

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. SCHWARTZ

## La topologie étroite et la topologie cylindrique

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1969-1970), exp. n° 3, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1969-1970\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970__A3_0)

© Séminaire Maurey-Schwartz  
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDiciS 11-77  
(633)

S E M I N A I R E L . S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

---

LA TOPOLOGIE ETROITE ET  
LA TOPOLOGIE CYLINDRIQUE

Exposé n° 3

17, 11.1969



§ 1. DEFINITION DE LA TOPOLOGIE ETROITE

Soit  $X$  un espace topologique (séparé comme toujours), et soit  $\mathfrak{M}_+(X)$  l'espace des mesures de Radon  $\geq 0$  finies sur  $X$ . La topologie étroite est une topologie sur  $\mathfrak{M}_+(X)$ .

Supposons d'abord  $X$  complètement régulier ; alors c'est la topologie  $\sigma(\mathfrak{M}_+(X), \mathfrak{B}(X))$  de la convergence simple sur l'espace  $\mathfrak{B}(X)$  des fonctions continues bornées. Si  $X$  est le compactifié de Cech de  $X$ ,  $\mathfrak{B}(X) \simeq C(\check{X})$ , donc c'est la topologie induite par la topologie vague  $\sigma(C(\check{X}), C(\check{X}))$ .

Si  $f$  est une fonction réelle sur  $X$ , semi-continue inférieurement (s.c.i) sur  $X^{(\diamond)}$ , elle est enveloppe supérieure des fonctions continues bornées qui la minorent ; donc  $\mu \rightarrow \mu(f)$  est s.c.i. pour la topologie étroite.

Si alors des  $\mu_j \in \mathfrak{M}_+(X)$  convergent étroitement vers  $\mu$ , on a  $\liminf \mu_j(f) \geq \mu(f)$ . Inversement, si cette condition est réalisée pour toute  $f$  s.c.i. bornée, on a une inégalité inverse (par changement de signe) pour  $f$  s.c.s. bornée, donc  $\lim_j \mu_j(\varphi) = \mu(\varphi)$  pour  $\varphi \in \mathfrak{B}(X)$ , et  $\mu_j$  converge étroitement vers  $\mu$ .

Ceci permet de définir (TOPSOE) la topologie étroite sur  $\mathfrak{M}_+(X)$ , même si  $X$  n'est pas complètement régulier : c'est la topologie la moins fine pour laquelle, pour toute  $f$  bornée s.c.i. sur  $X$ , la fonction  $\mu \rightarrow \mu(f)$  soit s.c.i.

On voit aisément qu'elle est séparée, et qu'on peut se borner à des  $f$  fonctions caractéristiques d'ouverts, appartenant à une base de la topologie, stable par réunions finies.

§ 2. CONVERGENCE ETROITE DE MESURES PORTEES PAR UNE PARTIE  $A \subset X$

Proposition (III;2,1)

Pour des mesures  $\geq 0$  finies portées par une partie  $A \subset X$ , la convergence étroite sur  $X$  est la même que la convergence étroite sur  $A$  des mesures induites.

( $\diamond$ ) non nécessairement  $\geq 0$  !

Démonstration : Si  $(\mu_j)_A$  converge étroitement vers  $\mu_A$ , il est évident que  $\mu_j$  converge étroitement vers  $\mu$ , car toute fonction s.c.i. sur  $X$  à une restriction à  $A$  qui est s.c.i.

Inversement, supposons que  $\mu_j$  converge étroitement vers  $\mu$ , toutes étant portées par  $A$ , et montrons que  $(\mu_j)_A$  converge étroitement vers  $\mu_A$ . Soit  $f$  une fonction s.c.i. bornée sur  $A$ ,  $f \leq C$ . Pour  $x \in X$ , posons  $\bar{f}(x) = \liminf_{\substack{x' \in A \\ x' \rightarrow x}} f(x')$  si  $x \in \bar{A}$ ,  $\bar{f}(x) = C$  sinon.

Alors  $\bar{f}$  est une fonction s.c.i. bornée prolongeant  $f$ .

On a alors :

$$\liminf.(\mu_j)_A(f) = \liminf.\mu_j(\bar{f}) \geq \mu(\bar{f}) = \mu_A(f),$$

donc  $(\mu_j)_A$  converge étroitement vers  $\mu_A$ .

Remarques

1) On doit supposer les  $\mu_j$  et  $\mu$  portées par  $A$  ; le fait que les  $\mu_j$  soient portées par  $A$  n'entraîne pas que  $\mu$  soit portée par  $A$ .

Exemple : si  $a_j \in X$  converge vers  $a$ ,  $\delta_{(a_j)}$  converge étroitement vers  $\delta_{(a)}$ . Cependant les  $\delta_{(a_j)}$  sont portées par  $\bigcup \{a_j\}$  (si les  $a_j$  sont tous dans  $\bigcup \{a_j\}$ ), mais pas  $\delta_{(a)}$ .

2) D'après la définition même de la topologie étroite, le résultat énoncé dans la proposition était déjà connu pour l'espace  $\overset{v}{X}$  et son sous-espace  $X$ , pour  $X$  complètement régulier.

Proposition (III;2,2)

Soit  $X$  localement compact. Pour que des mesures  $\mu_j \geq 0$  finies convergent étroitement vers  $\mu$ , il faut et il suffit qu'elles convergent vaguement et que  $\lim_j \mu_j(1) = \mu(1)$ .

Démonstration : C'est trivialement nécessaire, montrons que c'est suffisant. Les  $\mu_j$  convergent alors vers  $\mu$ , simplement sur  $C_{\text{comp}}(X) \ni \mathbb{R}$ , sous-espace dense de  $C(\tilde{X})$ , où  $\tilde{X}$  est le compactifié d'Alexandrov de  $X$ . Par Ascoli, les  $\mu_j$  convergent vers  $\mu$  simplement sur  $C(\tilde{X})$ , c'est-à-dire

étroitement sur  $\tilde{X}$  ; la proposition précédente dit qu'elles convergent étroitement sur  $X$ .

### § 3. LES FONCTIONS INTEGRABLES - RIEMANN

Soit  $\mu \in \mathfrak{M}_+(X)$ . Une fonction  $\vec{f}$  sur  $X$ , à valeurs dans un Banach  $F$ , est dite  $\mu$ -intégrable-Riemann, si elle est bornée, et si l'ensemble de ses points de discontinuité est  $\mu$ -négligeable. La fonction caractéristique d'une partie  $A$  de  $F$  est  $\mu$ -intégrable Riemann, si et seulement si la frontière  $A$  est  $\mu$ -négligeable.

#### Proposition (III;3,1)

Soit  $\vec{f} : X \rightarrow F$ . Si, quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction continue décomposable  $\vec{g} \in \mathfrak{B}(X) \otimes F$ , et une fonction  $h$  continue bornée  $\geq 0$ , telles que  $\|\vec{f} - \vec{g}\|_F \leq h$  et  $\mu(h) \leq \varepsilon$ , alors  $\vec{f}$  est  $\mu$ -intégrable-Riemann. La réciproque est vraie si  $X$  est complètement régulier.

#### Démonstration :

1) Supposons réalisée la condition de l'énoncé.

Soit  $\omega(\vec{f})$  la fonction oscillation de  $\vec{f}$  :

$$\omega(\vec{f})(x) = \limsup_{x', x'' \rightarrow x} \|\vec{f}(x') - \vec{f}(x'')\|_F$$

On a  $\omega(\vec{f})(x) \leq \omega(\vec{g})(x) + \omega(\vec{f} - \vec{g})(x) \leq 0 + \limsup_{x', x'' \rightarrow x} (h(x') + h(x'')) = 2h(x)$ ,

donc  $\mu(\omega(\vec{f})) \leq 2\mu(h) \leq 2\varepsilon$ .

Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, on a  $\mu(\omega(\vec{f})) = 0$ ,  $\vec{f}$  est  $\mu$ -presque partout continue.

2) Supposons inversement  $\vec{f}$  bornée et  $\mu$ -presque partout continue. Alors, la restriction de  $\vec{f}$  à un ensemble portant  $\mu$  est continue donc  $\mu$ -mesurable, donc  $\vec{f}$  est aussi  $\mu$ -mesurable, donc  $\mu$ -intégrable.

Donc, pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $\vec{g} \in \mathfrak{B}(X) \otimes F$  telle que  $\mu(\|\vec{f} - \vec{g}\|) \leq \varepsilon/2$ .

Soit  $k$  la plus petite fonction s.c.s. majorant  $\|\vec{f} - \vec{g}\|$  :

$k(x) = \limsup_{x' \rightarrow x} \|\vec{f}(x') - \vec{g}(x')\|$ . Comme l'ensemble des points de discontinuité de  $f$  (et aussi de  $\vec{g}$ ) est  $\mu$ -négligeable,  $k = \|\vec{f} - \vec{g}\|$   $\mu$ -presque partout, et  $\mu(k) \leq \varepsilon/2$ . Mais comme  $X$  est complètement régulier,

$\mu(k) = \inf_{\substack{h \text{ continue} \\ h \geq k}} \mu(h)$ , donc il existe  $h$  continue  $\geq 0$

telle que  $\|\vec{f} - \vec{g}\| \leq h$  et  $\mu(h) \leq \varepsilon$ , cgfd

Proposition (III;3,2)

Soient  $\mu_j$  des mesures  $\geq 0$  finies sur  $X$ , convergeant étroitement vers  $\mu$ . Soit  $A \subset X$ , portant les  $\mu_j$  et  $\mu$ . Soit  $\vec{f}$  une fonction bornées sur  $A$ , à valeurs dans un Banach  $F$ ,  $\mu_A$ -intégrable-Riemann, et  $(\mu_j)_A$ -mesurables pour tout  $j$ .

Si  $X$  est complètement régulier, ou si  $f$  est à valeurs réelles, et peut-être dans tous les cas,  $\lim_j \mu_j(\vec{f}) = \mu(\vec{f})$ .

Démonstration : D'après la prop.(III;2,1), on peut supposer  $A = X$ .  
 Supposons d'abord  $X$  complètement régulier. D'après la prop.(III;3,1), pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\vec{g} \in \mathfrak{B}(X) \otimes F$  et  $h$  continue  $\geq 0$ , telles que  $\|\vec{f} - \vec{g}\| \leq h$  et  $\mu(h) \leq \varepsilon/4$ .  $\|\mu_j(\vec{f}) - \mu(\vec{f})\| \leq \|\mu_j(\vec{f}) - \mu_j(\vec{g})\| + \|\mu_j(\vec{g}) - \mu(\vec{g})\| + \|\mu(\vec{g}) - \mu(\vec{f})\|$   
 Le 2ème terme est  $\leq \varepsilon/3$  pour  $j$  assez grand. Le 3ème terme aussi. En outre  $\|\mu_j(\vec{f}) - \mu_j(\vec{g})\| \leq \mu_j(h)$ , et comme  $\mu(h) \leq \varepsilon/4$  et que  $h$  est continue bornée,  $\lim_j \mu_j(h) = \mu(h)$ , donc  $\mu_j(h) \leq \varepsilon/3$  pour  $j$  assez grand, d'où le résultat.

Supposons maintenant  $F = \mathbf{R}$  (ou bien sûr  $F$  de dimension finie) et  $X$  quelconque. Soit  $f^+$  (resp.  $f^-$ ) la plus petite majorante s.c.s. (resp. la plus grand minorante s.c.i.) de  $f$ . Alors  $f^+ = f^- = f$   $\mu$ -p.p., donc :  
 $\lim_j \sup \mu_j(f^+) \leq \mu(f^+) = \mu(f^-) \leq \lim_j \inf \mu_j(f^-) \leq \lim_j \sup \mu_j(f^+)$ .

Donc, toutes ces quantités sont égales, et  $\lim_j \mu_j(f) = \mu(f)$ .

§ 4. PARTIES RELATIVEMENT COMPACTES DE  $\mathcal{P}(X)$  : LE 2ème THEOREME DE PROKHOROV.

Proposition (III;4,1). (2ème théorème de Prokhorov). Soient  $X$  un espace topologique,  $\mathfrak{M}$  une partie de  $\mathcal{P}(X)$  (espace des probabilités de Radon sur  $X$ , muni de la topologie étroite).

Pour que  $\mathfrak{M}$  soit relativement compact dans  $\mathcal{P}(X)$ , il est suffisant, et nécessaire si  $X$  est localement compact ou polonais, que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K_\varepsilon \subset X$  tel que, pour toute  $\mu \in \mathfrak{M}$ ,  $\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ .

Démonstration

1) supposons cette condition réalisée et montrons que  $\mathfrak{M}$  est relativement compact. Pour simplifier, bornons-nous au cas où  $X$  est complètement régulier. Puisqu'alors la topologie étroite de  $\mathcal{P}(X)$  est induite par celle de  $\mathcal{P}(\check{X})$ , et qu'on sait que  $\mathcal{P}(\check{X})$  est vaguement compact, il suffit de montrer que l'adhérence  $\bar{\mathfrak{M}}$  de  $\mathfrak{M}$  dans  $\mathcal{P}(\check{X})$  et dans  $\mathcal{P}(X)$ . Or, pour tout  $K_\varepsilon$ ,  $\mu \mapsto \mu(K_\varepsilon)$  est semi-continue supérieurement pour la topologie étroite ; de  $\lambda(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$  pour  $\lambda \in \mathfrak{M}$  on déduit la même conclusion pour  $\lambda \in \bar{\mathfrak{M}}$ . Alors toute  $\lambda \in \bar{\mathfrak{M}}$  est ôtée par une réunion dénombrable de compacts de  $X$ , donc par  $X$ , donc  $\lambda \in \mathcal{P}(X)$ , et  $\bar{\mathfrak{M}} \subset \mathcal{P}(X)$ .

2a) supposons  $\mathfrak{M}$  compact et  $X$  localement compact. Pour toute  $\mu \in \mathfrak{M}$ , soit  $K_\mu$  un compact de  $X$  tel que  $\mu(K_\mu) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ , et soit  $\mathcal{O}_\mu$  un ouvert relativement compact contenant  $K_\mu$ . Appelons  $\mathcal{V}_\mu$  le voisinage de  $\mu$  dans  $\mathcal{P}(X)$  défini par  $\mathcal{V}_\mu = \{v \in \mathcal{P}(X) ; v(\mathcal{O}_\mu) \geq \mu(\mathcal{O}_\mu) - \frac{\varepsilon}{2}\}$ . Puisque  $\mathfrak{M}$  est compact, il est recouvert par un nombre fini de ces voisinages, soit  $\mathcal{V}_{\mu_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Posons alors  $K = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \bar{\mathcal{O}}_{\mu_i}$  ; c'est un compact de  $X$ . Pour toute  $\mu \in \mathfrak{M}$ , il existe un  $i$  tel que  $\mu \in \mathcal{V}_{\mu_i}$ , donc  $\mu(K) \geq \mu(\mathcal{O}_{\mu_i}) \geq \mu_i(\mathcal{O}_{\mu_i}) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \mu_i(K_{\mu_i}) - \frac{\varepsilon}{2} \geq 1 - \varepsilon$ , d'où le résultat.

2b) soit  $\mathfrak{M}$  compact, et supposons  $X$  intersection dénombrable décroissante de localement compacts  $X_n$  dont il est sous-espace. Dans chaque  $\mathcal{P}(X_n)$ ,  $\mathfrak{M}$  est compact (prop (III,2;1)), donc, pour  $\varepsilon$  donné, il existe un compact



$K_n \subset X_n$  tel que  $\mu(K_n) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$  pour toute  $\mu \in \mathfrak{M}$ . Posons  $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$  ; pour toute  $\mu \in \mathfrak{M}$  on a bien  $\mu(K) \geq 1 - \varepsilon$ , et  $K \subset X$ , d'où le résultat. Comme un espace polonais est un  $G_\delta$  dans un compact, le théorème est démontré.

§ 5. LA TOPOLOGIE CYLINDRIQUE.

Soit  $E$  un espace vectoriel topologique séparé par son dual. Appelons  $\mathfrak{P}(E)$  l'espace des probabilités cylindriques sur  $E$ . Sur  $\mathfrak{P}(E)$ , la topologie cylindrique est la moins fine rendant continues les applications  $v : \mathfrak{P}(E) \rightarrow \mathfrak{P}(G)$ , associées aux applications linéaires continues  $v : E \rightarrow G$  de  $E$  dans des espaces vectoriels de dimension finie  $G$ .

Comme  $\mathfrak{P}(G)$  est séparé, et que les  $v$  séparent les points de  $\mathfrak{P}(E)$ , c'est une topologie séparée.

Proposition (III;5,1)

Soit  $\mathfrak{P}(E_\sigma) \subset \mathfrak{P}(E)$  l'espace des probabilités de Radon sur  $E_\sigma = \sigma(E, E')$ . Sur  $\mathfrak{P}(E_\sigma)$ , la topologie étroite (correspondant à la topologie  $E_\sigma$ !) coïncide avec la topologie cylindrique.

Démonstration : la topologie étroite est trivialement plus fine. Il suffit donc de montrer que, si des  $\lambda_j \in \mathfrak{P}(E_\sigma)$  convergent cylindriquement vers  $\lambda \in \mathfrak{P}(E_\sigma)$ , elles convergent étroitement. Pour cela il suffit de montrer que, pour des ouverts  $\mathcal{O}$  de  $E_\sigma$  formant une base de la topologie stable par réunions finies, on a  $\liminf_j \lambda_j(\mathcal{O}) \geq \lambda(\mathcal{O})$ . Or on obtient de tels ouverts en prenant  $\mathcal{O} = v^{-1}(\Omega)$ ,  $\Omega$  ouvert d'un espace vectoriel  $G$  de dimension finie,  $v$  linéaire continue de  $E$  dans  $G$ . Alors l'inégalité précédente s'écrit  $\liminf_j (v(\lambda_j))(\Omega)$ , ce qui résulte de la convergence cylindrique. Le théorème de Prokhorov (III;4,1) a la conséquence triviale suivante, qui sera essentielle dans la théorie des applications radionifiantes :

Proposition (III;5,2)

Soient  $\lambda_j$  des probabilités de Radon sur  $E$ , convergeant cylindriquement vers une probabilité cylindrique  $\lambda$ . Supposons que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K_\varepsilon$  de  $E$  tel que  $\lambda_j(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$  pour tout  $j$ .

III.7

Alors  $\lambda$  est de Radon sur  $E$  et, pour tout  $\varepsilon$ ,  $\lambda(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$  ; en outre les  $\lambda_j$  convergent vers  $\lambda$  étroitement sur  $E$ .

Démonstration : soit  $\mathfrak{D}$  l'ensemble des probabilités de Radon  $\mu$  sur  $E$ , vérifiant  $\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$  pour tout  $\varepsilon$ . Il est relativement compact dans  $\mathcal{P}(E)$  par (III;4,1), et fermé dans  $\mathcal{P}(E)$ , donc compact. Il est donc a fortiori compact pour la topologie plus faible  $\check{\mathcal{P}}(E)$ , donc fermé dans  $\check{\mathcal{P}}(E)$ , et, sur  $\mathfrak{D}$ , les topologies étroite et cylindrique coïncident, cqfd.

---