SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. SUNYACH

(Annexe n°2) Inégalité de Pietsch et factorisation des applications O-radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A34_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

INEGALITE DE PIETSCH ET FACTORISATION DES APPLICATIONS 0-RADONIFIANTES

par C. SUNYACH

Annexe N°2

Dans toute cette annexe, E et F désignent des espaces de Banach, et B' la boule unité de E', munie de la topologie induite par $\sigma(E',E)$. Si λ est une probabilité de Radon sur E, on désigne par $\|\lambda\|_E$ l'image de λ par l'application $\|.\|_E$.

Théorème : Soit u une application linéaire de E dans F. Les assertions sont équivalentes.

1) u est faiblement continue et approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(F'',F')$.

2) Quel que soit $\beta > 0$, il existe $M \geq 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute probabilité λ sur E, à support fini, on ait

$$\sup_{\xi \in B'} \int_{|t|>1} d\xi(\lambda)(t) \leq \alpha \quad \text{implique} \quad \int_{|t|>M} d\|u(\lambda)\|(t) \leq \beta .$$

3) Il existe $\rho > 0$ et $\delta > 0$ et une probabilité de Radon μ sur B', tels que pour tout $x \in E$ et vérifiant $ux = 0$, on ait

$$\rho \leq \mu\{\xi, |\langle \frac{x}{\|ux\|}, \xi\rangle| > \delta\} .$$

4) Il existe $C \geq 0$ et $D \geq 0$ tels que pour toute suite finie (x_i) de E, pour toute suite finie (λ_i) de $\mathbb{R}^+$ et pour tout $p > 0$, on ait :

$$\sum_{i:\|ux_i\|>D} \lambda_i \|ux_i\|^p \leq C.D^p \sup_{\xi \in B'} \sum_{i:|\langle x_i,\xi\rangle|>1} \lambda_i |\langle x_i,\xi\rangle|^p$$

5) Il existe $C \geq 0$ et $D > 0$ tels que pour toute suite finie (x_i) de E et pour toute suite finie (λ_i) de $\mathbb{R}^+$, on ait

$$\sum_{i:\|ux_i\|>D} \lambda_i \leq C \sup_{\xi \in B'} \Big(\sum_{i:|\langle x_i,\xi\rangle|>1} \lambda_i \Big) .$$

6) Il existe un espace compact K et une probabilité de Radon μ, tels que ux se factorise suivant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[d, "u_1"'] & \mathcal{C}(K) \arrow[r] & L^0(K,\mu) \\
S \arrow[urr, "i"] \arrow[rr, "u_2"'] & & F
\end{tikzcd}$$

où $L^0(K,\mu)$ désigne l'espace des classes de fonctions μ-mesurables, muni de la convergence en mesure, où toutes les flèches sont des morphismes, i un isomorphisme sur son image, et $u = u_2 \circ u_1$ [resp. l'assertion obtenue en remplaçant $\mathcal{C}(K)$ par $L^\infty(K,\mu)$].

A) D'après le théorème (XVI,2;1), pour montrer que 1 est équivalente à 2, il suffit de voir que si u vérifie 2, elle est faiblement continue. Or d'après 2, si $\beta < 1$, on a $\|u\| \le M_\beta$.

B) Pour montrer que 2 implique 3, on introduit l'assertion suivante :
2') Quel que soit $\beta > 0$, il existe $M \ge 0$, $\alpha > 0$ et une probabilité de Radon μ sur B', tels que pour toute probabilité λ sur E, à support fini, on ait

$$\int_{B'} \Big[\int_{|t|>1} d\xi(\lambda)(t)\Big]\, d\mu(\xi) \le \alpha \quad \text{entraîne} \quad \int_{|t|>M} d\|u(\lambda)\|(t) \le \beta .$$

Supposons que $u \neq 0$ vérifie 2, et fixons $\beta \in]0,1[$ ainsi qu'une fonction continue φ de $\mathbb{R}$ dans lui-même, telle que pour tout t on ait $\varphi(t) \le 1$, $\varphi(t) = 0$ si $0 \le |t| \le a < 1$ et $\varphi(t) = 1$ si $|t| \ge 1$.

Soit X l'ensemble des fonctions définies sur B', de la forme $f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, d\xi(\lambda)(t)$, où λ est une probabilité sur E à support fini telle que $\int_{|t|>M} d\|u(\lambda)\|(t) > \beta$. X est une partie convexe non vide de $\mathcal{C}(B')$ qui, par hypothèse, est disjointe de l'ouvert convexe U des fonctions continues g de B' telles que $\sup_{\xi \in B'} g(\xi) < \alpha$. Donc, il existe une mesure de Radon ν sur B', telle que si $g \in U$, on ait $\int g\, d\nu \le 1$ et si $f \in X$, on ait $\int f\, d\nu \ge 1$. Cette norme est positive et non nulle, et en posant $\mu = \frac{\nu}{\nu(1)}$, on a, pour toute probabilité λ à support fini dans E,

$$\int_{B'} \Big[\int_{|t|>a} d\xi(\lambda)(t)\Big] d\mu(\xi) < \alpha \quad \text{entraîne} \quad \int_{|t|>M} d\|u(\lambda)\|(t) \le \beta .$$

Donc u vérifie 2'.
Si u vérifie 2', en prenant $\lambda = \delta_x$ on obtient la relation suivante :
"Pour tout $x \in E$. $\|ux\| > M$ implique $\alpha < \mu\{\xi, |\langle x,\xi\rangle| > 1\}$".

Donc, pour tout x tel que $ux \neq 0$, on a

$$\alpha < \mu\{\xi, |< \frac{x}{\|ux\|}, \xi >| > \frac{1}{M}\} ,$$

ce qui prouve que u vérifie 3.

C) Si u vérifie 3, on a pour tout $p > 0$ et pour tout x tel que $ux \neq 0$

$$\rho\delta^p \leq \int_{|< \frac{x}{\|ux\|}, \xi >| > \delta} |< \frac{x}{\|ux\|}, \xi >|^p \, d\mu(\xi) ,$$

donc pour tout x tel que $\delta\|ux\| > 1$, on a

$$\|ux\|^p < \frac{1}{\rho\delta^p} \int_{|<x,\xi>|>1} |< x, \xi >|^p \, d\mu(\xi) ,$$

relation d'où l'on tire 1, avec $C = \frac{1}{\rho}$ et $D = \frac{1}{\delta}$.

D) Soit (x_i, λ_i) une suite finie de $E \times \mathbb{R}^+$. La fonction $\Phi(\xi) = \sum_{i:|<x_i,\xi>| \geq 1} \lambda_i |< x_i, \xi >|^p$ est semi-continue supérieurement.

En effet, il existe une suite décroissante de fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même, qui converge simplement vers $\varphi(t) = 0$ si $t < 1$ et $\varphi(t) = t^p$ si $t \geq 1$, de sorte que Φ est limite simple d'une suite décroissante de fonctions continues.

Supposons que u vérifie 1. Si l'on fait tendre ρ vers 0 dans l'inégalité, on peut intervertir le passage à la limite et le sup dans le deuxième membre, d'après la compacité de B' et la remarque précédente, d'où il résulte que u vérifie 5.

E) Il est clair que 5 implique 2, avec $M = D$ et $C\alpha = \beta$.

F) Si u vérifie 2', en prenant $\lambda = \delta_x$ on obtient la relation suivante: "Pour tout $x \in E$, $\mu\{\xi, |< x, \xi >| > 1\} \leq \alpha$ implique $\|ux\| \leq M$, pourvu que $\beta < 1$ " .

On a donc la factorisation cherchée, avec $K = B'$. D'autre part, on sait que 6 entraîne que u est approximativement 0-radonifiante (corollaire 1 de la Proposition (XXIV,3;1), ce qui achève la démonstration du théorème. Remarquons que suivant B, dans l'assertion 2 on peut remplacer "quel que soit $\beta > 0$" par "il existe $\beta \in]0,1[$".

Le point essentiel de la démonstration, à savoir 2 entraîne 2', est inspiré de la démonstration de l'inégalité de Pietsch, donnée par Lindenstrauss et Pelczinski[1].

<u>Corollaire</u> : <u>Soit u une application linéaire faiblement continue et approximativement 0-radonifiante de E dans F. Alors u est p-sommante pour tout $p > 0$, et il existe des constantes $C > 0$ et $D \geq 0$ telles que</u>

$$(1) \qquad \pi_p(u) \leq C^{\frac{1}{p}} D .$$

<u>Démonstration</u> : D'après 1, on a pour tout $t > 0$

$$\sum_{i:\|ux_i\|>t.D} \|ux_i\|^p \leq C . D^p \sup_{\xi\in B'} \sum_{i:|<x_i,\xi>|>t} |<x_i,\xi>|^p ,$$

d'où le résultat en prenant le sup sur l'ensemble des $t > 0$.

La première partie du corollaire résulte aussi de la proposition (XVII,1;1). On peut retrouver les inégalités à partir de la démonstration de cette proposition.

On ignore si, réciproquement, toute application linéaire p-sommante pour tout $p > 0$ et vérifiant les inégalités (1) est approximativement 0-radonifiante. Cependant on a le résultat suivant.

<u>Proposition</u> : <u>Soit u une application linéaire de E dans F et p-sommante pour tout $p > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes.</u>

(1) J. Lindenstrauss et A. Pelczinski : Absolutely Summing Operators in L_p Spaces and Applications, Studia Mathmatica, XXIX, 1968, p. 275-326.

1) $\pi_p(u)$ <u>est bornée par C sur</u> $]0,+\infty[$.

2) <u>Il existe une probabilité de Radon μ sur B' telle que pour tout $x \in E$, ou bien $\mu\{\xi, <x,\xi> \neq 0\} < 1$ et alors $ux = 0$, sinon</u>

$$(2) \qquad \|ux\| \leq C \exp \int^{*} \mathrm{Log}\, |<x,\xi>|\, d\mu(\xi) \quad .$$

3) <u>Pour toute suite finie</u> (x_i, λ_i) de $E \times \mathbb{R}_*^+$, <u>on a</u>

$$\prod_i \|ux_i\|^{\lambda_i} \leq C^{\sum_i \lambda_i} \sup_{\xi \in B'} \prod_i |<x_i,\xi>|^{\lambda_i}$$

<u>(avec la convention : pour tout $a > 0$, $0^a = 0$).</u>

<u>Démonstration</u> : Supposons que u vérifie 1, et pour $p > 0$ soit M_p l'ensemble des probabilités de Radon ν sur B', telles que pour tout $x \in E$ on ait

$$(3) \qquad \|ux\| \leq C[\int |<x,\xi>|^p d\nu(\xi)]^{\frac{1}{p}} \quad .$$

Si $p \leq q$, on a $M_p \subset M_q$, et M_p est vaguement compact. L'intersection des M_p n'est donc pas vide et si μ est dans cette intersection, on trouve l'inégalité (2) en faisant tendre p vers 0 dans les inégalités (3) écrites pour μ (Cf. Bourbaki, Intégration, Chap. 1, § 6, Ex 7).
D'après le théorème des moyennes arithmétique et géométrique, 2 implique 1.
Il est clair que 2 implique 3, et l'implication réciproque peut se montrer en considérant la fonctionnelle

$$s(\varphi) = \inf_{\substack{(x_i)\\ ux_i \neq 0}} \inf_{\substack{(\lambda_i)\\ \lambda_i > 0}} \sup_{\xi \in B'} [\varphi(\xi) + \varphi(\xi) + \sum_i \lambda_i \mathrm{Log}\, C |< \frac{x_i}{\|u\, x_i\|}, \xi>|\,] .$$

On termine la démonstration comme celle du théorème de Pietsch (théorème VII,2;1).
On sait que pour toute application linéaire u, 0-radonifiante d'un espace de Hilbert dans un espace de Banach, $\pi_p(u)$ est borné (Prop.(XXIV,1;2) et (XXV,1;1)).
