

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. SCHWARTZ

Ordre et type ; problèmes d'approximation ; applications radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 5, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970__A5_0

© Séminaire Laurent Schwartz
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E L . S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

ORDRE ET TYPE ; PROBLEMES D'APPROXIMATION ;
APPLICATIONS RADONIFIANTES

§ 1. ORDRE ET TYPE

Rappelons que si ϕ est un poids et ϑ une fonction s.c.i. ≥ 0 (finie ou non) sur un espace vectoriel topologique E, une probabilité de Radon λ sur E est dite d'ordre (ϕ, ϑ) , si $\phi(\vartheta(\lambda))$ (écrit aussi $\phi(\lambda, \vartheta)$) ≤ 1 . Si E est un Banach, et si ϕ est un poids homogène, il est sous-entendu que ϑ est la norme ou proportionnelle à la norme, suivant les cas ; on écrit $\phi(\lambda)$ au lieu de $\phi(\lambda, \|\cdot\|_E)$, mais λ est dite d'ordre ϕ si $\phi(\lambda) < +\infty$, c'est-à-dire s'il existe $M \geq 0$ fini, tel que λ soit d'ordre $(\phi, \frac{1}{M} \|\cdot\|_E)$ ($M = \phi(\lambda)$ par exemple).

Soit maintenant ϑ' une fonction ≥ 0 arbitraire (finie ou non) sur E' . Une probabilité cylindrique λ sur E est dite de type (ϕ, ϑ') , si, pour tout $\xi \in E'$, $\phi(\xi(\lambda)) \leq \vartheta'(\xi)$ [ϕ étant un poids, donc une fonction sur $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, se prolonge en une fonction sur $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$, par l'application que $t \mapsto |t|$, $\overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, définit de $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$ dans $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}_+)$; $\xi(\lambda) \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$, donc $\phi(\xi(\lambda))$ a un sens. Il sera commode, bien qu'abusif, si μ est une probabilité sur $\overline{\mathbb{R}}$, de noter $|\mu|$ son image dans $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ par $t \mapsto |t|$; et donc d'écrire que $\phi(\xi(\lambda)) = \varphi(|\xi(\lambda)|)$, qu'on écrira aussi $\phi(|\xi|(\lambda))$].

Si ϕ est homogène et E Banach, on dit que λ est de type ϕ s'il existe un $M \geq 0$ fini tel que λ soit de type $(\phi, M \|\cdot\|_E)$, autrement dit tel que $\phi(\xi(\lambda)) \leq M \|\xi\|$; le plus petit nombre M ayant cette propriété, soit $\sup_{\|\xi\| \leq 1} \frac{\phi(\xi(\lambda))}{\|\xi\|}$, s'écrit $\phi^*(\lambda)$; donc λ est de type ϕ si et seulement si $\phi^*(\lambda) < +\infty$.

Si λ est de Radon, bien évidemment $\phi^*(\lambda) \leq \phi(\lambda)$, parce que pour $\|\xi\| \leq 1$, la fonction $x \mapsto |\langle \xi, x \rangle|$ est majorée par la fonction $x \mapsto \|x\|$, donc $\xi(\lambda)$ a une image dans $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ qui est majorée (pour la relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}_+)$) par $\vartheta(\lambda)$, si $\vartheta = \|\cdot\|_E$.

Un des cas les plus importants dans la suite sera : E Banach. $\vartheta = \|\cdot\|_p$, $0 < p < +\infty$. Alors λ est de Radon d'ordre p si et seulement si

$\|\lambda\|_p = \left(\int_E \|x\|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} < +\infty$; λ est cylindrique de type p , si et seulement s'il existe $M \geq 0$ fini tel que, pour $\xi \in E'$, $\left(\int_{\mathbb{R}} |t|^p d(\xi(\lambda))(t) \right)^{1/p} \leq M \|\xi\|$, et le plus petit de ces M est $\|\lambda\|_p^*$. Et $\|\lambda\|_p^* = \|\lambda\|_p$ si λ est de Radon.

§ 2. APPLICATIONS $(A, \alpha'; B, \beta)$ -RADONIFIANTES.

Définition : soient A, B , deux poids, α' une fonction ≥ 0 sur E' , β une fonction ≥ 0 s.c.i. sur G , u une application linéaire faiblement continue de E dans G . On dira que u est $(A, \alpha'; B, \beta)$ -radonifiante, si, pour toute probabilité cylindrique λ sur E , de type (A, α') , $u(\lambda)$ est de Radon sur G , d'ordre (β, β) .

Si E et G sont des Banach, A et B des poids homogènes, on dira que u est $(A; B)$ -radonifiante, si, pour toute λ cylindrique sur E , de type A , $u(\lambda)$ est de Radon sur G , d'ordre B . Si $0 < p \leq +\infty$, on dira que u est p -radonifiante, si elle est $(\|\cdot\|_p; \|\cdot\|_p)$ -radonifiante.

§ 3. APPLICATIONS APPROXIMATIVEMENT RADONIFIANTES.

Définition : On dit qu'une probabilité cylindrique λ sur E est de type (ϕ, θ') -approximable (resp. très approximable), si elle est cylindriquement adhérente à l'ensemble des probabilités de Radon, portées par des compacts de sous-espaces vectoriels de dimension finie (resp. par des ensembles finis), de type (ϕ, θ') .

Si E est un Banach, et ϕ un poids homogène, λ est dite de type ϕ approximable (resp. très approximable), s'il existe $M \geq 0$ fini tel qu'elle soit de type $(\phi, M\|\cdot\|_E)$ -approximable (resp. très approximable). Le plus petit de ces M se notera $\phi^{*a}(\lambda)$ (resp. $\phi^{*ta}(\lambda)$). Bien évidemment $\phi^*(\lambda) \leq \phi^{*a}(\lambda) \leq \phi^{*ta}(\lambda)$.

Pour le cas approximable, on peut se borner à considérer les probabilités de Radon portées par des sous-espaces vectoriels de dimension finie, de type (ϕ, θ') , sans imposer la compacité du support. En effet,

si λ est de Radon, elle est limite étro te donc cylindrique, de ses "tronquées" $\chi_K \lambda + \lambda(\int_K) \delta$, (probabilités obtenues en déplaçant toute la masse portée par \int_K sur l'origine), K compact ; ces tronquées sont à support compact, et, pour tout $\xi \in E'$, $|\xi|(\chi_K \lambda + \lambda(\int_K) \delta) \leq |\xi|(\lambda)$ (pour la relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}_+)$), donc $\Phi(|\xi|(\chi_K \lambda + \lambda(\int_K) \delta)) \leq \Phi(|\xi|(\lambda)) \leq \theta'(\xi)$.

Définition : on dira que $u : E \rightarrow G$ est approximativement (resp. très approximativement) $(A, \alpha' ; B, \beta)$ -radonifiante, si, pour toute λ cylindrique sur E , de type (A, α') -approximable (resp. très approximable), $u(\lambda)$ est de Radon sur G , d'ordre (B, β) .

Proposition (V ; 3.1)

Soient E, G , des espaces vectoriels localement convexes, séparés, u linéaire faiblement continue de E dans G . Soient A, B , des poids, α' une fonction ≥ 0 sur E' , β une fonction s.c.i. ≥ 0 sur G . On suppose B et β compacts. Pour que u soit approximativement (resp. très approximativement) $(A, \alpha' ; B, \beta)$ -radonifiante, il faut et il suffit que, pour toute λ de Radon sur E , portée par un compact de dimension finie (resp. par un ensemble fini), de type (A, α') , $u(\lambda)$ (qui est forcément de Radon avec la même propriété) soit d'ordre (B, β) .

Démonstration : c'est évidemment nécessaire, montrons que c'est suffisant. Si λ est de type (A, α') -approximable, elle est limite cylindrique de λ_j de Radon, portées par des compacts de dimension finie, de type (A, α') ; les $u(\lambda_j)$ convergent alors cylindriquement vers $u(\lambda)$; d'après le corollaire 1 de la proposition (IV ; 6,1), $u(\lambda)$ est, comme les $u(\lambda_j)$, de Radon d'ordre (B, β) , c q f d

Corollaire : Soient E, G , des Banach, A, B deux poids, B compact. Soit $u : E \rightarrow G$, linéaire continue. Pour que u soit approximativement (resp. très approximativement) $(A ; B)$ -radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, il suffit qu'il existe $M \geq 0$ fini tel que, pour toute λ de Radon sur E , portée par un compact de dimension finie (resp. par un ensemble fini), on ait $B(u(\lambda)) \leq M A^*(\lambda)$. Dans ce cas, pour toute λ cylindrique, on a $B(u(\lambda)) \leq M A^{*a}(\lambda)$ (resp. $B(u(\lambda)) \leq M A^{*ta}(\lambda)$).

Il suffit en effet d'appliquer la proposition, avec $\alpha' = \|\cdot\|_{E'}$, $\beta = \frac{1}{M} \|\cdot\|_{G''}$, qui est compacte sur $\sigma(G'', G')$.

§ 4. ELIMINATION DE L'HYPOTHESE "APPROXIMABLE" : LA PROPRIETE
D'APPROXIMATION DANS LES BANACH.

Une conjecture de Banach est la suivante : dans tout Banach F , l'identité est limite simple d'applications linéaires de rang fini, de norme ≤ 1 (propriété d'approximation métrique). Grothendieck a étudié des conjectures équivalentes, mais le problème reste ouvert (voit thèse de Grothendieck, Chap.I, § 5). Les espaces usuels ont cette propriété d'approximation. Toutefois, si on considère le Banach des fonctions réelles de classe C^m sur \mathbb{R} , bornées ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m$, on ignore encore, pour m fini ≥ 1 , s'il vérifie la propriété d'approximation métrique ou non. Si E' vérifie la propriété d'approximation métrique, E la vérifie aussi. Nous aurons besoin d'une propriété un peu plus forte :

Définition : Soit E un Banach. On dira que le couple (E, E') vérifie la propriété d'approximation métrique si l'application identique de E' est limite simple d'applications linéaires de rang fini, de norme ≤ 1 , continues sur $\sigma(E', E)$ (donc de $\sigma(E', E)$ dans $\sigma(E', E)$ ou dans E' indifféremment, puisque l'image est de dimension finie).

Dans ce cas, E' vérifie a fortiori la propriété d'approximation métrique de Banach, donc aussi E ; et réciproquement, si E est réflexif, car alors toute application linéaire de rang fini sur E' , continue sur E' , est continue sur $\sigma(E', E)$.

Proposition (V;4,1)

Supposons que le couple (E, E') vérifie la propriété d'approximation métrique, et que Φ soit un poids plus fort que L^0 (exposé IV, § 2). Alors toute probabilité cylindrique λ sur E , de type Φ , est de type Φ -approximable, et $\Phi^{*a}(\lambda) = \Phi^*(\lambda)$.

Démonstration

Soient $\pi_j : E' \rightarrow E'$ des applications linéaires de rang fini, de norme ≤ 1 , continues sur $\sigma(E', E)$, convergeant simplement vers l'identité. Posons

$\lambda_j = {}^t \pi_j(\lambda)$; ${}^t \pi_j$ est continue de E dans E puisque π_j est continue sur $\sigma(E', E)$, donc λ_j est une probabilité de Radon portée par un sous-espace vectoriel de dimension finie. Pour $\xi \in E'$, $\Phi(\xi({}^t \pi_j(\lambda))) = \Phi(\pi_j(\xi)(\lambda)) \leq \|\pi_j(\xi)\| \Phi^*(\lambda) \leq \|\xi\| \Phi^*(\lambda)$. Si nous montrons que λ_j converge cylindriquement vers λ , nous aurons bien montré que λ est de type Φ approximable, et que $\Phi^{*a}(\lambda) = \Phi^*(\lambda)$. Cela résultera de 2 lemmes :

Lemme 1 : pour que des probabilités cylindriques λ_j sur E convergent cylindriquement vers λ , (il faut et) il suffit que, pour tout $\xi \in E'$, $\xi(\lambda_j)$ converge étroitement vers $\xi(\lambda)$.

Démonstration : soit v une application linéaire continue de E dans \mathbb{R}^n , définie par des éléments $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ de E' . On peut toujours supposer qu'il s'agit d'un ultrafiltre ; comme alors $\mathcal{P}(\overset{\vee}{\mathbb{R}^n})$ est compact, les $v(\lambda_j)$ convergent vers $v \in \mathcal{P}(\overset{\vee}{\mathbb{R}^n})$. Mais les projections de v sur les n facteurs $\overset{\vee}{\mathbb{R}}$ de $\overset{\vee}{\mathbb{R}^n}$ sont les $\xi_k(\lambda)$, $k=1, 2, \dots, n$ donc portées par \mathcal{P} , donc v est une probabilité sur \mathbb{R}^n lui-même. Ensuite, pour toute forme linéaire η sur \mathbb{R}^n , $\eta \circ v$ est une forme linéaire continue sur E donc $(\eta \circ v)(\lambda_j)$ converge vers $(\eta \circ v)(\lambda)$, et par suite $(\eta \circ v)(\lambda) = \eta(v)$. Donc $v(\lambda)$ et v ont même image par toute forme linéaire sur \mathbb{R}^n , donc même image de Fourier, donc elles coïncident ; cela prouve que $v(\lambda_j)$ converge vers $v(\lambda)$, et λ_j converge cylindriquement vers λ .

Revenons à la démonstration de la prop. (V;4,1). Pour montrer que λ_j converge cylindriquement vers λ , il nous suffit, par le lemme 1, de montrer que, pour tout $\xi \in E'$, $\pi_j(\xi)(\lambda)$ converge étroitement vers $\xi(\lambda)$; or nous savons que $\pi_j(\xi)$ converge vers ξ dans E' . Cela résultera de :

Lemme 2 : soit Φ un poids homogène plus fort que L^0 . Soit λ une probabilité cylindrique de type Φ sur un Banach E . La fonction $\xi \mapsto \xi(\lambda)$ est continue de E' dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Démonstration : il est évident qu'elle est continue à l'origine de E' . En effet, si ξ converge vers 0, $\Phi(\xi(\lambda)) \leq \Phi^*(\lambda) \|\xi\|$ tend vers 0, et, comme Φ est plus fort que L^0 , $\xi(\lambda)$ tend vers δ . Mais nous devons démontrer la

continuité partout, $\xi \mapsto \xi(\lambda)$ n'est pas une application linéaire, et $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel !

Il est néanmoins vrai en général que, si $\xi(\lambda)$ tend vers δ lorsque ξ tend vers 0, alors $\xi \mapsto \xi(\lambda)$ est partout continue. Soit en effet $\xi'_0 \in E'$, et supposons que ξ tende vers ξ_0 . Alors $t\xi$ tend vers $t\xi_0$ uniformément pour $|t|$ borné. Mais, si $\hat{\lambda}$ est l'image de Fourier de λ , $t \mapsto \hat{\lambda}(t\xi)$ est l'image de Fourier de $\xi(\lambda)$; il est équivalent, d'après le théorème de Paul Lévy sur la convergence étroite sur \mathbb{R} , de dire que $\xi(\lambda)$ tend étroitement vers $\xi_0(\lambda)$, ou de dire que son image de Fourier converge uniformément sur tout borné de \mathbb{R} , donc que $\hat{\lambda}(t\xi)$ tend vers $\hat{\lambda}(t\xi_0)$ uniformément pour t borné ; et cela résultera de l'uniforme continuité de λ . Mais, dire que $\xi(\lambda)$ tend vers δ quand ξ tend vers 0, c'est, par le même raisonnement, dire que $\hat{\lambda}$ est continue à l'origine.

Mais $\Lambda = \hat{\lambda}$ est de type positif, continue sur tout sous-espace de dimension finie. Elle est donc continue sur le sous-espace engendré par ξ et ξ' , et alors une formule connue

$$|\Lambda(\xi') - \Lambda(\xi)|^2 \leq 2\Lambda(0)(\Lambda(0) - \operatorname{Re} \Lambda(\xi' - \xi))$$

montre que, si elle est continue à l'origine sur E' , elle est uniformément continue.

(Voir par exemple GODEMENT, les fonctions de type positif et la théorie des groupes, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 63, n° 1, p.23. Cette remarque avait été oubliée dans la démonstration de l'exposé n° 2, pour la démonstration du théorème p.6).

Il reste à montrer que les espaces usuels vérifient notre propriété d'approximation métrique, plus forte que celle de Banach-Grothendieck. C'est vrai pour les espaces L^p , $1 < p < +\infty$, puisqu'ils vérifient la propriété d'approximation de Banach et sont réflexifs. C'est encore vrai pour les espaces L^1 , L^∞ , $C(X)$, $M(X) = C'(X)$ pour X compact. Montrons-le pour l'un d'entre eux :

Proposition (V;4,2)

Le couple $(C(X), C'(X))$ a la propriété d'approximation métrique (X espace compact).

Démonstration

Soient $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, des mesures, éléments de $M = C'(X)$. Nous devons montrer que, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe une application linéaire continue de rang fini u de $\sigma(M, C)$ dans M , vérifiant $\|u\| \leq 1$, $\|u\mu_i - \mu_i\|_M \leq \varepsilon$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Soit λ une mesure ≥ 0 dominant les μ_i , de sorte que $\mu_i = f_i \lambda$, $f_i \in L^1(X; \lambda)$; nous supposons $\lambda(1) = 1$. Pour chaque i , il existe $g_i \in C(X)$, telle que $\|g_i - f_i\|_{L^1(\lambda)} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, ou $\|g_i \lambda - f_i \lambda\|_M \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Comme alors $\|u\| \leq 1$, les inégalités $\|u\mu_i - \mu_i\| \leq \varepsilon$ seront vérifiées

si l'on a les inégalités $\|u(g_i \lambda) - g_i \lambda\|_M \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $(\Omega_j)_{j \in J}$ une

famille finie d'ouverts de X , telle que, dans chacun d'eux, l'oscillation de chaque g_i soit $\leq \frac{\varepsilon}{6}$. Autrement dit, dans Ω_j , $g_i = C_{ij} + h_{ij}$, C_{ij} constante, $\text{Sup } |h_{ij}| \leq \frac{\varepsilon}{6}$. Soit $(\alpha_j)_{j \in J}$ une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement $(\Omega_j)_{j \in J}$.

Définissons alors u comme suit : pour $\mu \in M$, $u(\mu) = \sum_{j \in J} \mu(\alpha_j) \frac{\alpha_j \lambda}{\lambda(\alpha_j)}$,

ou $u = \sum_{j \in J} \alpha_j \otimes \frac{\alpha_j \lambda}{\lambda(\alpha_j)}$ (en remplaçant le terme par 0 si $\lambda(\alpha_j) = 0$).

Alors u est linéaire, de rang fini car $u(M)$ est dans le sous-espace engendré par les $\alpha_j \lambda$; comme les α_j sont dans C , elle est continue sur $\sigma(M, C)$. On a

$$\|u(\mu)\| \leq \sum_{j \in J} (|\mu|(\alpha_j)) \frac{\|\alpha_j \lambda\|}{\lambda(\alpha_j)} \leq \sum_{j \in J} (|\mu|(\alpha_j))$$

$$= |\mu|(1) = \|\mu\|, \text{ donc } \|u\| \leq 1.$$

Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$:

$$u(g_i \lambda) = \sum_{j \in J} \lambda(c_{ij} \alpha_j) \frac{\alpha_j \lambda}{\lambda(\alpha_j)} + \varepsilon_i ,$$

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_i\|_M &\leq \left\| \sum_{j \in J} \lambda(h_{ij} \alpha_j) \frac{\alpha_j \lambda}{\lambda(\alpha_j)} \right\|_M \\ &\leq \sum_{j \in J} (\lambda(\alpha_j)) \frac{\varepsilon}{6} \frac{\|\alpha_j \lambda\|}{\lambda(\alpha_j)} = \frac{\varepsilon}{6} \sum_{j \in J} (\lambda(\alpha_j)) \\ &= \frac{\varepsilon}{6} (\lambda(1)) = \frac{\varepsilon}{6} , \quad \text{et} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_i \lambda &= \sum_{j \in J} c_{i,j} \alpha_j \lambda + \varepsilon'_i \\ &= \sum_{j \in J} \lambda(c_{ij} \alpha_j) \frac{\alpha_j \lambda}{\lambda(\alpha_j)} + \varepsilon'_i , \end{aligned}$$

$$\|\varepsilon'_i\|_M \leq \sum_{j \in J} \|h_{i,j} \alpha_j \lambda\| \leq \frac{\varepsilon}{6} \sum_{j \in J} \|\alpha_j \lambda\| = \frac{\varepsilon}{6} .$$

Donc $\|u(g_i \lambda) - g_i \lambda\|_M \leq \frac{\varepsilon}{3}$, cqfd.

§ 5. ELIMINATION DE L'HYPOTHESE "TRES APPROXIMABLE"

Proposition (V; 5,1)

Soit μ une probabilité sur $(\bar{\mathbb{R}}_+)$; appelons (c'est barbare mais sans danger) $\mu + a$ son image par la translation a , $a \geq 0$. Soit ϕ un poids homogène ayant la propriété suivante : il existe une fonction $(\varepsilon, b) \rightarrow k(\varepsilon, b) \geq 0$, telle que $k(\varepsilon, b)$ tende vers 0 avec ε , pour tout b fini fixé, et que l'on ait l'inégalité

$$(V; 5,1) \quad \phi(\mu + \varepsilon) \leq \phi(\mu) + k(\varepsilon, b)$$

si μ a son support dans $[0, b]$.

Alors toute probabilité cylindrique λ sur un Banach E , de type ϕ approximable est de type ϕ très approximable, et $\phi^{*ta}(\lambda) = \phi^{*a}(\lambda)$.

Démonstration : il nous suffit de montrer que, si λ est une probabilité de Radon sur E , de type ϕ , avec $\phi^*(\lambda) = 1$, portée par un compact K de dimension finie, elle est limite étroite de probabilités de Radon λ_j , combinaisons finies de masses ponctuelles, avec $\phi^*(\lambda_j) \leq 1$.

On peut partager K en une réunion finie de parties boréliennes, de diamètre $\leq \varepsilon$. Appelons h_ε une application de K dans lui-même, égale, dans chacune de ces parties, à un élément de cette partie.

Alors h_ε est borélienne, et $\|h_\varepsilon - I\| \leq \varepsilon$; soit $\lambda_\varepsilon = h_\varepsilon(\lambda)$; elle est combinaison finie de masses ponctuelles.

Soit $\xi \in E'$, $\|\xi\| \leq 1$. Sur K , $\|\xi \circ h_\varepsilon - \xi\| \leq \varepsilon$. Au sens de la relation d'ordre sur $\mathcal{P}(\bar{\mathbb{R}}_+)$, et avec la notation sur les translatées donnée dans l'énoncé, on a :

$$|\xi|(\lambda_\varepsilon) = |\xi|(h_\varepsilon(\lambda)) \leq |\xi(\lambda)| + \varepsilon$$

$$\text{donc} \quad \phi(\xi(\lambda_\varepsilon)) \leq \phi(\xi(\lambda)) + k(\varepsilon, b),$$

où $b = \text{maximum de la norme sur } K$, ou

$$\phi(\xi(\lambda_\varepsilon)) \leq \phi^*(\lambda) + k(\varepsilon, b) = 1 + k(\varepsilon, b).$$

Les probabilités λ_ε convergent étroitement vers λ quand ε tend vers 0, et il en est de même de leurs images $\frac{1}{1+k(\varepsilon, b)} \lambda_\varepsilon$ par homothétie $\frac{1}{1+k(\varepsilon, b)}$,

puisque $k(\varepsilon, b)$ tend vers 0 ; et on a

$$\Phi\left(\xi\left(\frac{\lambda \varepsilon}{1+k(\varepsilon, b)}\right)\right) \leq 1, \quad \text{c q f d.}$$

Exemple : les poids homogènes usuels vérifient la propriété de l'énoncé. C'est le cas des poids $\|\cdot\|_p$, $0 < p \leq +\infty$; si $p \geq 1$, on a

$$\|\mu + \varepsilon\|_p = \|t + \varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}; \mu)} \leq \|t\|_{L^p(\mathbb{R}; \mu)} + \varepsilon = \|\mu\|_p + \varepsilon ;$$

si $0 < p < 1$, on a, si μ a son support dans $[0, b]$ donc $\|\mu\|_p \leq b$:

$$\begin{aligned} \|\mu + \varepsilon\|_p &= \left(\int_0^{+\infty} (t + \varepsilon)^p d\mu(t)\right)^{1/p} \leq \left(\int t^p d\mu(t) + \varepsilon^p \int d\mu(t)\right)^{1/p} \\ &\leq (\|\mu\|_p^p + \varepsilon^p)^{1/p} \leq \|\mu\|_p + \frac{\varepsilon^p}{p} (b^p + \varepsilon^p)^{1/p - 1} \end{aligned}$$

(accroissement finis).

Les poids J_α vérifient aussi cette propriété : $J_\alpha(\mu + \varepsilon) = J_\alpha(\mu) + \varepsilon$.

Si alors Φ est un poids homogène compact de la forme

$$\Phi = \sup_{0 < \alpha < 1} \varphi(\alpha) J_\alpha, \quad \varphi \text{ fonction } > 0 \text{ sur }]0, 1[, \text{ et borné par } M > 0 \text{ fini,}$$

il vérifie la propriété, avec

$$\Phi(\mu + \varepsilon) = \sup_{0 < \alpha < 1} \varphi(\alpha) (J_\alpha(\mu) + \varepsilon) \leq \Phi(\mu) + \varepsilon M$$

§ 6. UN CRITERE POUR LES APPLICATIONS RADONIFIANTES

En utilisant alors les propositions (V ; 3,1) et corollaire, (V ; 4,1), (V ; 5,1), on aura le théorème suivant :

Proposition (V ; 6,1)

Soient E, G, des Banach, u linéaire continue de E dans G ; on suppose que le couple (E, E') a la propriété d'approximation métrique. Soit A un poids homogène plus fort que u, vérifiant l'inégalité (V ; 5,1),

et soit B un poids homogène compact (par exemple $A = B = \| \|_p$, $0 < p \leq +\infty$).
Pour que u soit (A ; B)-radonifiante de E dans $\sigma(G'', G')$, il suffit qu'il
existe une constante $M \geq 0$ finie telle que, pour toute probabilité de Radon
 λ sur E portée par un ensemble fini, on ait $B(u(\lambda)) \leq M A^*(\lambda)$.
On a alors la même inégalité pour toute probabilité cylindrique λ de type A.

Pour $A = B = \| \|_p$, on verra ultérieurement que la condition donnée sur u signifie exactement qu'elle est p-sommante, et la plus petite constante M est la norme p-sommante $\pi_p(u)$.
