

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. ASSOUD

Les applications $(\Phi - 0)$ -sommantes et $(\Phi - 0)$ -radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 27 bis, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970__A32_0

© Séminaire Laurent Schwartz
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

LES APPLICATIONS $(\phi-0)$ -SOMMANTES ET $(\phi-0)$ -RADONIFIANTES

par P. ASSOUD

Exposé N° 27 bis

On généralise les résultats de L. Schwartz relatifs aux applications p-radonifiantes en remplaçant les fonctions $t \rightarrow t^p$ par des fonctions d'Orlicz quelconques.

Les applications $(\Phi-0)$ -sommantes et $(\Phi-0)$ -radonifiantes

Soit $\Phi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ convexe et telle que $\Phi(t) = t \ \forall t \in [0, 1]$.
On pose $\Phi(\infty) = \infty$.

Soit K un compact, ν une probabilité sur K , l'espace d'Orlicz $L_\Phi(K, \nu)$ est l'espace des fonctions $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a > 0$ avec $\int_K \Phi\left(\frac{|f(t)|}{a}\right) \nu(dt) < +\infty$. Muni de la norme $\|f\|_{\Phi, \nu} = \inf \{a \mid \int_K \Phi\left(\frac{|f(t)|}{a}\right) \nu(dt) \leq 1\}$, c'est un espace de Banach.

Si μ est une probabilité sur $[0, \infty]$, on pose

$$\|\mu\|_{\Phi} = \inf \left\{ a \mid \int_{[0, \infty]} \Phi\left(\frac{t}{a}\right) \mu(dt) \leq 1 \right\}$$

$\|\cdot\|_{\Phi}$ est un poids homogène compact (cf. [1]).

Soient E, F des Banach et T linéaire $E \rightarrow F$.

Soit B la boule unité de E' munie de la topologie $\sigma(E', E)$.

Définition 1 : T est $(\Phi-0)$ -sommante si $\forall p > 1 \ \exists r > 0$ tel que $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \ \forall x_1, \dots, x_n \in E$

$$\sup_{\xi \in B} \sum \lambda_i \Phi(|\langle x_i, \xi \rangle|) \leq \sum \lambda_i \Rightarrow \sum \lambda_i p \wedge \frac{\|Tx_i\|}{r} \leq \sum \lambda_i .$$

Définition 2 : T est $(\Phi-0)$ -radonifiante si $\forall p > 1 \ \exists r > 0$ tel que $\forall \lambda$ mesure cylindrique ≥ 0 sur E

$$\sup_{\xi \in B} \int_{\mathbb{R}} \Phi(|t|) \xi(\lambda)(dt) \leq \lambda(1) \Rightarrow T\lambda \text{ est de Radon sur } F \text{ et}$$

$$\int_F p \wedge \frac{\|y\|}{r} T \lambda(dy) \leq \lambda(1) .$$

Remarque : Les deux définitions ne font intervenir que le dual de E. Pour la définition 2. F doit être muni d'une topologie, mais celle-ci peut être différente de la topologie forte de F.

Définition 3 : Soit λ une mesure cylindrique sur E, $|\xi(\lambda)|$ l'image de $\xi(\lambda)$ par $t \rightarrow |t|$, on dit que λ est de type Φ si $\sup_{\xi \in B} \|\xi(\lambda)\|_{\Phi} < +\infty$.

Enfin rappelons la notation suivante (cf. [1]).

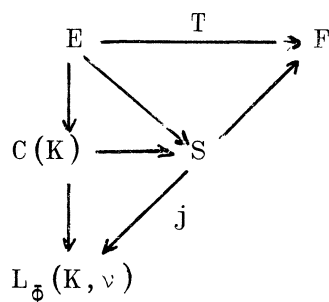
Soit E un Banach. On dit que le couple (E, E') vérifie la propriété d'approximation métrique si l'application identique de E' est limite simple d'applications ^{linéaires} de rang fini. de norme ≤ 1 , continues sur $\sigma(E', E)$.

Proposition : Soient E, F des Banach, (E, E') vérifie la propriété d'approximation métrique. Soit T linéaire $E \rightarrow F$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) T est $(\Phi-0)$ -sommante ;
- 2) $\exists \rho > 0, \exists \mu$ probabilité sur B tels que

$$\forall x \in E \quad \|Tx\| \leq \rho \|x\|_{\Phi, \mu}$$

- 3) $\exists K$ compact, $\exists \nu$ probabilité sur K tels que T se factorise de la manière suivante :



où S est un sous-espace fermé de $L_{\Phi}(K, \nu)$ muni de la topologie induite et j est l'injection de S dans $L_{\Phi}(K, \nu)$.

- 4) T est $(\Phi-0)$ -radonifiante de E dans $\sigma(F'', F')$.
- 5) T transforme toute mesure cylindrique de type Φ sur E en une mesure de Radon sur $\sigma(F'', F')$.

Définition 1 : Soit λ une mesure cylindrique sur E (Banach). λ est de cotype Φ si $\inf_{\|\xi\| \geq 1} \|\lambda(\xi)\|_{\Phi} > 0$.

Proposition 2 : Soit $T: E \rightarrow F$ linéaire continue (E, F Banach). Soit γ mesure cylindrique sur F' , de cotype Φ . On suppose que ${}^t T \gamma$ est de Radon. Alors T est $(\Phi-0)$ -sommante.

[1] Séminaire Schwartz 1969-1970.
