P. ASSOUAD

Les applications $(\Phi - 0)$-sommantes et $(\Phi - 0)$-radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 27 bis, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A32_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE L. SCHWARTZ 1969-1970

LES APPLICATIONS (Φ-0)-SOMMANTES ET (Φ-0)-RADONIFIANTES

par P. ASSOUAD

Exposé N° 27 bis

On généralise les résultats de L. Schwartz relatifs aux applications p-radonifiantes en remplaçant les fonctions $t \to t^p$ par des fonctions d'Orlicz quelconques.

Les applications $(\Phi\text{-}0)$-sommantes et $(\Phi\text{-}0)$-radonifiantes

Soit $\Phi : [0,\infty[\to [0,\infty[$ convexe et telle que $\Phi(t) = t \ \forall\ t \in [0,1]$. On pose $\Phi(\infty) = \infty$.

Soit K un compact, ν une probabilité sur K, l'espace d'Orlicz $L_\Phi(K,\nu)$ est l'espace des fonctions $f : K \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a > 0$ avec $\int_K \Phi\left(\frac{|f(t)|}{a}\right) \nu(dt) < +\infty$. Muni de la norme $\|f\|_{\Phi,\nu} = \inf \{a \mid \int_K \Phi\left(\frac{|f(t)|}{a}\right)\nu(dt) \le 1\}$, c'est un espace de Banach.

Si μ est une probabilité sur $[0,\infty]$, on pose

$$\|\mu\|_\Phi = \inf \{a \mid \int_{[0,\infty]} \Phi\left(\frac{t}{a}\right) \mu(dt) \le 1 \}$$

$\| \ \|_\Phi$ est un poids homogène compact (cf.[1]).

Soient E, F des Banach et T linéaire $E \to F$.

Soit B la boule unité de E' munie de la topologie $\sigma(E',E)$.

<u>Définition 1</u> : T est $(\Phi\text{-}0)$-sommante si $\forall\ p > 1\ \exists\ r > 0$ tel que $\forall\ \lambda_1,\dots,\lambda_n \ge 0 \quad \forall\ x_1,\dots,x_n \in E$

$$\sup_{\xi\in B} \Sigma\, \lambda_i\ \Phi(|\langle x_i,\xi\rangle|) \le \Sigma\, \lambda_i \Rightarrow \Sigma\, \lambda_i\ p \wedge \frac{\|Tx_i\|}{r} \le \Sigma\, \lambda_i\ .$$

<u>Définition 2</u> : T est $(\Phi\text{-}0)$-radonifiante si $\forall\ p > 1\ \exists\ r > 0$ tel que $\forall\ \lambda$ mesure cylindrique ≥ 0 sur E

$$\sup_{\xi\in B} \int_{\mathbb{R}} \Phi(|t|)\xi(\lambda)(dt) \le \lambda(1) \Rightarrow T\lambda \text{ est de Radon sur F et}$$

$$\int_F p \wedge \frac{\|y\|}{r}\, T\lambda\,(dy) < \lambda(1) \ .$$

<u>Remarque</u> : Les deux définitions ne font intervenir que le dual de E. Pour la définition 2. F doit être muni d'une topologie, mais celle-ci peut être différente de la topologie forte de F.

<u>Définition 3</u> : Soit λ une mesure cylindrique sur E, $|\xi(\lambda)|$ l'image de $\xi(\lambda)$ par $t \to |t|$, on dit que λ est de type Φ si $\sup\limits_{\xi \in B} \| \, |\xi(\lambda)| \, \|_{\Phi} < +\infty$.

Enfin rappelons la notation suivante (cf. [1]).

Soit E un Banach. On dit que le couple (E,E') vérifie la propriété d'approximation métrique si l'application identique de E' est limite simple d'applications linéaires de rang fini. de norme ≤ 1 , continues sur $\sigma(E',E)$.

<u>Proposition</u> : Soient E, F des Banach, (E,E') vérifie la propriété d'approximation métrique. Soit T linéaire $E \to F$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) T est $(\Phi\text{-}0)$-sommante ;
2) $\exists\, \rho > 0$, $\exists\, \mu$ probabilité sur B tels que

$$\forall\, x \in E \qquad \|Tx\| \leq \rho\, \| \langle x, \cdot \rangle \|_{\Phi,\mu}$$

3) $\exists$ K compact, $\exists\, \nu$ probabilité sur K tels que T se factorise de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "T"] \arrow[d] \arrow[dr] & & F \\
C(K) \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[ur] \arrow[dl, "j"] & \\
L_{\Phi}(K,\nu) & &
\end{tikzcd}$$

où S est un sous-espace fermé de $L_\Phi(K,\nu)$ muni de la topologie induite et j est l'injection de S dans $L_\Phi(K,\nu)$.

4) T est (Φ-0)-radonifiante de E dans $\sigma(F'',F')$.

5) T transforme toute mesure cylindrique de type Φ sur E en une mesure de Radon sur $\sigma(F'',F')$.

Définition 1 : Soit λ une mesure cylindrique sur E (Banach). λ est de cotype Φ si $\inf_{\|\xi\|\geq 1} \| |\xi(\cdot)| \|_\Phi > 0$.

Proposition 2 : Soit $T : E \to F$ linéaire continue (E,F Banach). Soit γ mesure cylindrique sur F', de cotype Φ. On suppose que ${}^tT\gamma$ est de Radon. Alors T est (Φ-0)-sommante.

[1] Séminaire Schwartz 1969-1970.
