

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. SUNYACH

(Annexe n°2) Inégalité de Pietsch et factorisation des applications O -radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970___A34_0>

© Séminaire Laurent Schwartz
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

INEGALITE DE PIETSCH ET FACTORISATION DES

APPLICATIONS 0-RADONIFIANTES

par C. SUNYACH

Annexe N^o 2

Dans toute cette annexe, E et F désignent des espaces de Banach, et B' la boule unité de E' , munie de la topologie induite par $\sigma(E', E)$. Si λ est une probabilité de Radon sur E , on désigne par $\|\lambda\|_E$ l'image de λ par l'application $\|\cdot\|_E$.

Théorème : Soit u une application linéaire de E dans F . Les assertions sont équivalentes.

- 1) u est faiblement continue et approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(F'', F')$.
- 2) Quel que soit $\beta > 0$, il existe $M \geq 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute probabilité λ sur E , à support fini, on ait

$$\sup_{\xi \in B'} \int_{|t| > 1} d\xi(\lambda)(t) \leq \alpha \quad \text{implique} \quad \int_{|t| > M} d\|u(\lambda)\|(t) \leq \beta .$$

- 3) Il existe $\rho > 0$ et $\delta > 0$ et une probabilité de Radon μ sur B' , tels que pour tout $x \in E$ et vérifiant $ux = 0$, on ait

$$\rho \leq \mu \left\{ \xi, \left| \frac{x}{\|ux\|}, \xi \right| > \delta \right\} .$$

- 4) Il existe $C \geq 0$ et $D \geq 0$ tels que pour toute suite finie (x_i) de E , pour toute suite finie (λ_i) de \mathbb{R}^+ et pour tout $p > 0$, on ait :

$$\sum_{i: \|ux_i\| > D} \lambda_i \|ux_i\|^p \leq C \cdot D^p \sup_{\xi \in B'} \sum_{i: |\langle x_i, \xi \rangle| > 1} \lambda_i |\langle x_i, \xi \rangle|^p$$

- 5) Il existe $C \geq 0$ et $D > 0$ tels que pour toute suite finie (x_i) de E et pour toute suite finie (λ_i) de \mathbb{R}^+ , on ait

$$\sum_{i: \|ux_i\| > D} \lambda_i \leq C \sup_{\xi \in B'} \left(\sum_{i: |\langle x_i, \xi \rangle| > 1} \lambda_i \right) .$$

- 6) Il existe un espace compact K et une probabilité de Radon μ , tels que ux se factorise suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E \rightarrow \mathcal{C}(K) \rightarrow L^0(K, \mu) \\ \swarrow u_1 \quad \searrow i \quad \nearrow u_2 \\ S \rightarrow F \end{array}$$

où $L^0(K, \mu)$ désigne l'espace des classes de fonctions μ -mesurables, muni de la convergence en mesure, où toutes les flèches sont des morphismes, à un isomorphisme sur son image, et $u = u_2 \circ u_1$ [resp. l'assertion obtenue en remplaçant $\mathcal{C}(K)$ par $L^\infty(K, \mu)$].

A) D'après le théorème (XVI, 2; 1), pour montrer que 1 est équivalente à 2, il suffit de voir que si u vérifie 2, elle est faiblement continue. Or d'après 2. si $\beta < 1$, on a $\|u\| \leq M_\beta$.

B) Pour montrer que 2 implique 3, on introduit l'assertion suivante :
2') Quel que soit $\beta > 0$, il existe $M \geq 0$, $\alpha > 0$ et une probabilité de Radon λ sur B' , tels que pour toute probabilité λ sur E , à support fini, on ait

$$\int_{B'} \left[\int_{|t| > 1} d\xi(\lambda)(t) \right] d\mu(\xi) \leq \alpha \text{ entraîne } \int_{|t| > M} d\|u(\lambda)\|(t) \leq \beta.$$

Supposons que $u \neq 0$ vérifie 2, et fixons $\beta \in]0, 1[$ ainsi qu'une fonction continue φ de \mathbb{R} dans lui-même, telle que pour tout t on ait $\varphi(t) \leq 1$, $\varphi(t) = 0$ si $0 \leq |t| \leq a < 1$ et $\varphi(t) = 1$ si $|t| \geq 1$.

Soit X l'ensemble des fonctions définies sur B' , de la forme $f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) d\xi(\lambda)(t)$, où λ est une probabilité sur E à support fini telle que $\int_{|t| > M} d\|u(\lambda)\|(t) > \beta$. X est une partie convexe non vide de $\mathcal{C}(B')$ qui, par hypothèse, est disjointe de l'ouvert convexe U des fonctions continues g de B' telles que $\sup_{\xi \in B'} g(\xi) < \alpha$. Donc, il existe une mesure de Radon ν sur B' , telle que si $g \in U$, on ait $\int g d\nu \leq 1$ et si $f \in X$, on ait $\int f d\nu \geq 1$. Cette norme est positive et non nulle, et en posant $\mu = \frac{\nu}{\nu(1)}$, on a, pour toute probabilité λ à support fini dans E ,

$$\int_{B'} \left[\int_{|t| > a} d\xi(\lambda)(t) \right] d\mu(\xi) < \alpha \text{ entraîne } \int_{|t| > M} d\|u(\lambda)\|(t) \leq \beta.$$

Donc u vérifie 2'.

Si u vérifie 2', en prenant $\lambda = \delta_x$ on obtient la relation suivante :

"Pour tout $x \in E$. $\|ux\| > M$ implique $\alpha < \mu\{\xi, |< x, \xi >| > 1\}$ ".

Donc, pour tout x tel que $ux \neq 0$, on a

$$\alpha < \mu \left\{ \xi, \left| \left\langle \frac{x}{\|ux\|}, \xi \right\rangle \right| > \frac{1}{M} \right\},$$

ce qui prouve que u vérifie 3.

(C) Si u vérifie 3, on a pour tout $p > 0$ et pour tout x tel que $ux \neq 0$

$$\rho \delta^p \leq \int_{\left| \left\langle \frac{x}{\|ux\|}, \xi \right\rangle \right| > \delta} \left| \left\langle \frac{x}{\|ux\|}, \xi \right\rangle \right|^p d\mu(\xi),$$

donc pour tout x tel que $\delta \|ux\| > 1$, on a

$$\|ux\|^p < \frac{1}{\rho \delta^p} \int_{\left| \langle x, \xi \rangle \right| > 1} \left| \langle x, \xi \rangle \right|^p d\mu(\xi),$$

relation d'où l'on tire 4, avec $C = \frac{1}{\rho}$ et $D = \frac{1}{\delta}$.

D) Soit (x_i, λ_i) une suite finie de $E \times \mathbb{R}^+$. La fonction $\phi(\xi) = \sum_{i: |\langle x_i, \xi \rangle| \geq 1} \lambda_i |\langle x_i, \xi \rangle|^p$ est semi-cont nue supérieurement.

En effet, il existe une suite décroissante de fonctions continues de \mathbb{R}^+ dans lui-même, qui converge simplement vers $\varphi(t) = 0$ si $t < 1$ et $\varphi(t) = t^p$ si $t \geq 1$, de sorte que ϕ est limite simple d'une suite décroissante de fonctions continues.

Supposons que u vérifie 4. Si l'on fait tendre ρ vers 0 dans l'inégalité, on peut intervertir le passage à la limite et le sup dans le deuxième membre, d'après la compacité de B' et la remarque précédente, d'où il résulte que u vérifie 5.

E) Il est clair que 5 implique 2, avec $M = D$ et $C\alpha = \beta$.

F) Si u vérifie 2', en prenant $\lambda = \delta_x$ on obtient la relation suivante: "Pour tout $x \in E$, $\mu\{\xi, |\langle x, \xi \rangle| > 1\} \leq \alpha$ implique $\|ux\| \leq M$, pourvu que $\beta < 1$ ".

On a donc la factorisation cherchée, avec $K = B'$. D'autre part, on sait que 6 entraîne que u est approximativement 0-radonifiante (corollaire 4 de la Proposition (XXIV,3;1)), ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarquons que suivant B, dans l'assertion 2 on peut remplacer "quel que soit $\beta > 0$ " par "il existe $\beta \in]0,1[$ ".

Le point essentiel de la démonstration, à savoir 2 entraîne 2', est inspiré de la démonstration de l'inégalité de Pietsch, donnée par Lindenstrauss et Pelczinski ⁽¹⁾.

faiblement continue et

Corollaire : Soit u une application linéaire/approximativement 0-radonifiante de E dans F . Alors u est p -sommante pour tout $p > 0$, et il existe des constantes $C > 0$ et $D \geq 0$ telles que

$$(1) \quad \pi_p(u) \leq C \frac{1}{D^p}$$

Démonstration : D'après 4, on a pour tout $t > 0$

$$i: \|u x_1\| > t \cdot D \quad \sum \|u x_1\|^p \leq C \cdot D^p \sup_{\xi \in B'} \sum_{i: |\langle x_1, \xi \rangle| > t} |\langle x_1, \xi \rangle|^p,$$

d'où le résultat en prenant le sup sur l'ensemble des $t > 0$.

La première partie du corollaire résulte aussi de la proposition (XVII,4;1). On peut retrouver les inégalités à partir de la démonstration de cette proposition.

On ignore si, réciproquement, toute application linéaire p -sommante pour tout $p > 0$ et vérifiant les inégalités (1) est approximativement 0-radonifiante. Cependant on a le résultat suivant.

Proposition : Soit u une application linéaire de E dans F et p -sommante pour tout $p > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) J. Lindenstrauss et A. Pelczinski : Absolutely Summing Operators in L_p Spaces and Applications, Studia Mathematica, XXIX, 1968, p. 275-326.

- 1) $\pi_p(u)$ est bornée par C sur $]0, +\infty[$.
- 2) Il existe une probabilité de Radon μ sur B' telle que pour tout $x \in E$, ou bien $\mu\{\xi, \langle x, \xi \rangle \neq 0\} < 1$ et alors $ux = 0$, sinon

$$(2) \quad \|ux\| \leq C \exp \int^* \text{Log} |\langle x, \xi \rangle| d\mu(\xi) .$$

- 3) Pour toute suite finie (x_i, λ_i) de $E \times \mathbb{R}_*^+$, on a

$$\prod_i \|ux_i\|^{\lambda_i} \leq C^{\sum_i \lambda_i} \sup_{\xi \in B'} \prod_i |\langle x_i, \xi \rangle|^{\lambda_i}$$

(avec la convention : pour tout $a > 0$, $0^a = 0$).

Démonstration : Supposons que u vérifie 1, et pour $p > 0$ soit M_p l'ensemble des probabilités de Radon ν sur B' , telles que pour tout $x \in E$ on ait

$$(3) \quad \|ux\| \leq C \left[\int |\langle x, \xi \rangle|^p d\nu(\xi) \right]^{\frac{1}{p}} .$$

Si $p \leq q$, on a $M_p \subseteq M_q$, et M_p est vaguement compact. L'intersection des M_p n'est donc pas vide et si μ est dans cette intersection, on trouve l'inégalité (2) en faisant tendre p vers 0 dans les inégalités (3) écrites pour μ (Cf. Bourbaki, Intégration, Chap. 4, § 6, Ex 7).

D'après le théorème des moyennes arithmétique et géométrique, 2 implique 1. Il est clair que 2 implique 3, et l'implication réciproque peut se montrer en considérant la fonctionnelle

$$s(u) = \inf_{\substack{(x_i) \\ ux_i \neq 0}} \inf_{\substack{(\lambda_i) \\ \lambda_i > 0}} \sup_{\xi \in B'} \left[\varphi(\xi) + \varphi(\xi) + \sum_i \lambda_i \text{Log} C |\langle \frac{x_i}{\|ux_i\|}, \xi \rangle| \right].$$

On termine la démonstration comme celle du théorème de Pietsch (théorème VII, 2; 1).

On sait que pour toute application linéaire u , 0-radonifiante d'un espace de Hilbert dans un espace de Banach, $\pi_p(u)$ est borné (Prop. (XXIV, 4; 2) et (XXV, 1; 1)).
