Si λ est de type (A,α')-approximable, elle est limite cylindrique de λ_j de Radon, portées par des compacts de dimension finie, de type (A,α') ; les $u(\lambda_j)$ convergent alors cylindriquement vers $u(\lambda)$; d'après le corollaire 1 de la proposition (IV ; 6,1), $u(\lambda)$ est, comme les $u(\lambda_j)$, de Radon d'ordre (B,β), c q f d

Corollaire : Soient E, G, des Banach, A, B deux poids, B compact. Soit $u : E \to G$, linéaire continue. Pour que u soit approximativement (resp. très approximativement) $(A ; B)$-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, il suffit qu'il existe $M \geq 0$ fini tel que, pour toute λ de Radon sur E, portée par un compact de dimension finie (resp. par un ensemble fini), on ait $B(u(\lambda)) \leq MA^*(\lambda)$. Dans ce cas, pour toute λ cylindrique, on a $B(u(\lambda)) \leq MA^{*a}(\lambda)$ (resp. $B(u(\lambda)) \leq MA^{*ta}(\lambda)$).

Il suffit en effet d'appliquer la proposition, avec $\alpha' = \| \|_{E'}$, $\beta = \frac{1}{M}\| \|_{G''}$, qui est compacte sur $\sigma(G'', G')$.

§ 4. ELIMINATION DE L'HYPOTHESE "APPROXIMABLE" : LA PROPRIETE D'APPROXIMATION DANS LES BANACH.

Une conjecture de Banach est la suivante : dans tout Banach F, l'identité est limite simple d'applications linéaires de rang fini, de norme ≤ 1 (propriété d'approximation métrique). Grothendieck a étudié des conjectures équivalentes, mais le problème reste ouvert (voit thèse de Grothendieck, Chap.I, § 5). Les espaces usuels ont cette propriété d'approximation. Toutefois, si on considère le Banach des fonctions réelles de classe C^m sur $\mathbf{R}$, bornées ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m$, on ignore encore, pour m fini ≥ 1, s'il vérifie la propriété d'approximation métrique ou non. Si E' vérifie la propriété d'approximation métrique, E la vérifie aussi. Nous aurons besoin d'une proproété un peu plus forte :

Définition : Soit E un Banach. On dira que le couple (E,E') vérifie la propriété d'approximation métrique si l'application identique de E' est limite simple d'applications linéaires de rang fini, de norme ≤ 1, continues sur $\sigma(E',E)$ (donc de $\sigma(E',E)$ dans $\sigma(E',E)$ ou dans E' indifféremment, puisque l'image est de dimension finie).

Dans ce cas, E' vérifie a fortiori la propriété d'approximation métrique de Banach, donc aussi E ; et réciproquement, si E est réflexif, car alors toute application linéaire de rang fini sur E', continue sur E', est continue sur $\sigma(E',E)$.

Proposition (V;4,1)
Supposons que le couple (E,E') vérifie la propriété d'approximation métrique, et que Φ soit un poids plus fort que L^0 (exposé IV, § 2). Alors toute probabilité cylindrique λ sur E, de type Φ, est de type Φ-approximable, et $\Phi^{*a}(\lambda) = \Phi^*(\lambda)$.

Démonstration
Soient $\pi_j : E' \to E'$ des applications linéaires de rang fini, de norme ≤ 1, continues sur $\sigma(E',E)$, convergeant simplement vers l'identité. Posons

$\lambda_j = {}^t\pi_j(\lambda)$; ${}^t\pi_j$ est continue de E dans E puisque π_j est continue sur $\sigma(E',E)$, donc λ_j est une probabilité de Radon portée par un sous-espace vectoriel de dimension finie. Pour $\xi \in E'$, $\Phi(\xi({}^t\pi_j(\lambda)) = \Phi(\pi_j(\xi)(\lambda))$ $\leq \|\pi_j(\xi)\|\Phi^*(\lambda) \leq \|\xi\|\Phi^*(\lambda)$. Si nous montrons que λ_j converge cylindriquement vers λ, nous aurons bien montré que λ est de type Φ approximable, et que $\Phi^{*a}(\lambda) = \Phi^*(\lambda)$. Cela résultera de 2 lemmes :

<u>Lemme 1</u> : <u>pour que des probabilités cylindriques λ_j sur E convergent cylindriquement vers λ, (il faut et) il suffit que, pour tout $\xi \in E'$, $\xi(\lambda_j)$ converge étroitement vers $\xi(\lambda)$</u>.

<u>Démonstration</u> : soit v une application linéaire continue de E dans $\mathbb{R}^n$, définie par des éléments $\xi_1\ \xi_2,\ldots,\xi_n$ de E'. On peut toujours supposer qu'il s'agit d'un ultrafiltre ; comme alors $\mathcal{P}(\check{\mathbb{R}}^n)$ est compact, les $v(\lambda_j)$ convergent vers $\nu \in \mathcal{P}(\check{\mathbb{R}}^n)$. Mais les projections de ν sur les n facteurs $\check{\mathbb{R}}$ de $\check{\mathbb{R}}^n$ sont les $\xi_k(\lambda)$, $k = 1,2,\ldots,n$ donc portées par $\mathbb{R}$, donc ν est une probabilité sur $\mathbb{R}^n$ lui-même. Ensuite, pour toute forme linéaire η sur $\mathbb{R}^n$, $\eta \circ v$ est une forme linéaire continue sur E' donc $(\eta \circ v)(\lambda_j)$ converge vers $(\eta \circ v)(\lambda)$, et par suite $(\eta \circ v)(\lambda) = \eta(\nu)$. Donc $v(\lambda)$ et ν ont même image par toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, donc même image de Fourier, donc elles coïncident ; cela prouve que $v(\lambda_j)$ converge vers $v(\lambda)$, et λ_j converge cylindriquement vers λ.

Revenons à la démonstration de la prop. (V;1,1). Pour montrer que λ_j converge cylindriquement vers λ, il nous suffit, par le lemme 1, de montrer que, pour tout $\xi \in E'$, $\pi_j(\xi)(\lambda)$ converge étroitement vers $\xi(\lambda)$; or nous savons que $\pi_j(\xi)$ converge vers ξ dans E'. Cela résultera de :

<u>Lemme 2</u> : <u>soit Φ un poids homogène plus fort que L^0. Soit λ une probabilité cylindrique de type Φ sur un Banach E. La fonction $\xi \mapsto \xi(\lambda)$ est continue de E' dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$</u>.

<u>Démonstration</u> : il est évident qu'elle est continue à l'origine de E'. En effet, si ξ converge vers 0, $\Phi(\xi(\lambda)) \leq \Phi^*(\lambda)\|\xi\|$ tend vers 0, et, comme Φ est plus fort que L^0, $\xi(\lambda)$ tend vers δ. Mais nous devons démontrer la

continuité partout, $\xi \mapsto \xi(\lambda)$ n'est pas une application linéaire, et $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel !

Il est néanmoins vrai en général que, si $\xi(\lambda)$ tend vers δ lorsque ξ tend vers 0, alors $\xi \mapsto \xi(\lambda)$ est partout continue. Soit en effet $\xi_0' \in E'$, et supposons que ξ tende vers ξ_0. Alors $t\xi$ tend vers $t\xi_0$ uniformément pour $|t|$ borné. Mais, si $\hat{\lambda}$ est l'image de Fourier de λ, $t \to \hat{\lambda}(t\xi)$ est l'image de Fourier de $\xi(\lambda)$; il est équivalent, d'après le théorème de Paul Lévy sur la convergence étroite sur $\mathbb{R}$, de dire que $\xi(\lambda)$ tend étroitement vers $\xi(\lambda)$, ou de dire que son image de Fourier converge uniformément sur tout borné de $\mathbb{R}$, donc que $\hat{\lambda}(t\xi)$ tend vers $\hat{\lambda}(t\xi_0)$ uniformément pour t borné ; et cela résultera de l'uniforme continuité de λ. Mais, dire que $\xi(\lambda)$ tend vers δ quand ξ tend vers 0, c'est, par le même raisonnement, dire que $\hat{\lambda}$ est continue à l'origine.

Mais $\Lambda = \hat{\lambda}$ est de type positif, continue sur tout sous-espace de dimension finie. Elle est donc continue sur le sous-espace engendré par ξ et ξ', et alors une formule connue

$$|\Lambda(\xi') - \Lambda(\xi)|^2 \leq 2\,\Lambda(0)\,(\Lambda(0) - \mathcal{R}e\,\Lambda(\xi' - \xi))$$

montre que, si elle est continue à l'origine sur E', elle est uniformément continue.

(Voir par exemple GODEMENT, les fonctions de type positif et la théorie des groupes, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 63, n° 1, p.23. Cette remarque avait été oubliée dans la démonstration de l'exposé n° 2, pour la démonstration du théorème p.6).

Il reste à montrer que les espaces usuels vérifient notre propriété d'approximation métrique, plus forte que celle de Banach-Grothendieck. C'est vrai pour les espaces L^p, $1 < p < +\infty$, puisqu'ils vérifient la propriété d'approximation de Banach et sont réflexifs. C'est encore vrai pour les espaces L^1, L^∞, $C(X)$, $M(X) = C'(X)$ pour X compact. Montrons-le pour l'un d'entre eux :

Proposition (V;1,2)

Le couple $(C(X), C'(X))$ a la propriété d'approximation métrique (X espace compact).

Démonstration

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, des mesures, éléments de $M = C'(X)$. Nous devons montrer que, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe une application linéaire continue de rang fini u de $\sigma(M,C)$ dans M, vérifiant $\|u\| \leq 1$, $\|u\,\mu_i - \mu_i\|_M \leq \varepsilon$ pour $i = 1,2,\ldots,n$. Soit λ une mesure ≥ 0 dominant les μ_i, de sorte que $\mu_i = f_i\,\lambda$, $f_i \in L^1(X;\lambda)$; nous supposerons $\lambda(1) = 1$. Pour chaque i, il existe $g_i \in C(X)$, telle que $\|g_i - f_i\|_{L^1(\lambda)} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, ou $\|g_i\,\lambda - f_i\,\lambda\|_M \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Comme alors $\|u\| \leq 1$, les inégalités $\|u\,\mu_i - \mu_i\| \leq \varepsilon$ seront vérifiées si l'on a les inégalités $\|u(g_i\,\lambda) - g_i\,\lambda\|_M \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $(\Omega_j)_{j\in J}$ une famille finie d'ouverts de X, telle que, dans chacun d'eux, l'oscillation de chaque g_i soit $\leq \frac{\varepsilon}{6}$. Autrement dit, dans Ω_j, $g_i = C_{ij} + h_{ij}$, C_{ij} constante, $\operatorname{Sup}|h_{ij}| \leq \frac{\varepsilon}{6}$. Soit $(\alpha_j)_{j\in J}$ une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement $(\Omega_j)_{j\in J}$.

Définissons alors u comme suit : pour $\mu \in M$, $u(\mu) = \sum\limits_{j\in J} \mu(\alpha_j)\,\dfrac{\alpha_j\lambda}{\lambda(\alpha_j)}$,

ou $u = \sum\limits_{j\in J} \alpha_j \otimes \dfrac{\alpha_j\lambda}{\lambda(\alpha_j)}$ (en remplaçant le terme par 0 si $\lambda(\alpha_j) = 0$).

Alors u est linéaire, de rang fini car $u(M)$ est dans le sous-espace engendré par les $\alpha_j\lambda$; comme les α_j sont dans C, elle est continue sur $\sigma(M,C)$. On a

$$\|u(\mu)\| \leq \sum_{j\in J} (|\mu|\,(\alpha_j))\,\frac{\|\alpha_j\lambda\|}{\lambda(\alpha_j)} \leq \sum_{j\in J} (|\mu|\,(\alpha_j))$$

$$= |\mu|(1) = \|\mu\|, \quad \text{donc } \|u\| \leq 1.$$

Pour tout $i = 1,2,\dots,n$:

$$u(g_i\,\lambda) = \sum_{j\in J} \lambda(C_{ij}\,\alpha_j)\,\frac{\alpha_j\lambda}{\lambda(\alpha_j)} + \varepsilon_i \quad ,$$

$$\|\varepsilon_i\|_M \leq \Big\| \sum_{j\in J} \lambda(h_{ij}\,\alpha_j)\,\frac{\alpha_j\lambda}{\lambda(\alpha_j)} \Big\|_M$$

$$\leq \sum_{j\in J} (\lambda(\alpha_j))\,\frac{\varepsilon}{6}\,\frac{\|\alpha_j\lambda\|}{\lambda(\alpha_j)} = \frac{\varepsilon}{6} \sum_{j\in J} (\lambda(\alpha_j))$$

$$= \frac{\varepsilon}{6}\,(\lambda(1)) = \frac{\varepsilon}{6} \quad , \quad \text{et}$$

$$g_i\,\lambda = \sum_{j\in J} C_{ij}\,\alpha_j\,\lambda + \varepsilon'_i$$

$$= \sum_{j\in J} \lambda(C_{ij}\,\alpha_j)\,\frac{\alpha_j\lambda}{\lambda(\alpha_j)} + \varepsilon'_i \quad ,$$

$$\|\varepsilon'_i\|_M \leq \sum_{j\in J} \|h_{ij}\,\alpha_j\,\lambda\| \leq \frac{\varepsilon}{6} \sum_{j\in J} \|\alpha_j\,\lambda\| = \frac{\varepsilon}{6} \; .$$

Donc $\|u(g_i\,\lambda) - g_i\,\lambda\|_M \leq \frac{\varepsilon}{3}$, cqfd.

§ 5. ELIMINATION DE L'HYPOTHESE "TRES APPROXIMABLE"

Proposition (V ; 5,1)

Soit μ une probabilité sur $(\overline{\mathbb{R}}_+)$; appelons (c'est barbare mais sans danger) $\mu + a$ son image par la translation a, $a \geq 0$. Soit Φ un poids homogène ayant la propriété suivante : il existe une fonction $(\varepsilon, b) \to k(\varepsilon, b) \geq 0$, telle que $k(\varepsilon, b)$ tende vers 0 avec ε, pour tout b fini fixé, et que l'on ait l'inégalité

$$\text{(V ; 5,1)} \qquad \Phi(\mu + \varepsilon) \leq \Phi(\mu) + k(\varepsilon, b)$$

si μ a son support dans $[0, b]$.

Alors toute probabilité cylindrique λ sur un Banach E, de type Φ approximable est de type Φ très approximable, et $\Phi^{*ta}(\lambda) = \Phi^{*a}(\lambda)$.

Démonstration : il nous suffit de montrer que, si λ est une probabilité de Radon sur E, de type Φ, avec $\Phi^*(\lambda) = 1$, portée par un compact K de dimension finie, elle est limite étroite de probabilités de Radon λ_j, combinaisons finies de masses ponctuelles, avec $\Phi^*(\lambda_j) \leq 1$.

On peut partager K en une réunion finie de parties boréliennes, de diamètre $\leq \varepsilon$. Appelons h_ε une application de K dans lui-même, égale, dans chacune de ces parties, à un élément de cette partie.
Alors h_ε est borélienne, et $\|h_\varepsilon - I\| \leq \varepsilon$; soit $\lambda_\varepsilon = h_\varepsilon(\lambda)$; elle est combinaison finie de masses ponctuelles.
Soit $\xi \in E'$, $\|\xi\| \leq 1$. Sur K, $\|\xi \circ h_\varepsilon - \xi\| \leq \varepsilon$. Au sens de la relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, et avec la notation sur les translatées donnée dans l'énoncé, on a :

$$|\xi|(\lambda_\varepsilon) = |\xi|(h_\varepsilon(\lambda)) \leq |\xi(\lambda)| + \varepsilon$$

donc
$$\Phi(\xi(\lambda_\varepsilon)) \leq \Phi(\xi(\lambda)) + k(\varepsilon, b),$$

où b = maximum de la norme sur K, ou

$$\Phi(\xi(\lambda_\varepsilon)) \leq \Phi^*(\lambda) + k(\varepsilon, b) = 1 + k(\varepsilon, b).$$

Les probabilités λ_ε convergent étroitement vers λ quand ε tend vers 0, et il en est de même de leurs images $\frac{[illegible]}{1+k(\varepsilon,b)}$ par l'homothétie $\frac{1}{1+k(\varepsilon,b)}$, puisque $k(\varepsilon,b)$ tend vers 0 ; et on a

$$\Phi(\xi(\frac{\lambda_\varepsilon}{1+k(\varepsilon,b)})) \leq 1, \qquad \text{c q f d.}$$

<u>Exemple</u> : les poids homogènes usuels vérifient la propriété de l'énoncé. C'est le cas des poids $\| \ \|_p$, $0 < p \leq +\infty$; si $p \geq 1$, on a

$$\|\mu+\varepsilon\|_p = \|t+\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}\,;\,\mu)} \leq \|t\|_{L^p(\mathbb{R}\,;\,\mu)} + \varepsilon = \|\mu\|_p + \varepsilon \ ;$$

si $0 < p < 1$, on a, si μ a son support dans $[0,b]$ donc $\|\mu\|_p \leq b$:

$$\|\mu+\varepsilon\|_p = (\int_o^{+\infty} (t+\varepsilon)^p \, d\mu(t))^{1/p} \leq (\int t^p \, d\mu(t) + \varepsilon^p \int d\mu(t))^{1/p}$$

$$\leq (\|\mu\|_p^p + \varepsilon^p)^{1/p} \leq \|\mu\|_p + \frac{\varepsilon^p}{p}\,(b^p+\varepsilon^p)^{1/p - 1}$$

(accroissement finis).

Les poids J_α vérifient aussi cette propriété : $J_\alpha(\mu+\varepsilon) = J_\alpha(\mu) + \varepsilon$.

Si alors Φ est un poids homogène compact de la forme $\Phi = \sup\limits_{0<\alpha<1} \varphi(\alpha)\, J_\alpha$, φ fonction > 0 sur $]0,1[$, et borné par $M > 0$ fini, il vérifie la propriété, avec

$$\Phi(\mu+\varepsilon) = \sup_{0<\alpha<1} \varphi(\alpha)(J_\alpha(\mu)+\varepsilon) \leq \Phi(\mu) + \varepsilon M$$

<u>§ 6. UN CRITERE POUR LES APPLICATIONS RADONIFIANTES</u>

En utilisant alors les propositions (V ; 3,1) et corollaire, (V ; 4,1), (V ; 5,1), on aura le théorème suivant :

<u>Proposition (V ; 6,1)</u>

<u>Soient E, G, des Banach, u linéaire continue de E dans G ; on suppose que le couple (E,E') a la propriété d'approximation métrique. Soit A un poids homogène plus fort que [illegible], vérifiant l'inégalité (V ; 5,1),</u>

<u>et soit B un poids homogène compact (par exemple $A = B = \| \|_p$, $0 < p \leq +\infty$).
Pour que u soit (A ; B)-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, il suffit qu'il existe une constante $M \geq 0$ finie telle que, pour toute probabilité de Radon λ sur E portée par un ensemble fini, on ait $B(u(\lambda)) \leq M\, A^*(\lambda)$.
On a alors la même inégalité pour toute probabilité cylindrique λ de type A.</u>

Pour $A = B = \| \|_p$, on verra ultérieurement que la condition donnée sur u signifie exactement qu'elle est p-sommante, et la plus petite constante M est la norme p-sommante $\pi_p(u)$.