

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. ASSOUD

**Le mouvement brownien sur  $[0, 1]$ . Applications  $\Phi$ -sommantes et  $(\Phi, \Psi)$ -sommantes**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1969-1970), exp. n° 27, p. 1-11

<[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1969-1970\\_\\_\\_A31\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970___A31_0)>

© Séminaire Maurey-Schwartz  
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77  
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

LE MOUVEMENT BROWNIEN SUR  $[0,1]$

-----

APPLICATIONS  $\Phi$ -SOMMANTES ET  $(\Phi, \Psi)$ -SOMMANTES

-----

par P. ASSOUD

Exposé N<sup>o</sup> 27

8 Juin 1970



LE MOUVEMENT BROWNIEN SUR [0,1]

Tous les espaces utilisés ( $L_p$  et Sobolev) sont rapportés à  $[0,1]$ , le signe . spécifie qu'il s'agit du sous-espace des fonctions nulles en 0.

En particulier  $L_2 = L_2([0,1]), dx$ ,  $C$  (espace des fonctions continues sur  $[0,1]$ ),  $H_1 = \{f | f' \in L_2\}$  muni de la norme

$$\|f\|_{H_1}^2 = \|f\|_{L_2}^2 + \|f'\|_{L_2}^2 .$$

On sait que  $H_1 \subset C$  et que l'injection est continue, donc  $\varepsilon_t : f \rightarrow f(t)$  appartient à  $H_1'$ .

Soit  $P : L_2 \rightarrow H_1$  l'application définie par  $Pf(t) = \int_0^t f(s) ds$ .  $P$  est continue car  $\|Pf\|_{L_2} \leq \|I_{[0,1]}\|_{L_1} \|f\|_{L_2}$ . De plus  ${}^t P \varepsilon_t = I_{[0,t]}$  et  ${}^t P \varepsilon_0 = 0$ .

1) La mesure cylindrique du mouvement brownien

Soit  $\lambda = P\gamma$  où  $\gamma$  est la mesure cylindrique gaussienne canonique de  $L_2$ .  $\lambda$  est une mesure cylindrique gaussienne sur  $H$ . De plus :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^2 (\varepsilon_t - \varepsilon_s)(\lambda)(dx) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 ({}^t P(\varepsilon_t - \varepsilon_s))(\gamma)(dx) \\ &= \|{}^t P(\varepsilon_t - \varepsilon_s)\|_{L_2}^2 = |t-s| \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \varepsilon_0(\lambda)(dx) = \int_{\mathbb{R}} x^2 {}^t P(\varepsilon_0)(\gamma)(dx) = \|{}^t P \varepsilon_0\|_{L_2}^2 = 0 .$$

2) La réalisation du mouvement brownien

Soit  $p > 4$  et  $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{2}{p}$ . Soit  $C_\alpha$  l'espace des fonctions lipschitziennes d'ordre  $\alpha$  sur  $[0,1]$  muni de la norme

$$\|f\|_{C^\alpha}^p = \|f\|_\infty^p + \left( \sup_{x,y \in [0,1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \right)^p .$$

Pour tout  $\beta > 0$  soit  $D_{-\beta} = \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} I[0,1]$ . On a de façon évidente :

$$D_{-\beta} \in L^{q'} \Leftrightarrow \beta > \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad \|D_{-\beta}\|_{q'} = \frac{1}{\Gamma(\beta)[q'(\beta-1)+1]^{\frac{1}{q'}}$$

Soit  $D_1$  l'inverse de  $P$ . De plus  $D_{-p}$  est un semi-groupe.

Proposition 1 :  $H_1 \in C_\alpha$ , l'injection  $j_\alpha$  est p-sommante. De plus soit  $K > \frac{12\sqrt{e}}{\pi}$ ,  $j_\alpha \lambda$  est de Radon sur  $C_\alpha$  et (dès que  $p$  est assez grand)  
 $\|j_\alpha \lambda\|_p^p \leq K^p p$  !

Soit  $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ . On factorise l'injection de  $H$  dans  $C^\alpha$  par :

$$H_1 \xrightarrow{\frac{u_1}{D_1}} L^2 \xrightarrow{\frac{u_2}{D_{\gamma-1}}} L^\infty \xrightarrow{\text{injection } u_3} L^p \xrightarrow{\frac{u_4}{D_{\alpha-\gamma}}} L^\infty \xrightarrow{\frac{u_5}{D-\alpha}} C^\alpha$$

on a alors les majorations suivantes, valables dès que  $p$  est assez grand :

①  $u_1(\lambda) = \gamma$  et  $\|\gamma\|_p^{*p} = \pi^{-1/2} 2^{p/2} \Gamma(\frac{p+1}{2}) \leq K_1^p p^{p/2}$   
 avec  $K_1 > \frac{1}{\sqrt{e}}$  arbitraire.

②  $\|u_2\| = \|D_{\gamma-1}\|_{L^2} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2p})(\frac{1}{p})^{\frac{1}{2}}} \leq K_2 p^{\frac{1}{2}}$

avec  $K_2 > \frac{1}{\sqrt{\pi}}$  arbitraire.

③  $u_3$  est p-sommante et  $\pi_p(u_3) = 1$

④  $\|u_4\| = \|D_{\alpha-j}\|_{p'} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2p})(\frac{p'}{2p})^{\frac{1}{p'}}} \leq K_4$

avec  $K_4 > 3$  arbitraire.

⑤ Il s'agit d'évaluer  $\|u_5\|$ . Soit  $f \in L_\infty$ ; on a alors :  $(x < y)$

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) |D_{-\alpha} f(x) - D_{-\alpha} f(y)| &= \left| \int_0^1 [(x-t)^{\alpha-1} - (y-t)^{\alpha-1}] f(t) dt \right| \\ &\leq \|f\|_{L^\infty} \left( \int_0^x t^{\alpha-1} dt - \int_{y-x}^y t^{\alpha-1} dt + \int_0^{y-x} t^{\alpha-1} dt \right) \\ &\leq \frac{|x-y|^\alpha}{\alpha} \|f\|_{L^\infty} \left[ 2 - \frac{y^\alpha - x^\alpha}{(y-x)^\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Donc  $\|u_5\| \leq [\|D_{-\alpha}\|_{L_1}^p + (\frac{2}{\alpha\Gamma(\alpha)})^p]^{1/p} = \frac{(1+2^p)^{1/p}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \leq K_5$  avec  $K_5 > \frac{4}{\sqrt{\pi}}$  arbitraire.

Donc  $j_\alpha$  est p-sommante,  $j_\alpha^\lambda$  est de Radon sur  $C^\alpha$  car  $p \in ]1, \infty[$ .

Enfin, pour p assez grand, on a :

$$\|j_\alpha^\lambda\|_p^p \leq (K_1 K_2 K_4 K_5)^p \left(\frac{p}{e}\right)^p e^p$$

d'où le résultat puisque  $p! \sim \left(\frac{p}{e}\right)^p \sqrt{2\pi p}$ .

Proposition 2 : Soit  $\mu$  l'image de  $\lambda$  par l'injection de  $H_1$  dans  $C$ ,  $\mu$  est une mesure de Radon sur  $C$ . De plus  $\mu$  est gaussienne,

$$\int_C |f(t) - f(s)|^2 \mu(df) = |t-s|, f(0) = 0 \mu - p.p.$$

Enfin  $\limsup_{s \rightarrow 0} \sup_{t, t+s \in [0, 1]} \frac{|f(t+s) - f(t)|}{\sqrt{|s|} \text{Log} \frac{1}{|s|}} \leq \frac{24/e}{\pi} \mu - p.p.$

En effet, l'injection de  $H_1$  dans  $C$  se factorise par  $H_1 \rightarrow C^\alpha \rightarrow C$ . Les trois premières propriétés proviennent des propriétés correspondantes de  $\lambda$ .

Enfin soit  $K > \frac{12\sqrt{e}}{\pi}$ ; alors, dès que p est assez grand, on a :  $(\alpha = \frac{1}{2} - \frac{2}{p})$

$$\int_C \left[ \|f\|_{L^\infty}^p + \sup_{t, t+s \in [0, 1]} \left( \frac{|f(t+s) - f(t)|}{\sqrt{|s|}} \right)^p |s|^2 \right] \mu(df) \leq K^p p!$$

(en effet,  $C^\alpha$  est  $\mu$ -mesurable et  $\|\cdot\|_{C^\alpha}^p$  est continu sur  $C^\alpha$ ):

Donc

$$\int_C \left[ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(K+\varepsilon)^p p!} \sup_{t, t+s \in [0, 1]} \left( \frac{|f(t+s) - f(t)|}{\sqrt{|s|}} \right)^p |s|^2 \right] \mu(df) < \infty.$$

Donc  $\sup_{t, t+s \in [0, 1]} (|s|^2 \exp \frac{|f(t+s)-f(t)|}{(K+\varepsilon) \sqrt{|s|}})$  est  $\mu$ -intégrable, donc fini

$\mu$ -p.p. . Donc pour  $\mu$ -presque tout  $f$  , il existe  $M < \infty$  tel que

$$t, t+s \in [0, 1] \Rightarrow \frac{|f(t+s)-f(t)|}{(K+\varepsilon) \sqrt{|s|}} \leq \text{Log } M + 2 \text{Log} \frac{1}{|s|} ,$$

c'est-à-dire

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \sup_{t, t+s \in [0, 1]} \frac{|f(t+s)-f(t)|}{\sqrt{|s|} \text{Log} \frac{1}{|s|}} \ll 2(K+\varepsilon) \quad \mu\text{-p.p.}$$

d'où le résultat .

Remarque : les résultats classiques sont meilleurs, puisqu'on peut prendre en particulier  $\sqrt{\text{Log} \frac{1}{|s|}}$  au lieu de  $\text{Log} \frac{1}{|s|}$  , mais il faut remarquer qu'on s'est servi exclusivement des moments de  $\lambda$ .

#### APPLICATIONS $\Phi$ -SOMMANTES ET $(\Phi, \Psi)$ -SOMMANTES

##### 1) L'inégalité de Pietsch

Soit  $E, F, B$  des ensembles.

On distingue dans  $E$  et dans  $F$  un élément noté  $0$ .

Soit  $(x, \xi) \rightarrow \langle x, \xi \rangle$  une application  $E \times B \rightarrow \mathbb{R}$  .

Soit  $y \rightarrow \|y\|$  une application  $F \rightarrow [0, \infty]$ . On suppose que :  $\|0\| = 0$ ,  $\langle 0, \xi \rangle = 0$   
 $\forall \xi \in B$ ,  $(\langle x, \xi \rangle)_{\xi \in B}$  est borné  $\forall x \in E$ . On pose alors  $\|x\| = \sup_{\xi \in B} |\langle x, \xi \rangle|$ .

Soient  $\Phi, \Psi$  deux fonctions  $[0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$

$$\Phi(t) = \Psi(t) = t \quad \text{pour } t \in [0, 1], \quad \Phi \text{ croissante.}$$

Définition : Soit  $T : E \rightarrow F$ ,  $T(0) = 0$ ;  $T$  est  $(\Phi, \Psi)$ -sommante s'il existe  $\rho > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ ,  $\forall x_1, \dots, x_n \in E$

$$\sup_{\xi \in B} \sum \lambda_i \Phi(|\langle x_i, \xi \rangle|) \leq \sum \lambda_i \Rightarrow \sum \lambda_i \Psi\left(\frac{\|Tx_i\|}{\rho}\right) \leq \sum \lambda_i .$$

Proposition 1 :  $T$  ( $\Phi, \Psi$ )-sommante  $\Leftrightarrow \exists r > 0, \exists \alpha \in [0, 1], \exists \mu$  forme linéaire continue sur  $\mathfrak{B}(B)$  (avec  $\mu(1) = 1, f \geq 0 \Rightarrow \mu(f) \geq 0$ ) tels que :

$$\Psi\left(\frac{\|Tx\|}{r}\right) \leq (1-\alpha) + \alpha \int_B \Phi(|\langle x, \xi \rangle|) \mu(d\xi) \quad \forall x \in E.$$

Démonstration :  $\Leftarrow$  est évident.

$\Rightarrow$  utilisera deux lemmes.

Les fonctions  $\xi \rightarrow \sum \lambda_i \Phi(|\langle x_i, \xi \rangle|) - \sum \lambda_i$  telles que  $\sum \lambda_i \Psi\left(\frac{\|Tx_i\|}{\rho}\right) - \sum \lambda_i > 0$  forment un convexe  $\mathcal{C}$  inclus dans  $\mathfrak{B}(B)$ . De plus, si  $g \in \mathcal{C}, \exists \xi \in B$  tel que  $g(\xi) > 0$ .

On démontre donc le

Lemme 1 (Cartier) : Soit  $\mathcal{C}$  un cône convexe  $\subset \mathfrak{B}(B)$  tel que  $\forall g \in \mathcal{C}, \exists \xi \in B, g(\xi) \geq 0$ . Alors il existe  $\mu$  forme linéaire continue sur  $\mathfrak{B}(B)$  telle que  $\mu(1) = 1, f \geq 0 \Rightarrow \mu(f) \geq 0, g \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu(g) \geq 0$ .

Démonstration :  $f \rightarrow p(f) = \inf_{g \in \mathcal{C}} \sup_{\xi \in B} [f(\xi) + g(\xi)]$  est une fonction sous

linéaire sur  $\mathfrak{B}(B)$ . Donc il existe  $\mu$  forme linéaire continue sur  $\mathfrak{B}(B)$  telle que  $\mu(f) \leq p(f) \quad \forall f \in \mathfrak{B}(B)$  (Hahn-Banach). Or  $\inf_{\xi \in B} f(\xi) \leq \sup_{\xi \in B} f(\xi)$  et  $p(-g) \leq 0 \quad \forall g \in \mathcal{C}$ .

Donc  $\mu$  répond à la question et le lemme 1 est démontré.

On a donc

$$\sum \lambda_i \left[ \int_B \Phi(|\langle x_i, \xi \rangle|) \mu(d\xi) - 1 \right] < 0 \Rightarrow \sum \lambda_i \left[ \Psi\left(\frac{\|Tx_i\|}{\rho}\right) - 1 \right] \leq 0 ;$$

de plus

$$\int_B \Phi(|\langle 0, \xi \rangle|) \mu(d\xi) - 1 = -1 < 0.$$

On conclut en démontrant le lemme suivant :



Lemme 2 : Soit  $x \rightarrow A(x)$ ,  $x \rightarrow B(x)$  des fonctions numériques sur  $E$ , on suppose que  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \quad \forall x_1, \dots, x_n \in E$

$$\sum \lambda_i A(x_i) < 0 \Rightarrow \sum \lambda_i B(x_i) \leq 0$$

et qu'il existe  $x_0 \in E$  tel que  $A(x_0) < 0$ .

Alors  $\exists \alpha \geq 0$  tel que  $B(x) \leq \alpha A(x) \quad \forall x \in E$ .

Démonstration : D'abord  $A(x) \leq 0 \Rightarrow B(x) \leq 0$ . C'est clair si  $A(x) < 0$  ; si  $A(x) = 0$ , soit  $A(x_0) < 0$ ; alors,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon A(x_0) + A(x) < 0$ , donc  $\varepsilon B(x_0) + B(x) \leq 0$ , donc  $B(x) \leq 0$ .  
Supposons qu'il existe  $x$  tel que  $A(x) > 0$ ,  $B(x) > 0$  (sinon on prend  $\alpha = 0$ ); on pose  $\alpha = \sup_{A(x) > 0} \frac{B(x)}{A(x)}$ . Soit  $x_0$  tel que  $A(x_0) < 0$ ; alors

$$A(x)A(x_0) + [-A(x_0)]A(x) = 0 \quad , \quad \text{donc, } \forall \varepsilon > 0,$$

$$[A(x) + \varepsilon]B(x_0) + [-A(x_0)]B(x) \leq 0 \quad ,$$

donc  $A(x)B(x_0) - A(x_0)B(x) \leq 0$ , donc  $\frac{B(x_0)}{A(x_0)} \geq \frac{B(x)}{A(x)}$ , ce qui prouve que  $\alpha$  est

fini et que :

$$B(x_0) \leq \alpha A(x_0), \text{ qui est clairement vrai dans tous les cas.}$$

Le lemme 2 est démontré, la proposition 1 aussi en remarquant que  $x = 0$  impose  $1 - \alpha \geq 0$  donc  $\alpha \in [0, 1]$ .

Remarques : 1) Supposons  $B$  complètement régulier,  $\xi \rightarrow \langle x, \xi \rangle$  continu  $\forall x$ . Alors  $\mu$  sera une mesure de Radon sur  $B$ , si,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists g \in \mathcal{C}$ ,  $\exists K$  compact tels que  $g + I_K \leq \varepsilon$ . (Cette condition exprimant que  $\mu(I_K) \leq \varepsilon$ ).

2) La condition précédente est inutile (elle est d'ailleurs réalisée) si  $B$  est compact.  $\mu$  est alors une probabilité sur  $B$ .

Désormais on prendra :

$E$  un espace normé (soit  $\hat{E}$  son complété)

$B$  la boule unité de  $E'$  munie de la topologie  $\sigma(E', \hat{E})$  (donc compacté).

$(x, \xi) \rightarrow \langle x, \xi \rangle$  la forme bilinéaire de dualité.

## 2) Un exemple d'application $\Phi$ - $\Psi$ sommante

Soit  $K$  un compact, on prend  $E = C(K)$  et  $\Phi$  convexe, démontrons d'abord le

Lemme : Soit  $T : C(K) \rightarrow F$ ; alors  $T(\Phi, \Psi)$ -sommante  $\Leftrightarrow \exists r > 0, \exists \alpha \in [0, 1], \exists \mu$  probabilité sur  $K$ , tels que  $\Psi\left(\frac{\|Tf\|}{r}\right) \leq (1-\alpha) + \alpha \int_K \Phi(|f(t)|) \mu(dt)$ .

En effet, soit  $\xi \rightarrow \sum \lambda_i \Phi(|\langle f_i, \xi \rangle|) - \sum \lambda_i$  un élément de  $\mathcal{C}$ , alors  $\exists \xi_0$  mesure sur  $K$  telle que

$$\sum \lambda_i \Phi(|\langle f_i, \xi_0 \rangle|) - \sum \lambda_i > 0 ;$$

quitte à remplacer  $\xi_0$  par  $\frac{|\xi_0|}{|\xi_0|(1)}$  on peut supposer que  $\xi_0$  est une proba-

bilité. Donc il existe  $t \in K$  tel que  $\sum \lambda_i \Phi(|f_i(t)|) - \sum \lambda_i > 0$ . Sinon on aurait :

$$\sum \lambda_i \Phi(|\langle f_i, \xi \rangle|) < \sum \lambda_i \int_K \Phi(|f_i(t)|) \xi_0(dt) \leq \sum \lambda_i .$$

On peut alors écrire la proposition 1 en remplaçant  $B$  par  $K$ , d'où le résultat.

Soit  $\nu$  une probabilité diffuse sur  $K$  et  $\theta$  une fonction continue croissante de  $[0, \infty[$  telle que  $\theta(t) = t$  sur  $[0, 1]$ ,  $\theta(\infty) = \infty$ . On fait sur  $\Psi$  les mêmes hypothèses que sur  $\theta$ .

$L_\theta(K, \nu)$  désigne un espace vectoriel inclus dans  $L_0(K, \nu)$  et contenant  $C(K)$ ; pour  $f \in \theta$  on pose :

$$\|f\|_\theta = \text{Inf}\{a \mid \int_K \theta\left(\frac{|f(t)|}{a}\right) \nu(dt) \leq 1\} .$$

On prend  $F = L_\theta$  muni de  $\|\cdot\|_\theta$  et  $T$  désigne l'injection de  $C(K)$  dans  $L_\theta$ .  
Sous ces hypothèses on a la :

**Proposition 3** : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1)  $\exists \alpha \in ]0, 1]$ ,  $\exists r > 1$  tels que pour tout  $f \in C(K)$

$$\Psi\left(\frac{\|f\|_\theta}{r}\right) \leq (1-\alpha) + \alpha \int_K \Phi(|f(t)|) \nu(dt)$$

(2) l'injection  $C(K) \rightarrow L_\theta(K, \nu)$  est  $\Phi$ - $\Psi$  sommante

(3)  $\exists \beta \in ]0, 1]$ ,  $\exists k > 1$  tels que, pour tout  $u \geq 0$ ,  $v \geq 1$ ,

$$\Psi(u)\theta(v) \leq (1-\beta)\theta(v) + \beta\Phi(kuv)$$

ainsi que (1)', (2)', (3)' déduites des précédentes en échangeant  $\Psi$  et  $\theta$ .

**Démonstration** : (1)  $\Rightarrow$  (2) est évident.

(2)  $\Rightarrow$  (3); en effet  $\exists \alpha \in ]0, 1]$ ,  $\exists r > 1$ ,  $\exists \mu$  probabilité sur  $K$  telle que, pour tout  $f \in C(K)$ ,

$$\Psi\left(\frac{\|f\|_\theta}{r}\right) \leq (1-\alpha) + \alpha \int_K \Phi(|f(t)|) \mu(dt);$$

cette inégalité s'étend à  $f$  borélienne bornée.

On prend donc  $f = xI_A$ ,  $x > 0$ , on trouve  $\|f\|_\theta = \frac{x}{\theta^{-1}\left(\frac{1}{\nu(A)}\right)}$ , d'où

$$\Psi\left(\frac{x}{r\theta^{-1}\left(\frac{1}{\nu(A)}\right)}\right) \leq (1-\alpha) + \alpha \Phi(x)\mu(A) . \quad (i)$$

Soit  $D_1, D_2$  la décomposition de Jordan de  $\mu - \nu$ ,  $D_1$  portant  $(\mu - \nu)^-$ . On a  $\nu(D_1) = m > 0$  car sinon  $\mu(D_1) = \nu(D_1) = 0$  donc  $\mu = \nu$ . Soit alors  $u \geq 0, v \geq 1, k = r \theta^{-1}(\frac{1}{m}), \beta = \alpha$ , on écrit (i) avec  $A \subset D_1, \theta^{-1}(\frac{1}{\nu(A)}) = v \theta^{-1}(\frac{1}{m})$  ( $\nu$  est diffuse) et  $x = k u v$ . On a donc  $\mu(A) \leq \nu(A) \leq \frac{1}{\theta(v)}$  et on trouve

$$\Psi(u) \leq (1-\beta) + \beta \frac{\Phi(kuv)}{\theta(v)},$$

d'où le résultat.

(3)  $\Rightarrow$  (1)', on prend  $\theta(\alpha) \leq 1-\alpha$  et  $r = \frac{k}{\alpha}$ ;

si  $\|f\|_{\Psi} \leq k$ , alors  $\theta(\frac{\|f\|}{r} \Psi) \leq \theta(\alpha) \leq 1-\alpha$

si  $\|f\|_{\Psi} \geq k$ , on écrit (3) avec  $u = \frac{|f(t)|}{\|f\|_{\Psi}}, v = \frac{\|f\|_{\Psi}}{k}$ , et on

intègre par rapport à  $\nu(dt)$ . On obtient alors :

$$\theta(v) \leq (1-\beta)\theta(v) + \beta \int_K \Phi(|f(t)|) \nu(dt)$$

d'où

$$\theta(\frac{\|f\|}{r} \Psi) \leq \alpha \theta(v) \leq \alpha \int_K \Phi(|f(t)|) \nu(dt),$$

d'où le résultat.

Enfin (1)'  $\Rightarrow$  (2)'  $\Rightarrow$  (3)'  $\Rightarrow$  (1) comme précédemment.

Remarques : 1) La démonstration de (3)  $\Rightarrow$  (1)', donc de (3)'  $\Rightarrow$  (1) montre qu'on peut modifier (1) de la manière suivante :

$\exists \alpha \in ]0, 1[, \exists r > 1$  tels que pour toute  $f \in C(K)$

$$\Psi(\frac{\|f\|}{r} \theta) \leq (1-\alpha) \bigvee [\alpha \int_K \Phi(|f(t)|) \nu(dt)].$$

Prenant alors  $\mu = \nu$  dans la démonstration de (2)  $\Rightarrow$  (3), on obtient :

$\exists \beta \in ]0, 1[, \exists k > 1$  tels que pour tout  $u \geq 0, v \geq 1$

$$\Psi(u)\theta(v) \leq (1-\beta)\theta(v) \bigvee \beta \Phi(kuv)$$

De plus on peut prendre  $\alpha$  et  $\beta$  arbitrairement petits.

2) une condition équivalente à (3) est :

(ii)  $\exists k_1 > 1 \exists \beta_1 \in ]0, 1[$  tels que, pour tout  $u \geq 1, v \geq 1,$

$$\Psi(u)\theta(v) \leq \beta_1 \theta(k_1 uv) \quad .$$

Démonstration : (3)  $\Rightarrow$  (ii), dans (3), on prend  $\beta < \frac{1}{2}$  .

Alors (3) entraîne  $\theta(v) \leq \Phi(kv) \forall v \geq 1$ , donc, sous la forme de la remarque 1)

$$\Psi(u)\theta(v) \leq (1-\beta)\Phi(kv) \vee \beta \Phi(kuv) \leq \beta \Phi(kuv)$$

(ii)  $\Rightarrow$  (3); on prend  $k_1$  assez grand pour que  $k_1^{\Psi^{-1}(1-\beta_1)} \geq 1$   
alors si  $u \leq \Psi^{-1}(1-\beta_1)$   $\Psi(u)\theta(v) \leq (1-\beta_1)\theta(v)$ ;

$$\text{si } u \geq 1 \quad \Psi(u)\theta(v) \leq \beta_1 \Phi(k_1 uv) \leq \beta_1 \Phi(k_1^2 uv);$$

$$\text{si } \Psi^{-1}(1-\beta_1) \leq u \leq 1, k_1 u \leq 1 ;$$

$$\text{donc } \Psi(u)\theta(v) \leq (1-\beta_1)\theta(v) + \beta_1 \theta(v)$$

$$\leq (1-\beta_1)\theta(v) + \beta_1 \theta(v) \Psi(k_1 u)$$

$$\leq (1-\beta_1)\theta(v) + \beta_1^2 \Phi(k_1^2 uv) \leq (1-\beta_1)\theta(v) + \beta_1 \Phi(k_1^2 uv) ,$$

d'ou le résultat avec  $\beta = \beta_1 \quad k = k_1^2$  .

3) Si  $\Phi = \Psi = \theta$  la condition (ii) est vérifiée pour  $\Phi = t^u$ ,  
 $e^{t^u-1}$ ,  $t^t$  mais non pour  $\Phi = t^u \text{Log } t$ .

3) Propriétés du poids  $\|\cdot\|_{\Phi}$  .  $\Phi$  convexe

On rappelle que  $\|\cdot\|_{\Phi} = \text{Inf} \{ a \mid \int_{\mathbb{R}} \Phi(\frac{|t|}{a}) \mu(dt) \leq 1 \}$ ;

$\|\cdot\|_{\Phi}$  est homogène

compact, car  $\int \Phi(\frac{|t|}{M}) \mu(dt) \leq 1 \Rightarrow \mu([M_{\Phi}^{-1}(\frac{1}{\epsilon}), \infty[) < \epsilon$  ,

donc plus fort que  $L_0$  ;

de plus  $\|\cdot\|_{\Phi} + \epsilon \leq \|\cdot\|_{\Phi} + \epsilon$  (car  $\epsilon = \|\epsilon\|_{\Phi, \nu}$ ).

On peut donc développer la théorie des application  $\Phi$ -sommantes et  $(\Phi, \Psi)$ -sommantes comme celle des  $p$ -sommantes.

On remarque que, si  $T : E \rightarrow F$  est linéaire continue ( $E, F$  normés),  $T$   $(\Phi, \Psi)$ -sommante  $\Leftrightarrow \exists \rho \geq 0$  tel que,  $\forall \lambda$  mesure à support fini sur  $E$ ,

$$\|T\lambda\|_{\Psi} \leq \rho \|\lambda\|_{\Phi}^* .$$

-----