Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

L. Schwartz

Suite de l'exposé XXIV et théorème de dualité en situation générale

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. nº 25, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A29_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   L. S C H W A R T Z   1 9 6 9 - 1 9 7 0

SUITE DE L'EXPOSE XXIV

et

THEOREME DE DUALITE EN SITUATION GENERALE

Exposé N° 25

25 Mai 1970

§ 1. SUITE DE L'EXPOSE XXIV.

Voici une autre application directe du théorème de dualité :

Proposition (XXV,1;1) : Soient E un Hilbert, G un Banach, u une application linéaire continue de E dans G. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) u est 2-radonifiante ;
2) u est p-radonifiante pour tout $p \geq 0$;
3) u se factorise par $E \to S \to G$, où S est un Hilbert, et $E \to S$ de Hilbert-Schmidt.

Si ces conditions sont réalisées, ${}^t u$ est p-radonifiante de $\sigma(G',G)$ dans E' pour tout $p \geq 0$. Si, plus généralement, u est q-radonifiante pour un $q \geq 0$ fini, ou même si simplement l'image $u(\gamma)$ de la probabilité cylindrique de Gauss γ de E est de Radon sur $\sigma(G'',G')$, alors ${}^t u$ est approximativement p-radonifiante de $\sigma(G',G)$ dans E, pour tout $p \geq 0$.

Démonstration : D'abord $1 \Rightarrow 3$. En effet, la factorisation de Pietsch (prop. VII,3;4) : $E \to S \to G$, donne un $S \subset L^2(K,\mu)$ de Hilbert, et $E \to S$ 2-sommante donc de Hilbert-Schmidt.
Alors $3 \Rightarrow 2$, et trivialement $2 \Rightarrow 1$. Si ces conditions sont réalisées, on a, par transposition, une factorisation de ${}^t u$ par $\sigma(G',G) \to S' \to E'$, où $S' \to E'$ est de Hilbert-Schmidt, donc ${}^t u$ est p-radonifiante pour tout $p \geq 0$.

Mais supposons seulement que $u(\gamma)$ soit de Radon dans $\sigma(G'',G')$. Le théorème de dualité (corollaire 5 de la prop. (XXIV,3;1)) montre que ${}^t u$ est approximativement 0-radonifiante de $\sigma(G',G)$ dans E, puisque γ est de cotype 0.

Remarques : 1) Il peut arriver que $u(\gamma)$ soit de Radon sans que u soit 2-radonifiante. Considérons par exemple une suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables gaussiennes réelles indépendantes ; on voit facilement qu'elle définit la probabilité cylindrique de Gauss γ sur l^2. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, avec $|\alpha_n| = 0\left(\sqrt{\frac{1}{\log n}}\right)$.

Alors

$$P_r\{|\alpha_n Z_n| > 1\} = 2\int_{\frac{1}{\alpha_n}}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\, dt \leq \text{const.} \times e^{-\pi/\alpha_n^2} \leq \text{const.}\ \frac{1}{n^\pi}\ ,$$

terme général d'une série convergente. Donc la suite $(\alpha_n Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement bornée. De là on déduit aisément que l'image de γ par la multiplication $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\alpha}{\longmapsto} (\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Radon. Mais les multiplications radonifiantes dans les espaces de suites sont connues et seront étudiées ultérieurement (exposé XXVI). L'application α, d'après la prop. (XXV,1;1), ne peut être 2-radonifiante de l^2 dans $\sigma(l^\infty, l^1)$, que si elle est 0-radonifiante, et ceci exige $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 < +\infty$.

<u>Corollaire</u> : <u>Sur $\mathbb{R}^n$, l'injection canonique de M^α dans $(L^2_{loc})^\beta$ (notations du corollaire 1 de la prop. (XIV,4;1)) est p-radonifiante pour tout $p \geq 0$, si $\frac{\alpha-\beta}{n} > \frac{1}{2}$</u> .

<u>Démonstration</u> : Raisonnons sur le tore $\mathbb{T}^n$ au lieu de $\mathbb{R}^n$. On sait que l'application identique de $(L^2)^{-\beta}$ dans $C^{-\alpha}$ est q-radonifiante si $\frac{\alpha-\beta}{n} > \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$, par le corollaire cité. Comme $(L^2)^{-\beta}$ est hilbertien (sa topologie est transportée de celle de L^2 !), la prop. (XXV,1;1) dit que l'injection canonique de $(C^{-\alpha})' = M^\alpha$ dans $((L^2)^{-\beta})' = (L^2)^\beta$ est p-radonifiante pour tout $p \geq 0$. Comme ceci est valable pour tout q fini, il suffit que $\frac{\alpha-\beta}{n} > \frac{1}{2}$ pour que la conclusion subsiste. Le passage de $\mathbb{T}^n$ à $\mathbb{R}^n$ se fait par les techniques de l'exposé XIV.

<u>§ 2. LE THEOREME DE DUALITE EN SITUATION GENERALE. CHANGEMENT PREALABLE DE NOTATIONS.</u>

Reprenons le corollaire 1 de la prop. (XXIV,3;1), et changeons les notations. Les espaces importants sont E' et G ; appelons-les U et V, et remplaçons α' par α. La probabilité cylindrique ρ est sur $\sigma(G',G) = \sigma(V',V)$. Ce n'est pas là un fait essentiel ; elle pourrait être aussi bien une probabilité cylindrique sur n'importe quel autre espace de dual V ; c'est d'ailleurs simplement une classe d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires sur V. Par ailleurs, son cotype $(\overline{B},\beta)$ s'exprime par : $\beta(\eta) \leq \overline{B}(\eta(\rho))$, pour tout $\eta \in V$. Nous omettrons V' dans les notations , et nous dirons que ρ est une probabilité cylindrique de cotype $(\overline{B},\beta,V)$. Ensuite $v(\rho)$ est de Radon sur U, d'ordre $(\overline{A},\alpha)$; c'est bien ici U qui est important, (et qui, dans la variante indiquée après la proposition (XXIV,3;1), peut être E' avec une topologie plus fine que $\sigma(E',E)$, pourvu que $v(\rho)$ soit de Radon d'ordre $(\overline{A},\alpha)$ pour cette topologie, et α semi-continue inférieurement) ; on dira que $v(\rho)$ est de Radon d'ordre $(\overline{A},\alpha,U)$. Cherchons les résultats obtenus sur λ. On part de λ, probabilité cylindrique sur E ou $\sigma(U',U)$, de type (A,α) approximable ; ici encore, on omettra de citer U' et on dira que λ est une probabilité cylindrique de type (A,α,U) approximable la propriété de type étant : $A(\xi(\lambda)) \leq \alpha(\xi)$ pour tout $\xi \in U$. Et on trouvera $u(\lambda)$ de Radon sur V, d'ordre (B,β), ce qu'on exprimera en disant qu'elle est de Radon d'ordre (B,β,V). Les 4 propriétés relatives à ρ, λ, ne font ainsi intervenir que U, V, sans citer U', V' :

ρ de cotype $(\overline{B},\beta,V)$,
$v(\rho)$ de Radon d'ordre $(\overline{A},\alpha,U)$;
λ de type (A,α,U) approximable ,
$u(\lambda)$ de Radon d'ordre (B,β,V).

§ 3. LE THEOREME DE DUALITE EN SITUATION GENERALE. ENONCE ET DEMONSTRATION.

Mais alors il devient raisonnable d'imaginer que U et V sont des sous-espaces d'espaces plus grands, sur lesquels opèrent u et v. Par exemple, en analyse, on considère souvent des opérateurs de l'espace $\mathfrak{D}'$ des distributions (par exemple des opérateurs différentiels à coefficients C^∞), et on regarde ultérieurement sur quels sous-espaces de $\mathfrak{D}'$ ils opèrent. Il sera donc raisonnable de supposer U et V sous-espaces de $\mathfrak{D}'$, u et v opérant de $\mathfrak{D}'$ dans $\mathfrak{D}'$ (mais on ne doit pas oublier que moralement ou en fait, v opèrera de V' dans U et u de U' dans V, et non de V dans U ou de U dans V).

On aura donc d'abord la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, hook] & G \arrow[l, "v"'] \arrow[dd, hook] \\ U \arrow[d, hook] & \\ \mathcal{E} & \mathcal{G} \arrow[l, "v"'] \end{tikzcd}$$

où les <u>injections</u> $G \to \mathcal{G}$, $E \to U \to \mathcal{E}$, sont continues, G dense dans $\mathcal{G}$ et E dans $\mathcal{E}$; v sera une application faiblement continue de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{E}$, mais aussi faiblement continue de G dans E. Par exemple,

$$E = G = \mathfrak{D}\,,\ \mathcal{E} = \mathcal{G} = \sigma(\mathfrak{D}',\mathfrak{D})\ ,\ U = L^p\ .$$

Ensuite, en introduisant les duals E', G', $\mathcal{E}'$, $\mathcal{G}'$, <u>toujours munis de la topologie *-faible</u> et en posant ${}^t v = u$, on a aussi une configuration transposée, où V est un nouvel espace :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}' \arrow[r, "u"] \arrow[dd, hook] & \mathcal{G}' \arrow[d, hook] \\ & V \arrow[d, hook] \\ E' \arrow[r, "u"] & G' \end{tikzcd}$$

et nous oublierons les duals U' et V'. On suppose $V \to G'$ continue. Dans l'exemple plus haut, $\mathcal{E}' = \mathcal{G}' = \sigma(\mathfrak{D},\mathfrak{D}')$, $E' = G' = \sigma(\mathfrak{D}',\mathfrak{D})$. Si $V = L^q$, on voit que $V \to G'$ est bien continue, mais pas $\mathcal{G}' \to V$ (qui serait $\sigma(\mathfrak{D},\mathfrak{D}') \to L^q$). Soit ρ une probabilité cylindrique sur G. On se donne un poids $\overline{B}$, une fonction $\beta \geq 0$ sur V, et on dira que ρ est de cotype $(\overline{B},\beta,V)$, si $\beta(\eta) \leq \overline{B}(\eta(\rho))$ pour $\eta \in \mathcal{G}'$. En fait β n'intervient que comme fonction ≥ 0 sur $\mathcal{G}'$, mais on écrit $(\overline{B},\beta,V)$, parce que β est donnée <u>sur V</u> (ce sera essentiel plus loin). On dira que $v(\rho)$ est de Radon d'ordre $(\overline{A},\alpha,U)$, où $\overline{A}$ est un poids et α une fonction semi-continue inférieurement ≥ 0 sur U, si $v(\rho)$ est de Radon sur $\mathcal{E}$, image, par l'injection continue $U \to \mathcal{E}$, d'une probabilité de Radon ν sur U, d'ordre $(\overline{A},\alpha)$ (ν est nécessairement unique, car $\mathcal{P}(U)\to\mathcal{P}(\mathcal{E})$ est injective comme $U\to\mathcal{E}$, prop. (I,2;1)).

Soit maintenant λ une probabilité cylindrique sur E'. On dira qu'elle est de type (A,α,U), où A est un poids, si $A(\xi(\lambda))\leq\alpha(\xi)$ pour tout $\xi\in E$. Comme antérieurement, elle sera dite de type (A,α,U) approximable, si elle est limite cylindrique de λ_j , probabilités de Radon portées par des compacts de dimension finie, de type (A,α,U). Mais on aura besoin de plus : elle sera dite de type $(\mathcal{E}',U)-(A,\alpha,U)$ approximable, si elle est limite cylindrique de probabilités λ_j de Radon portées par des compacts de dimension finie de $\mathcal{E}'$, et vérifiant $A(\xi(\lambda_j))\leq\alpha(\xi)$, non seulement pour $\xi\in E$, mais pour $\xi\in U$, ce qui a un sens puisque λ_j est sur $\mathcal{E}'$ et $\xi\in U$ donc $\xi\in\mathcal{E}$, et que α est définie sur U. Enfin on dira que $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre (B,β,V), si elle est de Radon sur G', image par l'injection $V\to G'$ d'une probabilité de Radon Λ (nécessairement unique) sur V, d'ordre (B,β) (d'où la nécessité d'avoir β semi-continue inférieurement sur V). Alors :

Proposition (XXV,3;1) : Soient E, G, $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$, U, V, u, v comme ci-dessus , et E', G', $\mathcal{E}'$, $\mathcal{G}'$ munis des topologies *-faibles. Soient A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, 4 poids vérifiant l'inégalité de Fubini $(B,\overline{B})\leq(\overline{A},A)$, B compact. Soient α une fonction ≥ 0 semi-continue inférieurement sur U, β une fonction ≥ 0 compacte sur V. Supposons qu'il existe une probabilité cylindrique ρ sur $\mathcal{G}$ de cotype $(\overline{B},\beta,V)$ telle que $v(\rho)$ soit de Radon d'ordre $(\overline{A},\alpha,U)$. Alors, pour tout probabilité cylindrique λ sur E', de type $(\mathcal{E}',U)-(A,\alpha,U)$ approximable, l'image $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre (B,β,V).

Démonstration :

1) Soit λ une probabilité de Radon sur $\mathcal{E}'$, portée par un compact de dimension finie, vérifiant $A(\xi(\lambda_j))\leq\alpha(\xi)$ pour $\xi\in U$.

On refera exactement le calcul de la démonstration de (XXIV,3;1) :

$$B(u(\lambda_j,\beta))\ (u(\lambda_j)\ \text{est de Radon sur}\ \mathcal{G}'\subset V) = B(d\lambda_j(x),\ \beta(u(x)))$$
$$\leq B(d\lambda_j(x)\ .\overline{B}((u(x))(\rho))) = B(d\lambda_j(x).\ \overline{B}(x({}^t u(\rho)))$$
$$= B(d\lambda_j(x),\ \overline{B}(x(\nu)))\quad (\nu\ \text{est sur}\ \mathcal{E},\ x\ \text{est dans}\ \mathcal{E}')$$
$$= B(d\lambda_j(x).\ \overline{B}(d\nu(\xi),|<x.\xi>|)) \leq \overline{A}(d\nu(\xi),\ A(d\lambda_j(x),\ |<x,\xi>|))$$
$$= \overline{A}(d\nu(\xi)\ .\ A(\xi(\lambda_j))) \leq \overline{A}(d\nu(\xi).\alpha(\xi))\quad (\text{à cause des propriétés de}\ \lambda_j)$$
$$= \overline{A}(\nu,\alpha) \leq 1\ .$$

Donc λ_j est (de Radon sur $\mathcal{G}'\subset V$) d'ordre (B,β). On remarquera qu'on a utilisé par deux fois le fait que λ_j est sur $\mathcal{E}'$ et pas seulement sur E', et d'autre part l'inégalité $\overline{A}(\xi(\lambda_j)) \leq \alpha(\xi)$ pour $\xi\in U$ et pas seulement $\xi \in E$.

2) Soit maintenant λ cylindrique sur E', de type $(\mathcal{E}',U)-(A,\alpha,U)$ approximable.
Elle est limite cylindrique de λ_j du type précédent, suivant un ultrafiltre convenable. Alors les $u(\lambda_j)$ forment un ultrafiltre de probabilités de Radon Λ_j sur V, d'ordre (B,β), avec B et β compacts. Alors le 2ème théorème de Prokhorov (IV,6;1) dit que l'ensemble des Λ_j est relativement compact dans $\mathcal{P}(V)$, donc que les Λ_j ont une limite étroite (et a fortiori cylindrique) Λ sur V, d'ordre (B,β) ; et $u(\lambda)$ est alors image de Λ par l'injection $V \to G'$, cqfd.

§ 4. ELIMINATION DES CONDITIONS SPECIALES D'APPROXIMATION.

Proposition (XXV.4;1) : Supposons qu'il existe des applications π_j, linéaires continues de $\mathcal{E}$ dans E, dont les restrictions à E convergent (suivant j) vers l'application identique de E, pour la topologie de la convergence simple faible, et telles que, pour tout $\xi\in U$, on ait $\alpha(\pi_j(\xi)) \leq \alpha(\xi)$. Alors toute probabilité cylindrique λ sur E', de type (A,α,U) approximable, est de type $(\mathcal{E}',U)-(A,\alpha,U)$ approximable.

On ramène ainsi la propriété spéciale d'approximation considérée ici à la propriété antérieure, celle de l'exposé V, § 3, ne faisant intervenir que λ sur E', et α sur E. Et on sait comment éliminer celle-ci dans bien des cas (exposé V, § 4, et exposé XII).

Démonstration : Il suffit de montrer que, si λ est de Radon sur E', portée par un compact de dimension finie, de type (A,α), elle est limite de λ_j, de Radon sur $\mathcal{E}'$, portées par des compacts de dimension finie, avec $A(\xi(\lambda_j)) \leq \alpha(\xi)$ pour $\xi \in U$. Or il suffit de prendre $\lambda_j = {}^t\pi_j(\lambda)$. Chaque ${}^t\pi_j(\lambda)$ est bien portée par un compact de dimension finie de $\mathcal{E}'$. Ensuite, pour $\xi \in U$, $A(\xi({}^t\pi_j(\lambda))) = A((\pi_j(\xi))(\lambda)) \leq \alpha(\pi_j(\xi))$ (car $\pi_j(\xi) \in E$) $\leq \alpha(\xi)$.
Il reste à montrer que ${}^t\pi_j(\lambda)$ converge cylindriquement vers λ. Or ${}^t\pi_j$ converge vers l'identité sur E', pour la convergence simple faible ; donc ${}^t\pi_j$ converge vers l'application identique de E', uniformément sur tout compact de dimension finie, donc uniformément sur le support de λ, donc en probabilité sur (E',λ), donc ${}^t\pi_j(\lambda)$ converge étroitement vers λ dans E', cqfd.

Conséquence : Dans la plupart des applications U et V seront des Banach (ou quasi-Banach), α et β seront proportionnelles aux normes. Alors on doit supposer que les $\pi_j : \mathcal{E} \to E$ convergent, sur E, vers l'application identique E pour la convergence simple faible et que pour $\xi \in U$, $\|\pi_j(\xi)\| \leq \|\xi\|$. Par exemple, si $\mathcal{E} = \mathfrak{D}'$, $E = \mathfrak{D}$, $U = L^q$, on prendra pour π_j des troncatures -régularisations $T \mapsto \phi_j(\rho_j * T)$, $\phi_j \in \mathfrak{D}$, $\rho_j \in \mathfrak{D}$.

§ 5. APPLICATIONS AUX ESPACES DE SUITES.

Désormais, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ seront l'espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels ou complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Puis E et G seront l'espace $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ (somme directe) des "suites finies", c-à-d. des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.
On munira $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit, $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ de la topologie somme directe (limite inductive des sous-espaces de dimension finie). Pour U et V, on prendra les espaces de suites classiques, $U = l^a$, $V = l^b$, $1 \leq a,b \leq +\infty$.

Ecartons d'abord les cas 1 et $+\infty$. Alors une probabilité de Radon sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, portée par l^s, $1 < s < +\infty$, provient d'une probabilité de Radon sur l^s muni de la topologie induite par $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, donc aussi de sa topologie normée, car il est polonais ; ceci subsiste pour $s = 1$, mais, pour $s = +\infty$, on doit remplacer l^∞ par $\sigma(l^\infty, l^1)$ (lusinien) (qui est aussi $\sigma((c^0)'', (c^0)'))$. D'autre part, la boule unité est faiblement compacte ; ceci ne subsiste pour $s = +\infty$ que si l'on remplace l^∞ par $\sigma(l^\infty, l^1)$, pour $s = 1$ que si on remplace l^1 pour $\sigma(l^1, c^0)$.

Une probabilité cylindrique λ sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est toujours de Radon. Elle est une classe d'isonomie de fonctions aléatoires linéaires $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{X} L^0(\Omega, \mu)$; une telle fonction aléatoire est simplement une suite $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires scalaires $X_n \in L^0(\Omega, \mu)$, qui définit la fonction aléatoire linéaire $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n X_n$, $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \to L^0(\Omega, \mu)$. Alors $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une μ-classe d'applications μ-mesurables $\Omega \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de sorte que la probabilité cylindrique λ est l'image $X(\mu)$ de μ par X, donc de Radon. A une isonomie près, on peut prendre $\Omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, μ = la probabilité cylindrique λ, qui est de Radon, et X_n = la projection $\pi_n : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}$. Tout ceci n'est que la prop. (VI,2;1), compte-tenu de la remarque qui termine l'exposé VI.

Exprimons que la probabilité cylindrique λ est de type (p, l^s) (c-à-d., avec les notations du § 3, de type $(\| \|_p$, constante $\times$ norme l^s, $l^s)$, si $p > 0$, et de type $(J_\alpha$, constante $\times$ norme l^s, $l^s)$ pour tout $\alpha, 0 < \alpha < 1$, si $p = 0$). Cela veut dire que, si $c \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, si $\|c\|_{l^s}$ tend vers 0, $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n X_n$ converge vers 0 dans $L^p(\Omega, \mu)$. Pour $p > 0$, on pourra définir

$\|\lambda\|^*_{p, l^s}$ (qu'on écrira aussi $\|(X_n)_{n \in \mathbb{N}}\|^*_{p, l^s}$ ou $\|X\|^*_{p, l^s}$)

$$= \operatorname*{Sup}_{\substack{c \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \\ \|c\|_{l^s} \leq 1}} \Big\| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n X_n \Big\|_{L^p(\Omega, \mu)} .$$

Bien entendu, l'application X se prolonge alors en application linéaire continue de l^s dans $L^p(\Omega,\mu)$ (c^0 au lieu de l^∞ si $s=+\infty$), donc λ provient d'une probabilité cylindrique de type p sur $l^{s'}$ ($\sigma(l^1,c^0)$ si $s=+\infty$, $\sigma(l^\infty,l^1)$ si $s=1$). C'est bien en conformité avec les notations nouvelles introduites au § 2 qu'une probabilité cylindrique sur $l^{s'}$ (ou $\sigma(l^1,c^0)$ ou $\sigma(l^\infty,l^1)$) de type p se note de type (p,l^s). Exprimons maintenant que la probabilité cylindrique λ est de cotype (p,l^s). Cela veut dire que, pour $c\in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X_n$ converge vers 0 dans $L^p(\Omega,\mu)$, c tend vers 0 dans l^s. Pour $p>0$, on pourra définir

$$ {}^*\|\lambda\|_{p,l^s} \quad \text{ou} \quad {}^*\|(X_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{p,l^s} \quad \text{ou} \quad {}^*\|X\|_{p,l^s} $$

$$ = \left(\operatorname*{Inf}_{\substack{c\in\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \\ \|c\|_{l^s}\geq 1}} \Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X_n \Big\|_{L^p(\Omega,\mu)} \right)^{-1} . $$

Exprimons enfin que λ provient d'une probabilité de Radon d'ordre p sur l^s ($\sigma(l^\infty,l^1)$ pour $s=+\infty$), ou encore que $X(\mu)$ est portée par l^s et d'ordre p. Cela veut simplement dire que la suite $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est dans l^s pour μ-presque tout ω, et en outre que la μ-classe de fonctions $\omega\to\|(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}\|_{l^s}$ appartient à $L^p(\Omega,\mu)$. Pour $p>0$, on aura $\|\lambda\|_{p,l^s}$ ou

$$ \|(X_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{p,l^s} \quad \text{ou} \quad \|X\|_{p,l^s} = \left(\int_\Omega \|(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}\|^p_{l^s}\, d\mu(\omega)\right)^{1/p} $$

si $p<+\infty$, $= (\text{Sup. ess.})_{d\mu(\omega)} \|(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}\|_{l^s}$ si $p=+\infty$.

Nous étudierons complètement les multiplications 0-radonifiantes $(p=0)$ dans les espaces de suites dans le prochain exposé.

COMPLEMENT A L'EXPOSE XXV

§ 1bis. APPLICATIONS 0-RADONIFIANTES DANS LES ESPACES DE DISTRIBUTIONS SUR $\mathbb{R}^n$.

Le corollaire de la prop.(XXV,1;1) peut être étendu à d'autres cas, en remplaçant le mouvement brownien $(s = 2)$ par le s-bruit blanc, $1 < s < 2$. Raisonnons encore sur le tore $\mathbb{T}^n$ au lieu de $\mathbb{R}^n$. Soit γ_s la probabilité cylindrique sur $L^{s'}(\mathbb{T}^n ; dt) = L^{s'}$, dont l'image de Fourier est, sur L^s, la fonction $\varphi \to e^{-\|\varphi\|^s_{L^s}}$ (prop. XV,6;1) ; elle est de type p, pour $0 \leq p < s$ et de cotype p pour tout $p \geq 0$. Or, d'après le corollaire 1 de la prop. (XIV,3;1), l'injection $L^{s'} \to (L^s)^{-\delta}$ est p-radonifiante si $\frac{\delta}{n} > \frac{1}{s'} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{s})^+$. Donc γ_s, probabilité cylindrique de type p sur $L^{s'}$, est de Radon dans $(L^s)^{-\delta}$, pour $\frac{\delta}{n} > \frac{1}{s'} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{s})^+$; comme p peut être pris arbitrairement proche de s, il en sera ainsi si $\frac{\delta}{n} > \frac{1}{s'}$. Mais alors γ_s, probabilité cylindrique de cotype 0 sur $L^{s'}$, est de Radon dans $(L^s)^{-\delta}$; par application du théorème de dualité (corollaire 2 de la prop. (XXIV,3;1)) (la propriété d'approximation de la page (V,4) est vérifiée pour $L^{s'}$), l'injection transposée $(L^{s'})^{\delta} \to L^s$ est 0-radonifiante. Le lemme 2 de la page (XIV,12) affirme alors que $(L^{s'})^{\alpha} \to (L^s)^{\beta}$ est sûrement 0-radonifiante, si $\frac{\alpha - \beta}{n} > \frac{1}{s'}$.

Nous sommes donc en présence des 2 résultats suivants :

1) Si $\frac{\gamma - \delta}{n} > \frac{1}{2}$, $(L^1)^{\gamma} \to (L^2)^{\delta}$ est 0-radonifiante (obtenu pour $s = 2$) ;

2) Si $\frac{\gamma - \delta}{n} > \frac{1}{s'}$, $1 < s < 2$, $(L^{s'})^{\gamma} \to (L^s)^{\delta}$ est 0-radonifiante.

Considérons maintenant l'injection $(L^a)^{\alpha} \to (L^b)^{\beta}$, $1 \leq a, b \leq +\infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\frac{\alpha - \beta}{n} > (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^+$. Supposons qu'elle se factorise par $(L^a)^{\alpha} \to (L^c)^{\gamma} \to (L^d)^{\delta} \to (L^b)^{\beta}$ $\frac{\alpha - \gamma}{n} > (\frac{1}{a} - \frac{1}{c})^+$, $\frac{\delta - \beta}{n} > (\frac{1}{d} - \frac{1}{b})^+$; et $c = 1$, $d = 2$, $\frac{\gamma - \delta}{n} > \frac{1}{2}$, ou $c = s'$, $d = s$, $\frac{\gamma - \delta}{n} > \frac{1}{s'}$; alors elle sera 0-radonifiante. Il y a lieu d'examiner tous les cas possibles.

A) Le cas $c = 1$, $d = 2$, est utilisable si

$$\frac{\alpha-\beta}{n} > \left(\frac{1}{a} - 1\right)^+ + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b}\right)^+ = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b}\right)^+ = \text{Max}\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{b}\right) = \sigma$$

B) Le cas $c = s'$, $d = s$, est utilisable s'il existe s, $1 < s < 2$, tel que

$$\frac{\alpha-\beta}{n} > \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{s'}\right)^+ + \frac{1}{s'} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{b}\right)^+ = \text{Max}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{s'}\right) - \frac{1}{b} + \text{Max}\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{s}\right)$$

$$= \text{Max}\left(1, \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \frac{1}{s'} + \frac{1}{b}, \frac{1}{a} + \frac{1}{s}\right) - \frac{1}{b} = \tau_s \quad ;$$

ce cas sera utilisable si $\frac{\alpha-\beta}{n} > \tau = \underset{1 \leq s \leq 2}{\text{Min}} \tau_s$.

Les deux fonctions $\frac{1}{s'} \mapsto \frac{1}{s'} + \frac{1}{b}$, $\frac{1}{s'} \mapsto \frac{1}{a} + \frac{1}{s}$, ont pour somme $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1$, leurs graphiques (le 1er croissant, le 2ème décroissant) se croisent pour $\frac{1}{s'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + 1\right)$, qui est $\leq \frac{1}{2}$ si et seulement si $a \geq b$; la valeur commune des 2 fonctions en ce point est la demi-somme, soit $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1\right)$. Donc si $a \geq b$, $\tau = \text{Max}\left(1, \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1\right)\right) - \frac{1}{b}$ $= \text{Max}\left(1, \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - \frac{1}{b} = \text{Max}\left(1 - \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$. Si $a \leq b$, nous retiendrons seulement que $\tau \geq 1 - \frac{1}{b}$ et $\tau \geq \frac{1}{a}$, donc $\tau \geq \text{Max}\left(1 - \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$.

La comparaison de A et B montre que $(L^a)^\alpha \to (L^b)^\beta$ sera 0-radonifiante, toutes les fois que $\frac{\alpha-\beta}{n} > \text{Min}(\sigma, \tau)$.

<u>Premier cas</u> : $b \geq 2$. Alors $\sigma = 1 - \frac{1}{b} \geq \frac{1}{2}$, et, comme $\tau \geq 1 - \frac{1}{b}$, $\text{Min}(\sigma, \tau) = 1 - \frac{1}{b}$.

<u>Deuxième cas</u> : $b \leq 2$, $a \leq 2$.
Alors $\sigma = \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{b}$, et, comme $\tau \geq \frac{1}{a} \geq \frac{1}{2}$, $\text{Min}(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}$.

<u>Troisième cas</u> : $b \leq 2$, $a \geq 2$.
Alors $\sigma = \frac{1}{2}$, et $\tau = \text{Max}\left(1 - \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right) \leq \frac{1}{2}$, donc $\text{Min}(\sigma, \tau) = \text{Max}\left(1 - \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$,

On passe facilement de $\mathbb{T}^n$ à $\mathbb{R}^n$, en remplaçant L^r par L^r_{loc}.
Utilisons les notations du corollaire 1 de la prop.(XIV, 1;1), $W^{a,\alpha} = (L^a_{loc})^\alpha$, éventuellement M^α si $a = 1$, éventuellement C^α si $a = +\infty$:

<u>Proposition (XXV, 1bis;1)</u> : <u>L'injection canonique $W^{a,\alpha} \to W^{b,\beta}$ est surement 0-radonifiante, toutes les fois que</u> :

$$\frac{\alpha-\beta}{n} > \left(1-\frac{1}{b}\right) \text{, si } b \geq 2 \quad ;$$

$$\frac{\alpha-\beta}{n} > \frac{1}{2} \quad \text{si } b \leq 2 \text{ , } a \leq 2 \quad ;$$

$$\frac{\alpha-\beta}{n} > \operatorname{Max}\left(1-\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right) \quad \text{, si } b \leq 2 \text{ , } a \geq 2 \quad ;$$

<u>soit, dans tous les cas, si</u>

$$\frac{\alpha-\beta}{n} > \operatorname{Max}\left(1-\frac{1}{b}, \operatorname{Min}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{a}\right)\right) .$$

Ce résultat est souvent bien meilleur que celui que donnerait le corollaire 1 de la porp.(XIV, 1;1) même pour des injections 1-radonifiantes.
