

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. SCHWARTZ

Les applications O -radonifiantes dans les espaces de suites

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 26, p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970___A30_0>

© Séminaire Laurent Schwartz
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDiciS 11-77
(633)

S E M I N A I R E L . S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

LES APPLICATIONS 0-RADONIFIANTES DANS

LES ESPACES DE SUITES

§ 1. CONDITIONS POUR LE TYPE ET LE COTYPE DANS LES ESPACES DE SUITES

Soient $1 \leq s \leq +\infty$. Les notations sont les mêmes qu'à la fin de l'exposé XXV.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires scalaires, $X_n \in L^0(\Omega, \mu)$. Bien que, dans la propr. (XXVI,1;1), certaines d'entre elles puissent être nulles, on peut toujours se ramener au cas où aucune ne l'est. Supposons en outre toutes les X_n dans $L^p(\Omega, \mu)$. Appelons $l_{p,X}$ l'espace des suites $c \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ soit convergente dans $L^p(\Omega, \mu)$. Nous dirons que $c \in l_{p,X}$ converge vers 0 dans $l_{p,X}$, si $\sum_{n=0}^N c_n X_n$ converge vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$, uniformément pour $N \in \mathbb{N}$. Nous définissons ainsi $l_{p,X}$ comme un espace vectoriel topologique, séparé (parce que les X_n sont $\neq 0$) ; $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subset l_{p,X} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, avec des injections continues, $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est dense dans $l_{p,X}$, chaque $c \in l_{p,X}$ est limite de ses tronquées ; enfin, $L^p(\Omega, \mu)$ étant métrisable et complet, $l_{p,X}$ est métrisable et complet. Si $p > 0$, $l_{p,X}$ est quasi-normé ou normé, avec la quasi-norme ou norme

$$\|c\|_{l_{p,X}} = \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{n=0}^N c_n X_n \right\|_{L^p(\Omega, \mu)} .$$

Si $p = 0$, un système fondamental de jauges de la topologie est donné par les

$$J_{\alpha, l_{p,X}}(c) = \sup_{N \in \mathbb{N}} J_{\alpha} \left(\mu, \sum_{n=0}^N c_n X_n \right) .$$

Proposition (XXVI,1,;1) : Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires scalaires $X_n \in L^0(\Omega, \mu)$. Soit $1 \leq s \leq +\infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) X est de type (p, l^s) ;
- 2) Pour toute $c \in l^s$ (c^0 si $s = +\infty$), la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ est convergente (ou sommable $L^p(\Omega, \mu)$) ;
- 3) La probabilité λ_X sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, associée à X , est image, par l'injection canonique, d'une probabilité cylindrique de type p sur $l^{s'}$ ($\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$; prendre $\sigma(l^{\infty}, l^1)$ si $s = 1$, $\sigma(l^1, c^0)$ si $s = +\infty$).

Démonstration : On peut toujours se ramener au cas où les X_n sont non nulles, et chacune des conditions implique que les X_n soient toutes dans $L^p(\Omega, \mu)$, ce qui permet d'utiliser les considérations antérieures sur $l_{p,X}$. La propriété 1) signifie que $c \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ est continue de $(K^{(N)})_{1^s}$ ($K^{(N)}$ muni de la topologie induite par l^s) dans $L^p(\Omega, \mu)$; ou encore que l'injection canonique de $(K^{(N)})_{1^s}$ dans $l_{p,X}$ est continue (car, si c converge vers 0 dans $(K^{(N)})_{1^s}$ toutes ses suites partielles convergent uniformément vers 0 dans l^s). Cette injection doit donc se prolonger en une application linéaire continue, de l'adhérence de $K^{(N)}$ dans l^s , dans $l_{p,X}$ (complet), c-à-d. de l^s pour $s \neq +\infty$, de c^0 pour $s = +\infty$, dans $l_{p,X}$. Cette application prolongée doit en outre être compatible avec les injections $l^s \rightarrow K^{(N)}$, $l_{p,X} \rightarrow K^{(N)}$, donc cela signifie que $l^s \subset l_{p,X}$, avec une injection continue, l^s étant remplacé par c^0 si $s = +\infty$. Cela entraîne donc 2) : si $c \in l^s$ (ou c^0), $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ est une série convergente dans $L^p(\Omega, \mu)$; comme en outre toutes les permutées de c sont aussi dans l^s , elle est commutativement convergente, ou sommable. Inversement, 2) signifie que $l^s \subset l_{p,X}$; comme leurs injections dans $K^{(N)}$ sont continues, le théorème du graphe fermé dit que $l^s \rightarrow l_{p,X}$ est continue, donc a fortiori que $(K^{(N)})_{1^s} \rightarrow l_{p,X}$ est continue, ce qui est 1). Donc 1) et 2) sont équivalentes.

Dire qu'elles sont réalisées équivaut à dire que $c \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ est une application linéaire continue $\bar{X}$ de l^s (c^0 si $s = +\infty$) dans $L^p(\Omega, \mu)$, prolongeant X , application linéaire de $K^{(N)}$ dans $L^p(\Omega, \mu)$. En utilisant la prop. (VI,1;1), avec un espace E dont le dual soit $E' = l^s$ (ou c^0), soit $E = l^{s'}$ si $1 < s < +\infty$, $E = \sigma(l^\infty, l^1)$ si $s = 1$, $E = \sigma(l^1, c^0)$ si $s = +\infty$, cela équivaut à dire que λ_X , probabilité sur $K^{(N)}$ associée à X , est l'image, par l'injection canonique, de la probabilité cylindrique de type p sur E , $\lambda_{\bar{X}}$, associée à $\bar{X}$. L'unicité de $\lambda_{\bar{X}}$ résulte de celle de $\bar{X}$, qui elle-même résulte de la densité de $K^{(N)}$ dans l^s ou c^0 . cqfd

Essayons d'avoir une proposition analogue pour le cotype. Ce n'est pas en général possible. On aura seulement :

Proposition (XXVI,1;2) : Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires non nulles. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) Pour $c \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, si les sommes $\sum_{n=0}^N c_n X_n$, $N \in \mathbb{N}$, convergent uniformément vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$, c converge vers 0 dans l^s .
- 2) Pour $c \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ est convergente dans $L^p(\Omega, \mu)$, alors $c \in l^s$.

Démonstration : Les c_n sont tous nuls sauf pour les n pour lesquels $X_n \in L^p(\Omega, \mu)$; on peut donc sans inconvénient supposer que $X_n \in L^p(\Omega, \mu)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors 1) signifie que l'injection $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})_{l_{p,X}} \rightarrow l^s$ est continue ; elle entraîne l'existence d'une application linéaire continue $l_{p,X} \rightarrow l^s$, compatible avec les injections de $l_{p,X}$ et l^s dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$: donc $l_{p,X} \subset l^s$, avec injection continue ; d'où 2).

Ensuite 2) signifie que $l_{p,X} \subset l^s$; l'injection est continue par le graphe fermé, les deux étant injectés continuellement dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Donc a fortiori $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})_{l_{p,X}} \rightarrow l^s$ est continue, ce qui est 1).

Mais ceci n'est pas une propriété de cotype. Dire que X est de cotype (p, l^s) , c'est dire que, pour $c \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, la seule convergence vers 0 de $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ dans $L^p(\Omega, \mu)$, entraîne la convergence vers 0 de c dans l^s ; c'est une propriété plus forte que le 1) de l'énoncé précédent. Mais :

Proposition (XXVI,1;3) : Supposons que les variables aléatoires X_n soient $\neq 0$, indépendantes, réelles et centrées (i.e. $\Pr\{X_n \geq 0\} = \frac{1}{2}$). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de cotype (p, l^s) ;
- 2) Pour $c \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ est convergente dans $L^p(\Omega, \mu)$, alors $c \in l^s$.

Lemme : Soient u, v , deux variables aléatoires indépendantes, réelles et centrées. Alors

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega, \mu)}^p \geq \frac{1}{2} \|u\|_{L^p(\Omega, \mu)}^p, \quad p > 0$$

$$\Pr\{|u + v| > a\} \geq \frac{1}{2} \Pr\{|u| > a\}.$$

Démonstration du lemme : En considérant les probabilités conditionnelles lorsque $u = t$, que nous désignerons par $\Pr_t$, et les espérances conditionnelles lorsque $u = t$, que nous désignerons par Esp_t , on a les formules :

$$\text{Esp}(|u + v|^p) = \int_{\mathbb{R}} \text{Esp}_t(|u + v|^p) d\nu(t),$$

$$\Pr\{|u + v| > a\} = \int_{\mathbb{R}} \Pr_t\{|u + v| > a\} d\nu(t),$$

où ν est la loi de probabilité de u . Soit $t \geq 0$. Alors $|u + v| \geq |u| = t$ dès que $v \geq 0$; or, pour ν -presque tout t , $\Pr_t\{v \geq 0\} = \Pr\{v \geq 0\}$ puisque u et v sont indépendantes, et $\Pr\{v \geq 0\} = \frac{1}{2}$ par hypothèse. Pour $t \leq 0$, on a le même résultat en remplaçant $v \geq 0$ par $v \leq 0$. Cela donne toujours, pour ν -presque tout t : $\text{Esp}_t(|u + v|^p) \geq \frac{1}{2} |t|^p$, et $\Pr_t\{|u + v| > a\} \geq \frac{1}{2}$ si $|t| > a$.
Donc

$$\text{Esp}(|u + v|^p) \geq \frac{1}{2} \int |t|^p d\nu(t) = \frac{1}{2} \text{Esp}(|u|^p),$$

$$\Pr\{|u + v| > a\} \geq \frac{1}{2} \int_{|t| > a} d\nu(t) = \frac{1}{2} \Pr\{|u| > a\},$$

ce qui est l'énoncé du lemme $\spadesuit$.

$\spadesuit$ Pour $p \geq 1$, une méthode courante dans les martingales donnerait une inégalité meilleure, sans facteur $\frac{1}{2}$, avec l'hypothèse plus faible $\text{Esp}.v = 0$ (si v n'est pas intégrable, on trouve tout de suite $\text{Esp}(|u+v|^p) = +\infty$).
D'autre part, bien évidemment, u n'a pas besoin d'être centrée.

Démonstration du théorème : Soit $c \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ une suite finie. En prenant $u = \sum_{n=0}^N c_n X_n$, $v = \sum_{n=N+1}^{+\infty} c_n X_n$, le lemme donne, pour $p > 0$:

$$\sup_{N \in \mathbf{N}} \left\| \sum_{n=0}^N c_n X_n \right\|_{L^p(\Omega, \mu)} \leq 2^{1/p} \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n \right\|_{L^p(\Omega, \mu)}$$

$$\sup_{N \in \mathbf{N}} J_{2\alpha}(\mu, \sum_{n=0}^N c_n X_n) \leq J_{\alpha}(\mu, \sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n) .$$

Donc si, pour $c \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ converge vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$, $\sum_{n=0}^N c_n X_n$ convergera vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$, uniformément pour $N \in \mathbf{N}$.
La prop. (XXVI,1;3) résulte alors de la prop.(XXVI,1;2), les conditions 1) de ces deux propositions étant équivalentes.

§ 2. LE THEOREME DES 3 SERIES DE KOLOMOGOROV ET SES APPLICATIONS

Proposition (XXVI,2;1) : Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ converge en probabilité ;
- 2) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ converge presque sûrement ;
- 3) Les 3 série numériques suivantes sont convergentes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Pr\{|X_n| > 1\}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Esp.}(X'_n)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\text{Esp.}(|X'_n|^2) - |\text{Esp.}(X'_n)|^2) ,$$

où X'_n est la variable aléatoire

$$X'_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } |X_n(\omega)| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |X_n(\omega)| > 1 . \end{cases}$$

Nous admettrons ce théorème, qu'on trouve dans tous les traités élémentaires de probabilité. On le trouvera par exemple dans "Probability theory" de Loève. p. 247 et 249.

Corollaire : Si en outre les X_n sont ≥ 0 , ces conditions sont équivalentes à

3) Les 2 séries numériques ≥ 0 suivantes sont convergentes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Pr\{X_n > 1\}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Esp.}(X_n') ,$$

En effet, le terme général de la 3ème série de la proposition est ≥ 0 et majoré par $\text{Esp.}(X_n'^2) \leq \text{Esp.}(X_n')$ puisque $X_n' \leq 1$.

Proposition (XXV1.2:2) : Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, chacune prenant les valeurs ± 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ (variables aléatoires de Rademacher ou du jeu de pile ou face). Cette suite est de type $(p, 1^2)$ pour tout p fini. de cotype $(p, 1^2)$ pour tout p .

Démonstration : La série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ converge en probabilité si et seulement si $c_n \in l^2$, par le théorème des 3 séries de Kolmogorov. [Posons $X_n = c_n Z_n$. Alors $\Pr\{|c_n X_n| > 1\} = 1$ ou 0 selon que $|c_n| > 1$ ou ≤ 1 . La 1ère série donne donc la condition : $|c_n| \leq 1$ sauf pour un nombre fini de valeurs de n . Ensuite $\text{Esp.}(X_n') = 0$. et $\text{Esp.}(|X_n'|^2) = 0$ ou $|c_n|^2$ selon que $|c_n| > 1$ ou ≤ 1 : l'ensemble des 3 séries donne donc la condition $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$].

La proposition (XXVI,1:3) montre donc que $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de cotype $(0, 1^2)$; elle est a fortiori de cotype $(p, 1^2)$ pour tout p .

La proposition (XXVI.1;1) montre que Z est de type $(0, 1^2)$. Il nous reste à montrer que Z est de type $(p, 1^2)$ pour tout p fini.

Soit c une suite finie.

$$\text{Esp.} \left(e^{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n Z_n} \right) = \prod_{n \in \mathbf{N}} \text{Esp.} \left(e^{c_n Z_n} \right)$$

(à cause de l'indépendance)

$$= \prod_{n \in \mathbf{N}} \left(\frac{e^{c_n} + e^{-c_n}}{2} \right) = \prod_{n \in \mathbf{N}} \text{ch } c_n \leq \prod_{n \in \mathbf{N}} e^{\frac{c_n^2}{2}} = e^{\frac{1}{2} \|c\|_1^2}.$$

On a la même inégalité en remplaçant c par $-c$, d'où, en additionnant :

$$\text{Esp.} \left(\text{ch} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n Z_n \right) \right) \leq e^{\frac{1}{2} \|c\|_1^2}.$$

En développant le 1er membre :

$$\text{Esp.} \left(\frac{\left| \sum c_n Z_n \right|^{2k}}{(2k)!} \right) \leq e^{\frac{1}{2} \|c\|_1^2}$$

pour tout k . Donc, pour $\|c\|_1^2 \leq 1$, on a

$$\left\| \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n Z_n \right\|_{L^{2k}(\Omega, \mu)}^{2k} \leq (2k)! \sqrt{e},$$

d'où

$$\left\| (Z_n)_{n \in \mathbf{N}} \right\|_{2k, 1}^{*2} \leq ((2k)! \sqrt{e})^{\frac{1}{2k}} :$$

et Z est bien de type $(p, 1^2)$ pour tout p fini.

Corollaire (Inégalités de Khintchine) : Il existe des constantes A_p, B_p ($0 < p < +\infty$) telles que, pour toute $c \in l^2$:

$$A_p \|c\|_1^2 \leq \left\| \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n Z_n \right\|_{L^p(\Omega, \mu)} \leq B_p \|c\|_1^2.$$

Il existe une constante M et un δ , $0 < \delta < 1$, tel que

$$\|c\|_1^2 \leq M J_\delta \left(\mu, \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n Z_n \right).$$

Démonstration : Les premières inégalités expriment que $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de type et cotype $(p, 1^2)$; la dernière exprime qu'elle est de cotype $(0, 1^2)$ (elle est aussi de type $(0, 1^2)$, d'où une inégalité en sens inverse pour tout δ , mais c'est dans le sens trivial).

Ces inégalités de Khintchine avaient été admises au théorème p.(VIII, 3).

Considérons maintenant une suite $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant la loi stable d'indice r ,

$$\theta_r(x) dx, \mathfrak{F}(\theta_r dx) = e^{-|t|^r}, \quad 1 \leq r \leq 2.$$

(On peut considérer le cas $0 < r < 1$, mais nous ne le ferons pas pour simplifier).

Alors $c_n U_n$ suit la loi d'image de Fourier $e^{-|c_n t|^r}$. donc $\sum_{n \in \mathbf{N}} c_n U_n$, pour $c \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$, suit la loi d'image de Fourier $e^{-\|c\|_{1^r}^r |t|^r}$, c-à-d. la loi homothétique de $\theta_r dx$ dans le rapport $\|c\|_{1^r}$. Pour $r < 2$, pour x grand, $\theta_r(x)$ est comparable à $|x|^{-r-1}$, donc elle a des moments d'ordre p pour tout $p < r$. Alors $U = (U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de type $(p, 1^r)$ pour tout $p < r$, avec, pour $p > 0$:

$$\|(U_n)_{n \in \mathbf{N}}\|_{p, 1^r}^* = \sup_{c \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})}} \left\| \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n U_n \right\|_{L^p(\Omega, \mu)} = \|\theta_r dx\|_p \cdot \|c\|_{1^r} \leq 1$$

Elle n'est pas de type p pour $p \geq r$.

Elle est aussi de cotype $(p, 1^r)$ avec, pour $p > 0$:

$$\|(U_n)_{n \in \mathbf{N}}\|_{p, 1^r}^* = \left(\inf_{\substack{c \in \mathbf{K}^{(\mathbf{N})} \\ \|c\|_{1^r} \geq 1}} \left\| \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n U_n \right\|_{L^p(\Omega, \mu)} \right)^{-1} = \|\theta_r dx\|_p^{-1}.$$

Son cotype $(0, l^r)$ donne lieu aux inégalités

$$\begin{aligned} (J_\delta((U_n)_{n \in \mathbb{N}}))_{l^r} &= \left(\inf_{\substack{c \in \mathbf{K}(\mathbb{N}) \\ \|c\|_{l^r} \geq 1}} J_\delta(\mu, \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n U_n) \right)^{-1} \\ &= (J_\delta(\theta_r d_x))^{-1}, \quad 0 < \delta < 1. \end{aligned}$$

Et naturellement elle est a fortiori de cotype (p, l^r) pour $p \geq r$ avec

$$* \quad \|(U_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{p, l^r} = 0.$$

Pour $r=2$, les résultats relatifs au cotype subsistent, mais en outre la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi de type p pour tout p fini (les U_n sont gaussiennes). En résumé :

Proposition (XXVI,2;3) : Soit $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la loi stable $\theta_r(x)dx$ d'indice r , $\int \theta_r = e^{-|t|^r}$, $1 \leq r \leq 2$. Alors U est de type (p, l^r) , pour $p < r$ si $r < 2$, pour tout p fini si $r = 2$; elle est de cotype (p, l^r) pour tout p .

Proposition (XXVI,3;3) : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la loi stable $\theta_r dx$ d'indice r , $1 \leq r \leq 2$. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n| U_n$ converge, $1 \leq q < +\infty$, soit presque sûrement convergente, il faut et il suffit que :

$$\alpha \in l^{\min(r,q)} \quad \text{si} \quad r \neq q \quad \text{et} \quad r \neq 2$$

$$\alpha \in l^{r-} \quad , \quad \text{i.e.} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^r (1 + |\log \frac{1}{|\alpha_n|}|) < +\infty \quad ,$$

$$\alpha \in l^q \quad \begin{array}{ll} \text{si} & r = q < 2, \\ \text{si} & r = 2. \end{array}$$

Pour que $(\alpha_n U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit presque sûrement bornée, avec $r < 2$, il faut et il suffit que $\alpha \in l^r$ (nous n'étudierons pas la condition pour $r = 2$).

Démonstration : Nous appliquerons le théorème des 2 séries de Kolmogorov (puisque $|\alpha_n U_n|^q \geq 0$) .

- A) La 1ère série est $\sum_{n \in \mathbf{N}} \Pr\{|\alpha_n U_n| > 1\} = 2 \sum_{n \in \mathbf{N}} \int_{\frac{1}{\alpha_n}}^{+\infty} \theta_r(x) dx$.

- A₁) Soit d'abord $r < 2$; $\int_{\frac{1}{|\alpha_n|}}^{+\infty} \theta_r(x) dx$ est comparable à $|\alpha_n|^r$, et la

première condition est donc $\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n|^r < +\infty$. Remarquons que si on remplace $|\alpha_n U_n| > 1$ par $|\alpha_n U_n| > k$, la condition est la même. Donc, si $\sum |\alpha_n|^r < +\infty$, la suite $(\alpha_n U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est presque sûrement bornée par k pour n assez grand ; ceci est vrai pour tout k , donc $\alpha_n U_n$ converge presque sûrement vers 0. Si $\sum |\alpha_n|^r = +\infty$, cette suite est presque sûrement non bornée par k , et ceci quel que soit k , donc $(\alpha_n U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est presque sûrement en dehors de l^∞ , ce qui règle la dernière affirmation de l'énoncé.

- A₂) Pour $r = 2$, intervient une condition beaucoup plus faible, à cause de la décroissance à l'infini de la fonction de Gauss ; sans l'écrire exactement, retenons qu'elle implique qu' α_n tende vers 0, et qu'elle/impliquée par $\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n|^\rho < +\infty$, pour un ρ fini quelconque.

- B) La 2ème série est $\sum_{n \in \mathbf{N}} \text{Esp.}(|\alpha_n U_n|^q)$, où U_n' est la variable aléatoire égale à U_n si $|U_n| \leq \frac{1}{\alpha_n}$, à 0 autrement. La 2ème condition est donc

$2 \sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n|^q \int_0^{\frac{1}{|\alpha_n|}} x^q \theta_r(x) dx < +\infty$; dans tous les cas, on sait déjà que α_n tend vers 0, donc $\frac{1}{|\alpha_n|}$ vers $+\infty$, et $\int_0^{\frac{1}{|\alpha_n|}} x^q \theta_r(x) dx$ tend vers $\int_0^{+\infty} x^q \theta_r(x) dx$ (fini ou non).

- B₁) Si $r < 2$, et $q < r$, $\int_0^{+\infty} x^q \theta_r(x) dx < +\infty$, et la condition écrite est

donc $\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n|^q < +\infty$. Et l'ensemble des 2 conditions de Kolmogorov est

donc $\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n|^q < +\infty$, ou $\alpha \in l^q = l^{\text{Min}(q, r)}$.

- B₂) Si $r < 2$, et $q > r$, $x^q \theta_r(x)$ est comparable à x^{q-r-1} pour x grand, et

$\int_0^{\frac{1}{|\alpha_n|}} x^q \theta_r(x) dx$ comparable à $\frac{1}{|\alpha_n|^{q-r}}$; la condition écrite est donc

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n|^{q-r} \frac{1}{|\alpha_n|^{q-r}} = \sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n|^r < +\infty \quad ; \quad \text{ou } \alpha \in l^r = l^{\min(q,r)}.$$

- B₃) Si $r < 2$, et $q = r$, $x^q \theta_r(x)$ est comparable à $\frac{1}{x}$ pour x grand, donc

$\int_0^{\frac{1}{|\alpha_n|}} x^q \theta_r(x) dx$ à $\log \frac{1}{|\alpha_n|}$; la condition écrite est donc

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n|^q \left| \log \frac{1}{|\alpha_n|} \right| < +\infty. \text{ Et l'ensemble des conditions est donc}$$

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n|^r \left(1 + \left| \log \frac{1}{|\alpha_n|} \right| \right) < +\infty,$$

notée $\alpha \in l^{r-}$. [N.B. Il faut bien écrire $1 + |\log|$, et non simplement $|\log|$: il ne suffirait pas que α_n tende vers 1 très vite: on peut supprimer le 1 en ajoutant que α_n tend vers 0. Nous avons mis des $|\cdot|$ pour avoir des quantités ≥ 0 , et $\log \frac{1}{|\alpha_n|}$ plutôt que $\log |\alpha_n|$ parce que α_n tend vers 0].

- B₄) Examinons enfin le cas $r=2$. Alors $\int_0^{+\infty} x^q \theta_2(x) dx < +\infty$, quel que soit q fini, donc la condition écrite est $\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n|^q < +\infty$. Comme celle-ci est plus forte que la 1ère condition, l'ensemble des deux est $\sum_{n \in \mathbf{N}} |\alpha_n|^q < +\infty$, ou $\alpha \in l^q$, ce qui achève de démontrer la proposition.

§ 3. APPLICATION DU THEOREME DE DUALITE

La possession de probabilité sur $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, dont nous possédons le co-type, va nous permettre d'appliquer le théorème de dualité. Toutes les propriétés d'approximation sont ici vérifiées, par troncature (à la fois celle du § 4 de l'exposé V, et celle de (XXV,4;1)). D'autre part, nous avons vu, à la fin de l'exposé XXV, que toute probabilité sur $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, portée par l^s , provient d'une probabilité de Radon sur l^s , remplacé par $\sigma(l^\infty, l^1)$, si $s = +\infty$.

Proposition (XXVI, 3;1) (Khintchine-Kolmogorov) :

1) L'injection canonique (faiblement continue) de $\sigma(l^1, c^0)$ dans l^2 est p-radonifiante pour tout $p \geq 0$;

2) Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires $X_n \in L^0(\Omega, \mu)$, de type (p, l^∞) ; alors elle est d'ordre (p, l^2) , autrement dit $\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n|^2$ converge presque sûrement, et, pour $p > 0$:

$$\begin{aligned} & \left(\int \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \text{const.} \cdot \left\| (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_{p, l^2}^* \\ & = \text{const.} \cdot \sup_{c \in \mathbf{K}(\mathbb{N})} \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n X_n \right\|_{L^p(\Omega, \mu)} \\ & \quad \|c\|_{l^\infty} \leq 1 \end{aligned}$$

(la constante dépend de p, et n'est pas forcément bornée si p tend vers 0).

Démonstration : Utilisons la suite Z de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Rademacher. Nous avons vu qu'elle est de cotype (p, l^2) pour tout $p \geq 0$, prop.(XXVI, 2;2) ; d'autre part $|Z_n| = 1$, donc la probabilité λ_Z sur $\mathbf{K}^{\mathbb{N}}$ définie par Z est portée par la sphère unité de l^∞ , donc Z est de Radon d'ordre (p, l^∞) pour tout p. On peut appliquer le théorème de dualité avec $U = l^\infty$ et avec $V = \sigma(l^2, l^2)$; mais une probabilité de Radon sur $\sigma(l^2, l^2)$ provient d'une probabilité de Radon sur l^2 . Alors le théorème de dualité est l'énoncé 2) de la présente proposition (Z est de cotype (p, l^2) et d'ordre (p, l^∞) , donc toute X de type (p, l^∞) est d'ordre (p, l^2))).

On passe de là immédiatement à l'énoncé 1. Soit λ une probabilité cylindrique de type p sur $\sigma(l^1, c^0)$. Elle peut s'exprimer comme $\lambda_{\bar{X}}$ où $\bar{X}$ est une application linéaire continue de c^0 dans un $L^p(\Omega, \mu)$, donc un prolongement à c^0 d'une application X continue de $(\mathbf{K}^{(\mathbb{N})})$ dans $L^p(\Omega, \mu)$, c-à-d. d'une suite $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires, de type (p, l^∞) , λ_X étant l'image de $\lambda_{\bar{X}}$ dans $\mathbf{K}^{\mathbb{N}}$. Alors X est de Radon d'ordre (p, l^2) , donc λ_X provient d'une probabilité de Radon Λ sur l^2 , d'ordre p. Il reste à montrer que $\Lambda = \lambda_{\bar{X}}$. Toutes deux sont des probabilités cylin-

* l^∞ est pris comme dual de l^1 , avec la topologie $\sigma(l^\infty, l^1)$ est la norme duale

driques sur l^2 (car $\sigma(l^1, c^0) \subset l^2$), et les fonctions aléatoires associées $l^2 \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$ sont continues, et coïncident sur $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ (car Λ et $\lambda_{\frac{1}{X}}$ ont même image λ_X dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$) dense, donc elles coïncident, cqfd.

Nous allons maintenant étudier les applications $(p, l^a; p, l^b)$ -radonifiantes (complètement pour $p < 1$, incomplètement pour $p \geq 1$). La démonstration est longue et filandreuse (le résultat aussi!). Pour éviter la multiplication des propositions, nous donnerons une proposition et 2 lemmes.

Proposition (XXVI,3;2) : Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de scalaires; appelons aussi α l'application diagonale $(c_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto (\alpha_n c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ dans lui-même.

Soit $1 \leq a \leq 2$, $1 \leq b \leq 2$, $0 \leq p \leq +\infty$. Pour que α soit $(p, l^a; p, l^b)$ -radonifiante, il est suffisant que l'on ait

$$\alpha \in l^{\text{Min}(a,b)} \quad \text{si} \quad a \neq b \quad \text{ou} \quad a = b = 2,$$

$$\alpha \in l^{a-} \quad \text{si} \quad a = b \neq 2;$$

c'est aussi nécessaire si $p < a \leq 2$, ou si $p < +\infty$, $a = 2$.

Démonstration

A) Supposons que α soit $(p, l^a; p, l^b)$ -radonifiante, avec $p < a \leq 2$, ou p fini, $a = 2$. Prenons la suite $U = (U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de (XXVI,2;3 et 4) correspondant à $r = a$; vu les conditions relatives à p , elle est de type (p, l^a) . Donc $\alpha U = (\alpha_n U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ doit être d'ordre (p, l^b) . A fortiori $(\alpha_n U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est presque sûrement dans l^b . La prop.(XXVI,2;4) donne $\alpha \in l^{\text{Min}(a,b)}$ si $a \neq b$, $a < 2$, $\alpha \in l^{a-}$ si $a = b < 2$, $\alpha \in l^b = l^{\text{Min}(a,b)}$ si $a = 2$. Ceci montre la nécessité de la condition.

Remarque : On voit que cette nécessité subsiste même pour $p < a < 2$, b non nécessairement ≤ 2 , en prenant même $\sigma(l^\infty, l^1)$ au lieu de l^∞ si $b = +\infty$, ou pour $p < +\infty$, $a = 2$, b quelconque $< +\infty$.

B) Supposons d'abord $p = 0$. Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite analogue correspondant à $r = b$, elle est de cotype $(0, l^b)$; et l'hypothèse faite sur α assure que $(\alpha_n U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Radon d'ordre $(0, l^a)$, par (XXVI, 2; 4). On peut appliquer théorème de dualité avec $U = l^a$, $V = \sigma(l^b, l^{b'})$ (sauf pour $b = 1$, où l'on devra prendre $\sigma(l^1, c^0)$ pour que la boule soit compacte); mais, ici encore, l^b étant polonais, toute probabilité de Radon sur $\sigma(l^b, l^{b'})$ (ou $\sigma(l^1, c^0)$) provient d'une probabilité de Radon sur l^b (ou l^1). On en déduit (α étant sa propre transposée) que α est bien $(0, l^a; 0, l^b)$ -radonifiante. Soit maintenant $p > 0$. Le corollaire 2 de la prop. (XVII, 4; 1) montre que α est aussi $(p, l^a; p, l^b)$ -radonifiante pour tout $p \geq 0$. Ceci démontre la suffisance de la condition.

Lemme (XXVI, 3; 3) : Pour $b \geq 2$, $\alpha \in l^a$, α est toujours $(p, l^a; p, l^b)$ -radonifiante pour tout $p \geq 0$.

Démonstration : On voit que $\alpha \in l^a$ applique continuellement l^∞ dans l^a ; donc, si $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de type (p, l^a) , $\alpha X = (\alpha_n X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera de type (p, l^∞) (X est continue $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}_{1^a} \rightarrow L^p(\Omega, \mu)$, et α est continue $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}_{1^\infty} \rightarrow (\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}_{1^a})$, donc $\alpha X = X \circ \alpha$ est continue $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}_{1^\infty} \rightarrow L^p(\Omega, \mu))$). D'après la prop. (XXVI, 3; 1), αX est alors d'ordre (p, l^2) ; donc a fortiori d'ordre (p, l^b) pour $b \geq 2$.

Lemme (XXVI, 3; 4) : Si α est $(p, l^a; p, l^b)$ -radonifiante (pour $b = +\infty$, on peut remplacer l^b par $\sigma(l^\infty, l^1)$) on peut affirmer que $\alpha \in l^a$, dans tous les cas suivants :

$p < a < 2$; $a = 2$, $b < +\infty$, $p < +\infty$;

$a = 2$, $b = +\infty$, $p < 2$; $a > 2$, $p < 2$; donc en particulier dans tous les cas si $p < \min(a, 2)$.

Démonstration : Pour $a < 2$, b quelconque, ou $a = 2$, b fini, cela résulte de la remarque qui suit la partie A de la démonstration de (XXVI, 3; 2).

Il ne reste donc que les cas $a > 2$, b quelconque, ou $a = 2$, $b = +\infty$, avec, dans les 2 cas, l'hypothèse $p < 2$. Soit $p < q < 2$, et soit

$\beta \in l^{\frac{1}{q} - \frac{1}{a}}$; β opère continuellement de l^a dans l^q . Si donc X est de type (p, l^q) , βX sera de type (p, l^a) , et donc $\alpha\beta X$ d'ordre (p, l^b) ; donc $\alpha\beta$ est $(p, l^q ; p, l^b)$ -radonifiante. Mais maintenant $p < q < 2$, donc on déduit du cas déjà réglé que $\alpha\beta \in l^q$. Ainsi, pour toute

$\beta \in l^{\frac{1}{q} - \frac{1}{a}}$. $\alpha\beta = (\alpha_n \beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans l^q ; donc $\alpha \in l^a$, cqfd.

Nous allons maintenant nous borner à $p < 1$, pour avoir des conditions nécessaires et suffisantes (que j'ignore pour p quelconque).

Théorème (XXVI,3;5) : Soit $0 \leq p < 1$, $1 \leq a \leq +\infty$, $1 \leq b \leq +\infty$. Soit

$\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour que la multiplication par α soit $(p, l^a ; p, l^b)$ -radonifiante (l^∞ pouvant être remplacé par (l^∞, l^1) si $b = +\infty$) il faut et il suffit que $\alpha \in l^{\text{Min}(a,b)}$, sauf dans les cas suivants :

$a = b < 2$. où la condition est $\alpha \in l^{a-}$ (i.e. $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^a (1 + |\log \frac{1}{|\alpha_n|}|) < +\infty$) ;

$a > b \geq 2$. où la condition est $\alpha \in l^a$;

$a > 2 > b$, où la condition est $\alpha \in l^{\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{2}}}$.

Démonstration :

A) Soit $a < b$. La condition énoncée est alors $\alpha \in l^a$. On sait qu'elle est nécessaire par le lemme (XXVI,3;4). On sait qu'elle est suffisante si $b \geq 2$ par la prop. (XXVI,3;2), pour $b \geq 2$ par le lemme (XXVI,3;3).

B) Soit $a = b$.

La condition énoncée est $\alpha \in l^{a-}$ si $a < 2$, on sait alors qu'elle est nécessaire et suffisante par (XXVI,3;2), et $\alpha \in l^a$ si $a \geq 2$, on sait qu'elle est nécessaire par (XXVI,3;4) et suffisante par (XXVI,3;3).

C) Soit $a > b$.

$\sim C_1$) Si $a > b \geq 2$, la condition $\alpha \in l^a$ est nécessaire par (XXVI,3;4), suffisante par (XXVI,3;3).

$\sim C_2$) Soit $2 \geq a > b$. Cela résulte de (XXVI,3;2).

-C₃) Soit enfin $a > 2 > b$.

Supposons $\alpha \in l^{\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{2}}}$. On peut alors écrire $\alpha = \beta\gamma$, avec $\beta \in l^a, \gamma \in l^{\frac{1}{\frac{1}{b} - \frac{1}{2}}}$. Alors β opère de l^∞ dans l^a ; si donc X est une suite de variables aléatoires de type (p, l^a) , βX est de type (p, l^∞) ; d'après (XXVI, 3;1), elle est d'ordre (p, l^2) ; comme γ opère de l^2 dans l^b , $\alpha X = \beta\gamma X$ est d'ordre (p, l^b) . Donc α est bien $(p, l^a; p, l^b)$ -radonifiante.

Inversement, supposons que α soit $(p, l^a; p, l^b)$ -radonifiante. Prenons

$\beta \in l^{\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{a}}}$. Alors β opère de l^a dans l^2 ; donc, si X est de type (p, l^2) , βX est de type (p, l^a) , et par suite $\alpha\beta X$ de type (p, l^b) . Donc $\alpha\beta$ est $(p, l^2; p, l^b)$ -radonifiante. D'après le cas C₂ déjà réglé, $\alpha\beta \in l^b$. Donc,

pour tout $\beta \in l^{\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{a}}}$, $\alpha\beta$ est dans l^b ; donc $\alpha \in l^{\frac{1}{\frac{1}{b} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{a})}} = l^{\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{2}}}$,

cqfd.

§ 4. APPLICATIONS 0-RADONIFIANTES DANS LES ESPACES DE SUITES

Théorème (XXVI, 4;1) : Soient $1 \leq a \leq +\infty$, $1 \leq b \leq +\infty$.

Pour que l'application $\alpha : (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit p-radonifiante (p donné, $0 \leq p < 1$) de $l^{a'}(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = 1$; pour $a = +\infty$, l^1 doit être remplacé par $\sigma(l^1, c^0)$; pour $a = 1$, l^∞ doit être remplacé par $\sigma(l^\infty, l^1)$) dans l^b (pour $b = 1$, l^1 doit être remplacé par $\sigma(l^1, c^0)$, et, pour $b = +\infty$, l^∞ doit être remplacé par $\sigma(l^\infty, l^1)$), il faut et il suffit que $\alpha \in l^{\text{Min}(a,b)}$, sauf dans les cas suivants :

$$\begin{array}{ll} a = b < 2, \text{ où la condition est } \alpha \in l^{a-}; & \\ a > b \geq 2, \text{ où la condition est } \alpha \in l^a; & \\ a > 2 > b, \text{ où la condition est } \alpha \in l^{\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{2}}}. & \end{array}$$

Démonstration : Tout revient à démontrer que α est p-radonifiante de $l^{a'}$ dans l^b , si et seulement si elle est $(p, l^a; p, l^b)$ -radonifiante (avec les remplacements voulus pour les valeurs 1 et $+\infty$. Pour simplifier, nous n'examinerons, dans la démonstration, que les cas $1 < a < +\infty$, $1 < b < +\infty$, le lecteur rétablira aisément le reste).

Supposons α p -radonifiante de $l^{a'}$ dans l^b . Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de type (p, l^a) . Elle définit une application linéaire continue de $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})_{l^a}$ dans $L^p(\Omega, \mu)$, prolongeable en une application linéaire continue $\bar{X}$ de l^a dans $L^p(\Omega, \mu)$: à celle-ci est associée une probabilité cylindrique $\lambda_{\bar{X}}$ de type p sur $l^{a'}$, et λ_X est l'image de $\lambda_{\bar{X}}$ par l'injection canonique $l^{a'} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. L'image de $\lambda_{\bar{X}}$ par α est donc de Radon d'ordre p dans l^b ; donc $\lambda_{\alpha X}$ provient d'une probabilité de Radon d'ordre p sur l^b , donc est ce que nous avons appelé de Radon d'ordre p, l^b). Donc α est bien $(p, l^a ; p, l^b)$ -radonifiante.

Inversement, supposons que α soit $(p, l^a ; p, l^b)$ -radonifiante. Soit λ une probabilité cylindrique de type p sur $l^{a'}$; on peut la définir comme $\lambda_{\bar{X}}$, où $\bar{X}$ est une application linéaire continue de l^a dans $L^p(\Omega, \mu)$. La restriction X de $\bar{X}$ à $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est alors continue de $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})_{l^a}$ dans $L^p(\Omega, \mu)$, donc de type (p, l^a) . Donc λ_X est de Radon d'ordre (p, l^b) , c-à-d. image, par l'injection canonique $l^b \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, d'une probabilité de Radon Λ d'ordre p sur l^b . Dans tous les cas considérés, il est trivial de vérifier que α envoie faiblement continuellement $l^{a'}$ dans l^b , donc $\alpha.\lambda$ est une probabilité cylindrique sur l^b , et $\alpha.\lambda$ et Λ ont même image dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On peut représenter Λ comme une $\lambda_{\bar{Y}}$, $\bar{Y}$ fonction aléatoire linéaire continue de $l^{b'}$ dans $L^p(\omega_1, \mu_1)$; alors les restrictions αX et Y de $\alpha \bar{X}$ et $\bar{Y}$ à $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ sont isonomes puisque $\alpha.\lambda$ et Λ ont même image dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Donc, $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ étant dense dans l^b , $\alpha \bar{X}$ et $\bar{Y}$ elles aussi sont isonomes ; donc $\lambda_{\alpha \bar{X}} = \lambda_{\bar{Y}}$ ou $\alpha.\lambda = \Lambda$, et α est bien p -radonifiante de $l^{a'}$ dans l^b .

Corollaire : Pour $a = \infty$ ou $b = 1$, on a le même énoncé en remplaçant (l^1, c^0) par l^1 ; pour $a = 1$ ou $b = +\infty$, on a le même énoncé en remplaçant (l^∞, l^1) par l^∞ ou c^0 .

Démonstration : C'est évident dans un sens, montrons l'autre.

1) Supposons α p -radonifiante de l^1 (c-à-d. de $c(l^1, l^\infty)$) dans l^b ; montrons qu'elle l'est aussi de $c(l^1, c^0)$ dans l^b .

Soit $\gamma \in c^0$; γ applique continuellement $\sigma(l^1, c^0)$ dans $\sigma(l^1, l^\infty)$. Donc α_γ est p-radonifiante de $\sigma(l^1, c^0)$ dans l^b . Donc α_γ vérifie les conditions de l'énoncé; ceci devant être vrai pour toute $\gamma \in c^0$, α vérifie les mêmes conditions, donc est aussi p-radonifiante de $\sigma(l^1, c^0)$ dans l^b .

1') De la même manière, si α est p-radonifiante de l^∞ ou même de c^0 dans l^b , elle l'est de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans l^b .

2) Supposons α p-radonifiante de $l^{a'}$ dans $\sigma(l^\infty, l^1)$, montrons qu'elle l'est de $l^{a'}$ dans c^0 . On sait que α vérifie les conditions de l'énoncé; elles impliquent toujours que α tende vers 0, et puisse être écrit sous la forme β_γ , où β vérifie les mêmes conditions et où $\gamma \in c^0$, sauf pour $a = b = +\infty$. Si on excepte donc ce dernier cas, β est déjà p-radonifiante de $l^{a'}$ dans $\sigma(l^\infty, l^1)$; mais γ est continue de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans $\sigma(c^0, l^1)$, donc α est p-radonifiante de $l^{a'}$ dans $\sigma(c^0, l^1)$, donc dans c^0 par Phillips. Reste le cas $a = b = +\infty$. Si α est p-radonifiante de l^1 ou $\sigma(l^1, c^0)$ dans $\sigma(l^\infty, l^1)$, cela signifie seulement que $\alpha \in l^\infty$, et on utilise le fait que l'injection canonique ($\alpha = \text{Identité}$) est déjà p-radonifiante; mais on sait qu'elle l'est même de $\sigma(l^1, c^0)$ dans l^2 (prop. (XXVI,3;1)), a fortiori dans c^0 .

Exemples :

1) L'injection canonique de $l^{a'}$ dans l^b est 0-radonifiante, si et seulement si $a' = 1$, $b \geq 2$ (la prop. (XXVI,3;1) est donc la seule possible avec l'injection canonique).

2) α est 0-radonifiante de $l^{a'}$ dans $\sigma(l^\infty, l^1)$ ou l^∞ ou c^0 , si et seulement si $\alpha \in l^a$.

3) α est 0-radonifiante de $\sigma(l^\infty, l^1)$ ou l^∞ ou c^0 dans l^b , si et seulement si $\alpha \in l^1$, sauf pour $b = 1$ où la condition est $\alpha \in l^{1-}$. Donc α ne peut être 0-radonifiante de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans un l^b , $b > 1$, sans l'être de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans l^b pour tout $b > 1$.

Si $\alpha \in l^1$ mais $\alpha \notin l^{1-}$, α est 0-radonifiante de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans $l^{1+\varepsilon}$ pour tout

$\varepsilon > 0$, mais non de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans l^1 ; par contre, elle est nucléaire, donc 1-radonifiante de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans l^1 (prop. (XII,2;1)) ;

4) α est 0-radonifiante de l^b dans l^b , si et seulement si $\alpha \in l^{b'}$ pour $b \geq 2$, $\alpha \in l^2$ pour $b \leq 2$.

N. B. : La deuxième partie de la Démonstration de la Proposition (XXVI,3;1) est insuffisante ; on en trouvera la démonstration complète au Théorème (XXVI,4;1).
