

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. SAPHAR

(Annexe n°1) Analyse mathématique : applications p -sommantes et p -décomposantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970___A33_0

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

ANALYSE MATHÉMATIQUE : APPLICATIONS p -SOMMANTES ET p -DECOMPOSANTES

=====

par P. SAPHAR

Annexe N°1

Dans cette note, on utilise en général les notations de (7), (8) et (9) et aussi les suivantes : E et F désignent deux espaces de Banach quelconques. On dit qu'un espace de Banach G est de type \underline{L}^p , ($1 \leq p \leq +\infty$), si G est isomorphe en tant qu'espace normé à un espace $L^p(\Omega, \mu)$, (Ω est un espace localement compact et μ une mesure de Radon positive sur Ω). On dit que G est de type \underline{C} si G est isomorphe en tant qu'espace normé à l'espace des fonctions continues sur un compact K et à valeurs scalaires. On note $\pi_p(E, F)$ l'espace des applications p-sommantes de E dans F ($0 \leq p \leq +\infty$), cf. (4) et (13). On rappelle (cf. (9) et (10)) que pour $p \geq 1$, la norme induite sur $E' \otimes F$ par $\pi_p(E, F)$ est la norme tensorielle g_p . On dit qu'une application linéaire T de E dans F est p-sommante approximable si T appartient à $E' \hat{\otimes}_{g_p} F$. L'espace $E' \hat{\otimes}_{g_p} F$ est contenu dans l'espace $N_p^Q(E, F)$ des applications quasi p-nucléaires au sens de Pietsch et Persson (cf. (5)). Si E ou F vérifie l'hypothèse d'approximation, ces deux espaces sont identiques.

1. Un résultat sur les applications p-sommantes

A l'aide du théorème 2 de (9), on peut obtenir le résultat suivant :

Théorème 1 : soient F un espace de Banach, α un nombre réel tel que $1 \leq \alpha < +\infty$, C un espace de type \underline{C} . Considérons les conditions :

- 1) pour tout $\beta > \alpha$ (resp. pour tout $\beta \geq \alpha$), $\pi_\beta(C, F) = \mathfrak{L}(C, F)$,
- 2) pour tout espace de Banach E et tout $\beta' < \alpha'$ (resp $\beta' \leq \alpha'$)

$$\pi_1(F, E) = \pi_{\beta'}(F, E) \quad , \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1 \quad ,$$

Alors 1) et 2) sont équivalentes.

Nous allons avoir besoin des notions d'applications p-décomposées et p-décomposables introduites par Laurent Schwartz (cf. (11)) :

2) Applications p-décomposées

On désigne par $L^p(\Omega, \mathcal{A}, E)$ l'espace des classes de fonctions définies sur Ω , à valeurs dans E , \mathcal{A} -mesurables et de puissance p -ième intégrables. Soit Δ_p la norme induite sur $E \otimes L^p$ par $L^p(\Omega, \mathcal{A}, E)$. On désigne par $E \otimes_{\Delta_p} L^p$ le produit tensoriel $E \otimes L^p$ muni de Δ_p . On sait que $L^p(\Omega, \mathcal{A}, E)$ est égal à l'espace complété $E \hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p$. Il existe une application linéaire continue canonique de $E \otimes_{\Delta_p} L^p$ dans $\mathcal{L}(E, L^p)$, qu'on peut prolonger par continuité à $E \hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p$. L'application prolongée est injective. On dit qu'un élément A de $\mathcal{L}(E, L^p)$ est p -décomposé si A appartient à l'image de $E \hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p$ par cette application. L'application A provient alors d'un élément f unique de $E \hat{\otimes}_{\Delta_p} L^p$ et l'on pose $\Delta_p(A) = \Delta_p(f)$. L'espace des applications p -décomposées de E dans L^p , muni de la norme Δ_p , est donc un espace de Banach, noté $\Delta_p(E, L^p)$.

Généralisant un résultat de Persson (6) et Chevet (6), nous avons pu obtenir le :

Théorème 2 : Soient p un nombre réel tel que $1 < p < +\infty$ et L^p un espace de type \underline{L}^p . Alors, sur $E \otimes L^p$, on a : $g_p \leq \Delta_p \leq /d_p$.
 Sur $E \otimes L^1$, on a : $g_1 = \Delta_1 = /d_1$.
 La relation $g_1 = \Delta_1$ est de Grothendieck (3).

Corollaire : soient G et G_1 deux espaces de type \underline{L}^p , alors, sur $G \otimes G_1$, on a : $g_p = d_p = g_p \setminus = /d_p = \Delta_p$.

3) Applications p-décomposantes

On dit qu'une application linéaire continue u de E dans F est p -décomposante ($1 \leq p \leq +\infty$) si, pour tout espace L^p de type \underline{L}^p et pour tout élément A de $\mathcal{L}(F, L^p)$, Au est p -décomposée. On montre alors que l'application $A \rightarrow Au$ de $\mathcal{L}(F, L^p)$ dans $\Delta_p(E, L^p)$, est linéaire continue. Soit $m_p(u)$

sa norme. On désigne par $\mathfrak{D}_p(E, F)$ l'espace vectoriel des applications p-décomposables de E dans F.

Utilisant le théorème 2, nous avons pu obtenir directement le résultat suivant de L. Schwartz (11), (voir aussi S. Kwapien (4)) :

Théorème 3 : Soient u une application linéaire continue de E dans F et p tel que $1 < p < +\infty$.

Considérons les conditions :

- 1) u est p-décomposable
- 2) ${}^t u$ est p-sommante
- 3) u est 1-sommante approximable.

Alors 1) et 2) sont équivalentes. De plus, si elles sont vérifiées, on a, pour tout espace L^p : $m_{L^p}(u) \leq \pi_p({}^t u) \leq m_{L^p}(u)$, (4).

Posant alors $\delta_p(u) = \pi_p({}^t u)$, on conclut que $\mathfrak{D}_p(E, F)$, muni de δ_p , est un espace de Banach.

Remarque : pour $p = 1$, le résultat reste vrai si E est réflexif ou E' séparable. Si on ne fait pas d'hypothèse sur E, on a seulement :

- 1) implique 2) et 3) implique 1) et la relation (4).

Corollaire 1 : sur $E' \otimes F$, $\delta_p = /d_p$ pour $1 \leq p < +\infty$. L'application canonique de $E' \hat{\otimes}_p F$ dans $\mathfrak{D}_p(E, F)$ est isométrique.

Corollaire 2 : pour que u soit une application p-décomposable de E dans F ($1 \leq p < +\infty$) limite pour la norme δ_p d'applications de rang fini, il faut et il suffit que u s'exprime sous la forme :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) y_i \quad \text{avec :}$$

$y_i \in F$ et $N_p(y_i) < +\infty$, $\varphi_i \in C(\varepsilon'')$, (ε'' est la boule unité faible du bidual de E) et $M_p(\varphi_i) < +\infty$.

Si F est réflexif ou F' séparable et si de plus F' ou E' vérifient l'hypothèse d'approximation, on peut montrer que, si on note i l'injection canonique de F dans F'' , toute application p -décomposante u de E dans F est telle que iu s'identifie à un élément de $E' \hat{\otimes}_{d_p} F''$.

Remarque : puisque $d_p \leq d_p$, on retrouve le fait, qu'en général, $\mathfrak{L}_d^p(E, F) \subset \mathfrak{D}_p(E, F)$, (cf. Badrikian (1)).

Corollaire 3 : si $1 < p < +\infty$, on a :

$$\mathfrak{D}_p(E, L^p) \subset \Delta_p(E, L^p) \subset \mathfrak{L}_g^p(E, L^p) .$$

Corollaire 4 : soit $u \in \mathfrak{L}(L^{p'}, L^p)$, ($1 < p < +\infty$). Considérons les conditions :

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) u est p -nucléaire à gauche | 5) u est p -décomposée |
| 2) u est p -nucléaire à droite | 6) ${}^t u$ est p -décomposée |
| 3) u est p -sommante | 7) u est p -décomposante |
| 4) ${}^t u$ est p -sommante | 8) ${}^t u$ est p -décomposante. |

Alors ces huit conditions sont équivalentes.

L'équivalence entre 1) et 2) est de S. Chevet (2). L'équivalence entre 1), 3) et 5) est de Persson (6).

Théorème 4 : Soient E et G deux espaces de Banach tels que G soit isomorphe en tant qu'espace vectoriel topologique à un sous-espace M d'un espace de type L^p et u un élément de $\mathfrak{L}(E, G)$. On désigne par i l'injection canonique de M dans L^p et par A l'isomorphisme de G sur M . Alors, si iAu est p -décomposée, u est quasi p -nucléaire et l'on a :

$$\pi_p(u) \leq |A^{-1}| \Delta_p(iAu).$$

Théorème 5 : on fait sur G les mêmes hypothèse qu'au théorème 4. Alors, sur $E \otimes G$, on a : $g_p \leq |A^{-1}| |A| / d_p$.

Corollaire : $\mathfrak{D}_p(E, G) \subset N_p^Q(E, G)$.

Théorème 6 : soit H un espace de Hilbert. Alors, pour tout p tel que $1 \leq p < +\infty$, il existe une constante $\lambda_p > 0$, telle que sur $E \otimes H$, on ait : $\mathfrak{g}_1 \setminus \leq \lambda_p / \mathfrak{d}_p$. De plus : $\mathfrak{D}_p(E, H) \subset \widehat{E} \otimes_{\mathfrak{g}_1} H$.

Théorème 7 : on fait sur G les mêmes hypothèses qu'au théorème 4 avec de plus $1 < p < 2$. Alors, pour tout r tel que $1 \leq r < p$, il existe une constante $\mu_r > 0$, telle que sur $E \otimes G$, on ait : $\mathfrak{g}_1 \setminus \leq \mu_r / \mathfrak{d}_r$. De plus, $\mathfrak{D}_r(E, G) \subset N_1^0(E, G)$.

4. Applications

Dans ce paragraphe, L désigne un espace de type \underline{L}^1 , H un espace de Hilbert, C un espace de type \underline{C} , L^p un espace de type \underline{L}^p . A partir des théorèmes précédents, on peut obtenir les résultats suivants :

- $\mathfrak{L}(L, L^p) = I_q(L, L^p) = \pi_q(L, L^p)$ pour $2 < p < +\infty$ et $p < q \leq +\infty$ (on désigne par $I_q(L, L^p)$ l'ensemble des applications q-intégrales de L dans L^p , cf. (5) ou (9)),
- $\mathcal{C}(L, L^p) = \mathfrak{L}_g^q(L, L^p)$, pour $2 < p < +\infty$ (on désigne par $\mathcal{C}(L, L^p)$ l'ensemble des applications compactes de L dans L^p),
- $\mathfrak{D}_q(C, L^p) \subset \mathfrak{L}_g^1(C, L^p)$ pour $1 < p < 2$ et $1 \leq q < p$,
- $\pi_q(L^p, E) = \pi_1(L^p, E) \subset \mathfrak{D}_1(L^p, E)$ pour $2 < p < +\infty$ et $1 \leq q < p'$,
- $\mathfrak{L}(L, H) = I_q(L, H)$, $1 < q \leq +\infty$. - $\mathcal{C}(L, H) = \mathfrak{L}_g^q(L, H)$, $1 < q \leq +\infty$

- (1) A. Badrikian : Comptes Rendus, t 265, 1967, p.662-664.
- (2) S. Chevet : Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. geb. 11, 1969, p.120-138.
- (3) A. Grothendieck : Mem. of the Amer. Soc. (1955).
- (4) S. Kwapien : On a theorem of Laurent Schwartz and its applications to absolutely summing operators (à paraître).
- (5) A. Pietsch, A. Persson : Studia Math. t 33, 1969, p.19-62.
- (6) A. Persson : Studia Math., 1969. p. 213.
- (7) P. Saphar : Comptes Rendus, t 266, 1968, p.526-528.
- (8) Comptes Rendus, t 266, 1968, p.809-811.
- (9) Comptes Rendus, t 268, 1969, p.528-531.
- (10) Studia Math., 1970, (à paraître).
- (11) L. Schwartz : Séminaire de l'Ecole Polytechnique, 1969-1970, Paris.
- (12) Comptes Rendus, t 268, 1969, p.1410-1413.
- (13) A. Pietsch : Studia Math., 28, 1967, p.333-353.

