Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

S. Chevet

Conditions suffisantes d'existence de versions à trajectoires uniformément continues et application aux fonctions aléatoires gaussiennes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. nº 22, p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A24_0>

© Séminaire Laurent Schwartz
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

CONDITIONS SUFFISANTES D'EXISTENCE DE VERSIONS A TRAJECTOIRES UNIFORMEMENT CONTINUES ET APPLICATION AUX FONCTIONS ALEATOIRES GAUSSIENNES

par S. CHEVET

Exposé N° 22

27 Avril 1970

Comme dans l'exposé précédent, K est un espace uniforme précompact et métrisable, d une distance sur K compatible avec la structure uniforme de K, (E,δ) un espace métrique complet et $\tilde{X} : K \to L^0(\Omega, P; E)$ une fonction aléatoire. De plus, dans cet exposé, η désignera une fonction de $]0,\alpha] \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ $(\alpha > 0)$ telle que pour tout $a > 0$, $h \to \eta(h,a)$ est une fonction croissante, et $\eta(h,a) \to 0$ quand $h \to 0$.

Dans ce qui suit, quand il n'y aura aucun risque de confusion, on notera aussi par $\tilde{X}$ une version arbitraire de $\tilde{X}$.

Dans l'exposé XXI, nous avions été amené à considérer la condition suivante :

(A) "Il existe une suite $(M_n, \alpha_n, b_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(K) \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$ telle que $(M_n, \alpha_n)_n$ vérifie $p_{(K,d)}$, $\sum_n b_n < \infty$ et

$$\sum_n \operatorname{card} \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) \sup_{\{s,t\} \in \mathfrak{M}_n(3\alpha_n)} P(\delta(\tilde{X}(s), \tilde{X}(t)) \geq b_n < +\infty \text{ ."}$$

Nous avions montré (corollaire 2, proposition (XXI,3;1)) que si $\tilde{X}$ est continue et satisfait (A), alors $\tilde{X}$ est à trajectoires uniformément continues sur K.

Dans cet exposé nous avons l'intention de donner des applications de ce résultat. On a trivialement le

<u>Théorème XXII</u> : Supposons $\tilde{X} : K \to L^0(\Omega, P; E)$ continue. Alors, si la condition (C) :

(C) "il existe deux suites $(\alpha_n)_n$ et $(b_n)_n$ de réels > 0, telles que $\alpha_n \downarrow 0$, $\sum_n b_n < \infty$ et

$$\sum_n P^2(K;K,d,\alpha_{n+1}) \sup_{\substack{(s,t) \in K^2 \\ d(s,t) \leq 3\alpha_n}} P[\delta(\tilde{X}(s), \tilde{X}(t)) \geq b_n] < \infty \text{ "}$$

<u>est satisfaite</u>♦, $\tilde{X}$ <u>est à trajectoires uniformément continues sur</u> K.

<u>Remarque 1</u> : Rappelons (voir exposé XVIII) que $\operatorname{Log} P(K;K,d,\alpha_{n+1}) = H_K(K;d,\alpha_{n+1})$ est l'entropie de K par rapport à K et d et que

$$H_K(K;d,\alpha_{n+1}) \leq C(K;d,\alpha_{n+1}) \leq H(K;d,\alpha_{n+1}) \ .$$

On obtient ainsi des conditions suffisantes analogues à (C) en remplaçant $P(K;d,\alpha_{n+1})$ par $M(K;d,\alpha_{n+1})$ ou par $N(K;d,\alpha_{n+1})$.

<u>Remarque 2</u> : Nous verrons plus loin que l'on peut améliorer la condition (C) dans la cas où K est un compact convexe de $\mathbb{R}^k$.

<u>Définition</u> : On dira qu'on a la condition $(A_{\eta,K,d})$ (resp. la condition $(C_{\eta,K,d})$) si l'on a :
"Il existe une suite $(M_n,\alpha_n,b_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(K)\times\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}_*^+$ telle que $(M_n,\alpha_n)_n$ satisfait $(p_{K,d})$, $\sum_n b_n<\infty$ et

$$\sum_n \operatorname{card} \mathfrak{M}_n(3\alpha_n)\eta(3\alpha_n,b_n)<\infty \text{ "}$$

(resp. "Il existe une suite $(\alpha_n,b_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}_*^+$ telle que $\alpha_n\downarrow 0$, $\sum_n b_n<\infty$ et $\sum_n P(K;d,\alpha_{n+1})\eta(3\alpha_n,b_n)<\infty$").

<u>Remarque 3</u> : Dans le § 1, nous verrons que l'on peut avoir la condition $(A_{\eta,K,d})$ sans avoir la condition $(C_{\eta,K,d})$ et qu'il existe des fonctions η pour lesquelles les conditions $(A_{\eta,K,d})$ et $(C_{\eta,K,d})$ sont équivalentes.

<u>Remarque 4</u> : La condition $(C_{\eta,K,d})$ est plus maniable que la condition $(A_{\eta,K,d})$. Notons que $P(K;d,\alpha_{n+1})\to 0$, quand $\alpha_n\to\infty$ (si K est infini), tandis que $\eta(3\alpha_n,b_n)\to 0$, quand $n\to+\infty$.

♦Dans ce qui suit, on écrira $P(K;d,\alpha_{n+1})$ au lieu de $P(K;K,d,\alpha_{n+1})$.

Bien entendu si $\widetilde{X} : K \to (\Omega, P; E)$ satisfait

$$P(\delta(\widetilde{X}(s), \widetilde{X}(t)) \leq \eta(d(s,t), a)$$

dès que $d(s,t) \leq \alpha$ et si $(A_{\eta,K,d})$ (resp. $(C_{\eta,K,d})$) est vérifiée, alors $\widetilde{X}$ est à trajectoires uniformément continues sur K.

Donnons dès maintenant un exemple : soit $\widetilde{X} : \mathbb{R}^k \to L^0(\Omega, P)$ une fonction aléatoire du mouvement brownien à k paramètres de temps et soit $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^k$. $\widetilde{X}$ satisfait donc

$$P(|\widetilde{X}(s) - \widetilde{X}(t)| \geq a) \leq \eta(|s-t|, a)$$

avec

$$\eta(h,a) = \frac{\sqrt{h}}{\pi a} \exp\left(-\pi \frac{a^2}{h}\right) .$$

Comme pour tout compact K de $\mathbb{R}^k$, il existe une constante réelle >0, C_K, telle que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

$$P(K; d, \varepsilon) \leq C_K (1/\varepsilon)^k$$

et que si $\alpha_n = 1/2^n$, $b_n = 1/n^2$, la série de terme général

$$\frac{1}{(\alpha_{n+1})^k} \eta(3\alpha_n, b_n)$$

converge, $\widetilde{X}$ est donc à trajectoires continues sur $\mathbb{R}^k$.

§ 1. COMPARAISONS DES CONDITIONS $(A_{\eta,K,d})$ et $(C_{\eta,K,d})$

1) Nous allons commencer par comparer $\mathfrak{M}_n(3\alpha_n)$ et $\operatorname{card} M_{n+1}$.

Théorème (XXII,1;1) : soit K un compact d'un espace vectoriel normé de norme $\|.\|$. Si K est convexe et si (M_n,α_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{P}(K)\times\mathbb{R}_*^+$ satisfaisant $p_{(K,\|.\|)}$, alors

$$\operatorname{card}\mathfrak{M}_n(2\alpha_n)\geq\frac{1}{2}\operatorname{card}M_{n+1}\ .$$

Démonstration (simple) : Par définition, $\mathfrak{M}_n(2\alpha_n)$ est la famille des parties de K à deux éléments s et t tels que (s,t) ou (t,s) appartienne à $M_n\times M_{n+1}$ et $d(s,t)\leq 2\alpha_n$. Trivialement

$$\operatorname{card}\mathfrak{M}_n(2\alpha_n)\geq\frac{1}{2}\operatorname{card}A_n+\operatorname{card}B_n$$

avec

$$A_n=\{(s,t);\ s\neq t,\ s\in M_{n+1}\cap M_n\ ,\ t\in M_n\ ,\ \|s-t\|\leq 2\alpha_n\}\quad ,$$

$$B_n=\{(s,t);\ s\in M_{n+1}\backslash M_n\ ,\ t\in M_n\ ,\ \|s-t\|\leq 2\alpha_n\}\ .$$

Mais, par définition même de M_n,

$$\forall\ t\in M_{n+1}\ ,\ \exists\ s\in M_n : \|s-t\|\leq\alpha_n\quad ;$$

donc

$$\operatorname{card}B_n\geq\operatorname{card}(M_{n+1}\backslash M_n)\ .$$

D'autre part, si $\operatorname{card}(M_{n+1}\cap M_n)\geq 2$, alors :

$$\forall\ s\in M_n\ ,\ \exists\ t\neq s\ /\ t\in M_n\ ,\ \|s-t\|\leq 2\alpha_n\ . \tag{1}$$

Sinon il existerait $s_o\in M_n$, tel que pour tout $t\in M_n$, distinct de s, on ait $\|s-t\|>2\alpha_n$. Par suite, si $t_o\neq s_o$, $t_o\in M_n$ et si s_1 est le point du

segment $[s_o, t_o]$ tel que $\|s_o - s_1\| = \alpha_n$, on a pour tout $t' \in M_n$

$$\|t' - s_1\| \geq \|t' - s_o\| - \|s_o - s_1\| > \alpha_n ,$$

ce qui contredit la définition de M_n , puisque $s_1 \in K$.
Par suite, en appliquant (1) à chaque $s \in M_n \cap M_{n+1}$, on déduit

$$\text{card } A_n \geq \text{card } M_n \cap M_{n+1} . \qquad \underline{\text{cqfd}}$$

<u>Théorème (XXII,1;2)</u> : <u>Soient S un corps convexe borné de</u> $\mathbb{R}^k$, p_S <u>la jauge de</u> S <u>et</u> K <u>un compact de</u> $\mathbb{R}^k$ <u>,d'intérieur non vide. Soient</u> $(M_n)_n$ <u>une suite de parties</u> α_n <u>S-discernables de</u> K <u>et</u> $(\alpha_n)_n$ <u>une suite de réels</u> > 0.
<u>Si la suite</u> $(M_n, \alpha_n)_n$ <u>satisfait</u> $p_{(K, p_S)}$, <u>alors</u>

$$\text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) \leq 4^k \text{ card } M_{n+1} \quad ;$$

<u>si, de plus</u>, K <u>est convexe, alors</u>

$$\text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) = O(\text{card } M_{n+1}) = O((\alpha_{n+1})^{-k}) \quad .$$

<u>Remarque</u> : $u_n = O(v_n) \Leftrightarrow (\exists\ A > 0,\ B > 0 : A u_n \leq v_n \leq B u_n ,\ \forall\ n)$.

<u>Démonstration</u> : Tout d'abord, pour tout $s \in M_{n+1}$, le nombre d'éléments de M_n tels que $p_S(s-t) \leq 3\alpha_n$ est au plus égal à $M(s+3\alpha_n S, \alpha_n S)$, donc au plus égal à 4^k (cf. proposition 6, § 1, exposé XVIII).
En outre, K ayant un point intérieur, toujours d'après la proposition 6

$$M(K, \alpha_{n+1} S) = O((\alpha_{n+1})^{-k})$$

$$P(K; K, \alpha_{n+1} S) = O((\alpha_{n+1})^{-k}) \quad ;$$

donc

$$\text{card } M_{n+1} = O((\alpha_{n+1})^{-k}) \quad .$$

D'où, si K est convexe

$$\text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) = O(\text{card } M_{n+1}) = O((\alpha_{n+1})^{-k}) \quad .$$

<u>Remarque</u> : Si $K = \prod_{i=1}^{k}[0,a_i]$ $(a_i > 0)$, si $p \in [1,\infty]$, si (ε_n) est une suite de réels > 0, telle que $\varepsilon_n \downarrow 0$, si $M_n = M_k(\varepsilon_n)$ [cf. exemple (XXI,3;1)], si $\alpha_n = k^{1/p}\,\varepsilon_n$ et si d est la distance associée à la norme $\|.\|_p$, alors

$$\text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) = O(\text{card } M_{n+1}) = O((\varepsilon_n)^{-k}).$$

2) <u>Conséquences</u>

a) Si $\tilde{X} : K \to L^0(\Omega,P;E)$ <u>est à trajectoires uniformément continues sur</u> K, <u>la condition (A) n'est pas toujours satisfaite</u>.

Considérons pour cela l'exemple suivant : prenons pour K le compact $[0,1]$ de $\mathbb{R}$, pour d la distance $(x,y) \to |x-y|$ et pour $\tilde{X}$ la fonction aléatoire $t \to t\,Y_o$ de $[0,1]$ dans $L^0(\Omega,P)$, où Y_o est une variable aléatoire réelle relative à (Ω,P), de loi celle de Cauchy, c'est-à-dire

$$P(Y_o \geq a) = \frac{1}{\pi}\int_a^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

(donc $P(|Y_o| \geq a) = \frac{2}{\pi}\,\text{Arctg}\,\frac{1}{a}$, si $a > 0$).

On a :

- $\tilde{X}$ est à trajectoires (uniformément) continues sur $[0,1]$;
- $u_n = \text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) \sup_{\{s,t\}\in\mathfrak{M}_n(3\alpha_n)} P\{|X_s - X_t| \geq a\}$

$$\geq \text{card } M_{n+1}.P(|Y_o| \geq \frac{b_n}{\alpha_{n+1}}) \geq \frac{1}{\alpha_{n+1}}\,\text{Arctg}\,\frac{\alpha_{n+1}}{b_n} \quad ,$$

d'où, quelles que soient les suites $(M_n,\alpha_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que $(M_n,\alpha_n)_n$ vérifie $p_{(K,d)}$ et $\sum_n b_n < \infty$, la série de terme général u_n diverge.
La condition (A) n'est donc pas vérifiée. <u>cqfd</u>

b) <u>La condition</u> $(A_{\eta,K,d})$ <u>peut être satisfaite sans que</u> $(C_{\eta,K,d})$ <u>le soit</u>.

Il suffit de considérer une fonction aléatoire réelle $\widetilde{X} : [0,1] \to L^0(\Omega,P)$ satisfaisant :

$$P(|\widetilde{X}(t)-\widetilde{X}(s)| \geq a) \leq \eta(|t-s|,a)$$

pour tout s, t dans $[0,1]$ et pour tout $a>0$, avec

$$\eta(h,a) = \gamma\left(\frac{h}{a}\right)^{3/2} ,$$

où γ est constante. On prend $K=[0,1]$, d la distance $(x,y) \to |x-y|$. $(C_{\eta,[0,1],d})$ ne peut être satisfaite, car il existe $C>0$, tel que

$$P^2([0,1],d,\alpha_{n+1})\eta(3\alpha_n,a) \geq \frac{C}{\alpha_{n+1}^2} \cdot \frac{(\alpha_{n+1})^{3/2}}{b_n^{3/2}} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$$

pour toutes les suites $(\alpha_n)_n$ et $(b_n)_n$ de réels >0 vérifiant $\alpha_n \downarrow 0$ et $\sum_n b_n < +\infty$. Par contre $(A_{\eta,[0,1],d})$ est vérifiée : il suffit de prendre $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ et $(M_n)_n$ une suite de parties de K telle que $(M_n, \frac{1}{2^n})$ vérifie $P_{([0,1],d)}$.

<u>Remarque</u> : il en est ainsi de la fonction aléatoire $t \to tY_0$ de $[0,1]$ dans $L^0(\Omega,P)$ avec Y_0 variable aléatoire réelle, dont la loi est la loi stable d'indice $\frac{3}{2}$ (cf. définition § 5, exposé XV).

c) Comme application immédiate du théorème (XXII,1;2) nous avons le

<u>Théorème XXII,1;3</u> : <u>Soit</u> G <u>un espace vectoriel normé de dimension finie</u> k. <u>Soit</u> η <u>une fonction de</u> $]0,\alpha] \times \mathbb{R}^+$ <u>dans</u> $\mathbb{R}^+$ $(\alpha>0)$ <u>telle que, pour tout</u> $a>0$, $h \to \eta(h,a)$ <u>est une fonction croissante et</u> $\eta(h,a) \to 0$, <u>quand</u> $h \to 0$.

<u>Soit</u> $\widetilde{X} : G \to L^0(\Omega, P; E)$ <u>une fonction aléatoire telle que, pour tout couple</u> (t, s) <u>de</u> G <u>vérifiant</u> $d(s,t) \leq \alpha$, <u>on ait</u>

$$P\{\delta(\widetilde{X}(s), \widetilde{X}(t)) \geq b\} \leq \eta(d(s,t), b).$$

<u>Alors, s'il existe deux suites</u> $(\alpha_n)_n$ <u>et</u> $(b_n)_n$ <u>de réels</u> > 0 , <u>telles que</u>

$$\alpha_n \downarrow 0, \sum_n b_n < \infty, \sum_n \frac{\eta(3\alpha_n, b_n)}{\alpha_{n+1}^k} < +\infty , \qquad (1)$$

<u>$\widetilde{X}$ est à trajectoires continues sur G.</u>

<u>Remarque</u> : Malheureusement, si K est un compact convexe d'un espace vectoriel normé de dimension infinie, nous n'avons pu généraliser le théorème (XXII,1;2). Nous ne savons même pas, si l'on a toujours $\frac{\text{card } M_{n+1}}{\text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n)} \to 0$. Pour K fixé, on peut chercher à déterminer de manière précise card $\mathfrak{M}_n(3\alpha_n)$ bien qu'une estimation non grossière de card $\mathfrak{M}_n(3\alpha_n)$ ne soit pas toujours intéressante dans l'étude de la convergence de la série de terme général $u_n = \text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n).\eta(3\alpha_n, b_n)$. Nous allons, dans ce qui suit, donner un exemple de calcul de card $\mathfrak{M}_n(3\alpha_n)$ sans nous préoccuper de la série u_n.

<u>Exemple</u> : Prenons $G = c_o$ (c_o est l'espace de Banach formé des suites numériques tendant vers zéro avec la norme uniforme) ; soit $(a_i)_i$ une suite de réels > 0 , telle que $a_i \downarrow 0$. Soit $\| \ \|_\infty$ la norme usuelle dans G et $U = \{x \in c_o : \|x\|_\infty < 1\}$. Considérons $K = \{y \in c_o \ ; \ y = (x_n a_n)_n \ , \ \sup_n |x_n| \leq 1\}$.

K est bien un compact convexe de c_o.

- Déterminons d'abord un $\varepsilon\overline{U}$-réseau pour K. Posons, pour tout n,

$$U_n = \{x; x \in \mathbb{R}^n \ , \ x = (x_1, \ldots, x_n), \sup_{1 \le i \le n} |x_i| < 1\} \ ,$$

$$K_n = \prod_{i=1}^{n} [-a_i, a_i] \ .$$

Soit, pour tout $\varepsilon > 0$, la suite $(P_n(\varepsilon))_n$ où :

$$P_n(\varepsilon) \subset K_n \ ,$$

$$P_n(\varepsilon) = \{x; x \in K_n, x = (x_1, \ldots, x_n), x_i \neq \pm a_i, \ x_i/\varepsilon \in \mathbb{Z}, \ i=1, \ldots, n\} \ .$$

On vérifie que $P_n(\varepsilon)$ est un $\varepsilon\overline{U}_n$-réseau pour K_n et que $P_n(\varepsilon)$ est εU_n-discernable.
Considérons alors, pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $f(\varepsilon) = \sup\{n; a_n > \frac{\varepsilon}{2}\}$ et le sous-ensemble $R(\varepsilon)$ de K défini comme suit :

$$y \in R(\varepsilon) \Leftrightarrow \begin{array}{l} y \in K \\ y_k = 0, \quad \text{si } k > f(\varepsilon) \\ (y_1, \ldots, y_{f(\varepsilon)}) \in P_{f(\varepsilon)}(\varepsilon) \end{array}$$

$R(\varepsilon)$ est un $\varepsilon\overline{U}$-réseau pour K et est une partie εU-discernable. Remarquons que

$$\text{card } P_n(\varepsilon) = \prod_{i=1}^{n} \{2[\frac{a_i}{\varepsilon}] + \varepsilon_i^*\} \ ,$$

avec $\varepsilon_i^* = -1$, si $\frac{a_i}{\varepsilon}$ est entier, $\varepsilon_i^* = 0$, sinon.

- Estimons maintenant card $\mathfrak{M}_n(3\alpha_n)$, lorsque $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$ et $M_n = R(\frac{1}{2^n})$. On supposera pour cela que pour tout i, $a_i = \frac{1}{2^i}$.

On a l'estimation immédiate :

$$\text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) \leq 8^{f(\alpha_n)} \text{ card } M_{n+1} \quad ; \qquad (1)$$

d'autre part, on sait que :

"estimation grossière" : $\text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) \leq \text{card } M_n \text{ card } M_{n+1}$, (2)

"estimation inférieure" : $\text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) \geq \frac{1}{2} \text{ card } M_{n+1}$. (3)

Posons $\rho_n = 8^{f(\alpha_n)} \text{ card } M_{n+1}$, $\delta_n = \text{card } M_n \text{ card } M_{n+1}$ et comparons ρ_n, δ_n et card M_{n-1} en considérant les rapports $\frac{\rho_n}{\delta_n}$, $\frac{\rho_n}{\text{card } M_{n+1}} = 8^{f(\alpha_n)}$.

Comme $f(\alpha_n) = n$ et

$$\text{card } M_{n+1} = \text{card } P_{f(\alpha_{n+1})}(\alpha_{n+1}) = P_{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2^{(n+1)(n+2)/2} ,$$

on a $\frac{\rho_n}{\delta_n} = \frac{8^{f(\alpha_n)}}{\text{card } M_n} = 2^{-n(n-5)/2}$.

Il est alors immédiat que l'estimation (1) est bien meilleure que l'estimation grossière.

3) Donnons maintenant un cas où $(A_{\eta,K,d})$ et $(C_{\eta,K,d})$ sont équivalentes.

<u>Théorème (XXII,1;4)</u> : Soient α un réel >0 et $\Phi :]0,\alpha] \to \mathbb{R}_*^+$ une fonction croissante telle que $\Phi(h) \to 0$, quand $h \to 0$. Soit K un espace uniforme précompact et métrisable et soit d une distance sur K compatible avec la structure uniforme de K.

Considérons la fonction η :

$$(h,a) \to \eta(h,a) = \frac{\Phi(h)}{\pi a} \exp\left(-\frac{\pi a^2}{\Phi^2(h)}\right) .$$

Alors :

i) la condition $(C_{\eta,K,d})$ est satisfaite si et seulement si il existe deux suites $(\alpha_n)_n$ et $(b_n)_n$ de réels >0, telles que $\alpha_n \downarrow 0$, $\sum_n b_n < \infty$ et la série (S) de terme général $P(K;d,\alpha_{n+1})\ \eta(3\alpha_n, b_n)$ est convergente.
De plus, pour que (S) soit convergente, il faut que :

$$\sum_n \sqrt{H_K(K;d,\alpha_{n+1})}\ \Phi(3\alpha_n) < +\infty \quad ; \tag{1}$$

ii) si $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels >0, telle que $\alpha_n \downarrow 0$ et (1) est vérifiée, alors, si la série de terme général $\sqrt{\Phi(3\alpha_n)}$ converge (<u>ou</u> s'il existe un réel $M>0$ et un entier n_o tel que

$$H_K(K;d,\alpha_n) \geq M \operatorname{Log} n\ ,\ \forall\ n \geq n_o)$$

la condition $(C_{\eta,K,d})$ est vérifiée ;

iii) si K est un compact convexe d'un espace vectoriel normé $(G,\|.\|)$ les conditions $(C_{\eta,K,\|.\|})$ et $(A_{\eta,K,\|.\|})$ sont équivalentes.

<u>Démonstration</u> : Remarquons tout d'abord que la convergence de la série $\sum_n P(K;d,\alpha_{n+1})\ \eta(3\alpha_n, b_n)$ implique celle de la série

$$\sum_n P(K;d,\alpha_{n+1})\ \eta(3\alpha_n, \lambda\, b_n)$$

où $\lambda > 1$.
Posons $u_n = P(K;d,\alpha_{n+1})\ \eta(3\alpha_n, b_n)$, $w_n = \Phi(3\alpha_n)/b_n$ et $a_n = \Phi(3\alpha_n)\sqrt{H_K(K;d,\alpha_{n+1})}$.

<u>Montrons i)</u> : Supposons la série $\sum_n u_n$ convergente et montrons que l'on a $(C_{\eta,K,d})$.
On a :

$$u_n = \exp\left[H_K(K,d,\alpha_{n+1}) - \pi\,\frac{b_n^2}{\Phi^2(3\alpha_n)}\right] \cdot \frac{\Phi(3\alpha_n)}{\pi\, b_n}\ ,$$

c'est-à-dire

$$u_n = \frac{w_n}{\pi} \exp\left[\frac{1}{w_n^2}\left(\frac{a_n^2}{b_n^2} - \pi\right)\right]$$

La série $\sum_n u_n$ étant convergente, il existe un réel >0 M_o tel que

$$a_n^2 \leq \pi M_o b_n^2 . \qquad (2)$$

(Sinon, il existerait une sous-suite w_{n_k} telle que $\Sigma x_{n_k} \exp\left(\frac{k}{w_{n_k}}\right) < +\infty$, ce qui est impossible).

Montrons alors que la série de terme général $v_n = P^2(K;d,\alpha_{n+1})$ $\eta(3\alpha_n, \sqrt{M_o+1}\, b_n)$ est convergente.

On a :

$$v_n = \exp\left[\frac{1}{w_n^2}\left(2\frac{a_n^2}{b_n^2} - \pi(M_o+1)\right)\right] \frac{w_n}{\pi\sqrt{M_o+1}} ;$$

et ainsi, par (2),

$$v_n \leq \frac{1}{\sqrt{M_o+1}} u_n .$$

Par suite, la série de terme général v_n converge et $(C_{\eta,K,d})$ est donc satisfaite.

D'autre part, d'après (2), si l'on a $(C_{\eta,K,d})$, on a aussi $\sum_n a_n < \infty$, c'est-à-dire (1).

<u>Montrons ii)</u>. S'il existe $M>0$ et $n_o \in \mathbb{N}$, tel que $H_K(K;d,\alpha_n) \geq M \operatorname{Log} n$ $(n \geq n_o)$, on a, en prenant $b_n = a_n.(1+\frac{2}{M}).\frac{1}{\pi}$, convergence de la série $\sum_n u_n$, si la série $\sum_n a_n$ converge. D'autre part, si les séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n \sqrt{\Phi(3\alpha_n)}$ sont convergentes, on a, en posant $b_n = \sup(a_n, \sqrt{\Phi(3\alpha_n)})$ sont

convergentes, on a, en posant $b_n = \sup\left(a_n, \sqrt{\Phi(3\alpha_n)}\right)$,

$$\Sigma\, b_n < \infty \quad \text{et} \quad u_n \leq w_n \leq \sqrt{\Phi(3\alpha_n)} \ ;$$

par conséquent $(C_{\eta,K,d})$ est vérifiée.

Enfin, <u>on a iii)</u>, d'après la partie i) de ce théorème et le théorème (XXII,1;1).

<u>Remarque</u> : Si $(c_n)_n$ est une suite de réels >0, telle que $c_n \downarrow 0$, on a équivalence de :

- il existe P réel >0 tel que $c_n \leq \frac{P}{\sqrt{\operatorname{Log} n}}$ $(n \geqslant n_o)$;
- il existe P' réel >0 tel que la série $\sum_n c_n \exp\left(-\frac{P'}{c_n^2}\right)$ converge. C'est ceci qui nous a amenés à considérer le cas "$H_K(K;d,\alpha_n) \geq M \operatorname{Log} n$, pour $n \geq n_o$".

4) Terminons ce paragraphe en faisant une remarque sur la famille $\mathcal{S}$ des suites (M_n, α_n, b_n) d'éléments de $\mathcal{P}(K) \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$ telles que $(M_n, \alpha_n)_n$ vérifie $P_{(K,d)}$, $\sum_n b_n < \infty$ et

$$\sum_n \operatorname{card} \mathfrak{M}_n(3\alpha_n)\ \eta(3\alpha_n, b_n) < +\infty .$$

Nous allons montrer (au moyen d'un exemple) que l'on peut trouver des suites $(M_n, \alpha_n, b_n)_n$ de $\mathcal{S}$ pour lesquelles il existe une autre suite (P_n, β_n) extraite de la suite (M_n, α_n) telle que

$$(P_n, \beta_n, b'_n) \notin \mathcal{S}$$

quelle que soit la suite $(b'_n)_n$ de réels >0 vérifiant $\sum_n b'_n < \infty$.

<u>Exemple</u> : Soit α un réel >0, inférieur à $\frac{1}{e}$, Soit θ un réel >0 et soit $\widetilde{X} : [0,1]^k \to L^0(\Omega, P)$ une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée telle que

$$E(|\widetilde{X}(s)-\widetilde{X}(t)|^2) \leq \left(\mathrm{Log}\ \frac{1}{\|s-t\|_\infty}\right)^{-(\theta+1)}$$

pour tous les s et t dans $[0,1]^k$ vérifiant $\|s-t\|_\infty < \alpha$.

On en déduit

$$P(|\widetilde{X}(t)-\widetilde{X}(s)| \geq a) \leq \eta_\theta\ (\|s-t\|_\infty, a)$$

avec

$$\eta_\theta(h,a) = \frac{\Phi_\theta(h)}{\pi a} \exp\left(\frac{-\pi a^2}{\Phi_\theta^2(h)}\right), \quad \Phi_\theta(h) = \left(\left|\mathrm{Log}\ \frac{1}{h}\right|\right)^{-\frac{(\theta+1)}{2}}.$$

<u>Prenons</u> $K = [0,1]^k$. On a :

$$H_K(K;\|\cdot\|_\infty, \alpha_n) = O(\mathrm{Log}\ \frac{1}{\alpha_n}) \quad ;$$

d'où

$$\sqrt{H_K(K;\|\cdot\|_\infty, \alpha_{n+1})}\ \Phi_\theta(3\alpha_n) = O\left(\sqrt{\left(\mathrm{Log}\ \frac{1}{3\alpha_n}\right)^{-\theta-1}\left(\mathrm{Log}\ \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)}\right).$$

Par conséquent, si $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels >0, s et B deux réels >0 tels que $\alpha_n \downarrow 0$, $\alpha_n \leq \frac{B}{n^s}$ (si n assez grand), on a équivalence de :

1. il existe une suite $(b_n)_n$ de réels >0, telle que

$$\sum_n b_n < \infty\ ,\ \sum_n P(K;\|\cdot\|_\infty, \alpha_{n+1})\ \eta_\theta(3\alpha_n, b_n) < \infty \quad ;$$

2. La série S_θ de terme général $\sqrt{\operatorname{Log}\frac{1}{\alpha_{n+1}}\left(\operatorname{Log}\frac{1}{3\alpha_n}\right)^{-(\theta+1)}}$ converge.

On constate immédiatement que :

- si $\alpha_n = 1/2^{2^n}$, S_θ converge pour tout $\theta > 0$ (donc pour tout $\theta > 0$, $(A_{\eta_\theta}, K, \|\cdot\|_\infty)$ est satisfaite) ;
- si $\alpha_n = 1/2^{n^k}$, S_θ converge si et seulement si $\theta > \frac{2}{k}$;
- si $\alpha_n = 1/2^{n^k}$, S_θ converge si et seulement si $\theta > 1$;
- si $\alpha_n = 1/n^k$ ou si $\alpha_n = 1/2^{2^{2^n}}$, S_θ diverge pour tout θ.

§ 2. FONCTIONS ALEATOIRES GAUSSIENNES A TRAJECTOIRES CONTINUES

Dans ce paragraphe, nous allons donner une condition suffisante pour qu'une fonction aléatoire gaussienne soit à trajectoires continues sur un compact K. Cette condition redonne un théorème de FERNIQUE (Continuité des processus gaussiens, C. R. A. S. Paris 258 (1964, 6058-60)).

Commençons par rappeler quelques définitions.
Une variable aléatoire réelle gaussienne f relative à un espace probabilisé (Ω, P) admet des moments de tous ordres. Elle est dite <u>centrée</u> si

$$\int_\Omega f(w)\ f(dw) = 0.$$

Une fonction <u>aléatoire réelle</u> $f : T \to L^0(\Omega, P)$ est <u>dite gaussienne (centrée)</u> si toute combinaison linéaire des variables aléatoires $f(t)$ $(t \in T)$ est gaussienne (centrée). Si H est un espace de Hilbert réel, <u>une fonction aléatoire</u> $f : H' \to L^0(\Omega, P)$ <u>linéaire gaussienne</u> est dite canonique ou <u>normale</u> si la transformée de Fourier de la probabilité cylindrique λ_f sur H, associée à f, est la fonction $x \to \exp(-\pi\|x\|^2)$ de H' dans $\mathbb{R}$.

Théorème (XXII,2;1) : Soient (T,d) un espace métrique et Φ une fonction de $]0,\alpha]$ dans $\mathbb{R}^+$ croissante et telle que $\Phi(h) \to 0$, quand $h \to 0$. Posons, pour tout $\varepsilon > 0$, $\Psi(\varepsilon) = \sup\{t; \Phi(t) < \varepsilon\}$.

Si $\widetilde{X} : T \to L^0(\Omega, P)$ est une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée vérifiant

$$E(|\widetilde{X}(t)-\widetilde{X}(s)|^2) \leq \Phi^2(d(s,t))$$

pour tous s et t de T tels que $d(s,t) \leq \alpha$, alors $\widetilde{X}$ est à trajectoires continues sur tout compact K de T satisfaisant

$$\sum_n \frac{1}{2^n} \sqrt{H(K, \Psi(2^{-n})} < \infty \quad . \tag{1}$$

Remarque : Si Φ admet une fonction réciproque, soit Φ^{-1}, on a $\Phi^{-1} = \Psi$.

Démonstration : Soit K un compact de T, tel que l'on ait (1). On a :

$$P(|\widetilde{X}(t)-\widetilde{X}(s)| \geq a) \leq \eta(d(s,t), a)$$

avec

$$\eta(h,a) = \frac{\Phi(h)}{\pi a} \exp\left(-\frac{\pi a^2}{\Phi^2(h)}\right) .$$

Posons $3\alpha_n = \Psi(\frac{1}{2^n})$; d'où $\frac{1}{2^{n+1}} \leq \Phi(3\alpha_n) \leq \frac{1}{2^n}$.

On a trivialement

$$\sum_n \sqrt{\Phi^2(3\alpha_n)} < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_n \sqrt{H_K(K, \alpha_{n+1})}\ \Phi(3\alpha_n) < \infty \ .$$

On en déduit, par le théorème (XXII,1;4), que $\widetilde{X}$ est à trajectoires continues sur K. cqfd

<u>Corollaire 1</u> : Soient (T,d) un espace métrique, K un compact de (T,d) et $\widetilde{X} : T \to L^0(\Omega,P)$ une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée. Supposons qu'il existe $g : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}^+$ ayant une fonction réciproque et telle que, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit $H(K,\varepsilon) \leq g(\varepsilon)$. Alors, si Φ est une fonction de $]0,\alpha]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

a) Φ est croissante

b) $E(|\widetilde{X}(t)-\widetilde{X}(s)|^2) \leq \Phi^2(d(s,t))$, $\forall\ s,t \in T$ tels que $d(s,t) < \alpha$,

c) il existe M réel > 0 tel que $\int_M^\infty \varphi \circ g^{-1}(x^2)\,dx < \infty$,

$\widetilde{X}$ est à trajectoires continues sur K.

<u>Démonstration</u> : ψ étant défini comme dans le théorème (XXII,2;1), montrons que l'on a (1). En posant $x_n = \sqrt{g(\psi(2^{-n}))}$, on a :

$$\int_M^{+\infty} \Phi(g^{-1}(x^2))\,dx \geq \sum_{n\geq N_0} \frac{1}{2^n}\,(x_{n+1}-x_n) = \sum_{n\geq N_0} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x_{n+1} - \frac{x_{N_0}}{2^{N_0}} =$$

$$= \sum_{n\geq N_0} \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{x_{N_0}}{2^{N_0}}$$

avec N_0 entier tel que $x_{N_0} \geq M$.

Ainsi, on a convergence de la série $\sum_{n>N_0} 2^{-n}\sqrt{H(K,\psi(2^{-n}))}$. <u>cqfd</u>

<u>Corollaire 2</u> : Soit $\widetilde{X} : \mathbb{R}^n \to L^0(\Omega,P)$ une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée et soi $|\circ|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Alors, si Φ est une fonction de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

a') Φ est croissante sur un certain intervalle $]0,\alpha]$ $(\alpha>0)$,

b') $E(|\widetilde{X}(t)-\widetilde{X}(s)|^2) \leq \Phi^2(|s-t|)$, $\forall\ s,t \in T$,

c') il existe M réel > 0 , tel que $\int_M^\infty \Phi(e^{-x^2})\,dx < +\infty$,

$\widetilde{X}$ admet une version à trajectoires continues sur $\mathbb{R}^n$.

<u>Remarque</u> : Si $a > \frac{1}{2}$, la fonction $\Phi : h \to (|\mathrm{Log}\, h|)^{-a}$ vérifie a') et c') et si $\alpha > 1$, la fonction $\Phi : h \to |\mathrm{Log}\, h|^{-1/2} (|\mathrm{Log}|\mathrm{Log}\, h||)^{-\alpha}$ vérifie a') et c').

<u>Démonstration</u> : C'est immédiat, car tout compact de $\mathbb{R}^n$ est contenu dans un cube dont l'ε-entropie est asymptotique à $\mathrm{Log}\, \frac{1}{\varepsilon}$ (quand $\varepsilon \overset{>}{\to} 0$).

<u>Corollaire 3</u> (DUDLEY) : Soit H un espace de Hilbert réel, de boule unité U. Toute fonction aléatoire réelle linéaire gaussienne normale $\tilde{X} : H \to L^0(\Omega, P)$ est à trajectoires continues sur tout disque compact K de H tel que

$$\sum_n \frac{1}{2^n} \sqrt{H(K, 2^{-n} U)} < +\infty \quad , \tag{2}$$

donc en particulier sur tout disque compact K de H tel que $\rho(K,U) < 2$.

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème (XXII,2;1), si l'on a (2), $\tilde{X}$ est à trajectoires continues sur K.
Vérifions que si $\rho(K,U) < 2$, l'on a (2).
Si $\rho(K,U) < 2$, il existe deux réels > 0, ε_0 et b, tels que

$$\sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0} \frac{\mathrm{Log}\sqrt{H(K,\varepsilon U)}}{\mathrm{Log}\, 1/\varepsilon} \leq b < 1$$

donc tels que

$$\varepsilon \sqrt{H(K,\varepsilon U)} \leq (\varepsilon)^{1-b} \ , \ \forall\ \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad (\varepsilon > 0).$$

On en déduit que l'on a bien (2). <u>cqfd</u>

<u>Remarque 1</u> : SUDAKOV a montré que si $\rho(K,U) > 2$, $\tilde{X}$ ne peut être à trajectoires continues sur K (cf. appendice).

<u>Remarque 2</u> : Si $\rho(K,U) = 2$, $\tilde{X}$ peut être ou ne pas être à trajectoires continues sur K. DUDLEY a même montré qu'on peut trouver deux disques compacts K_1 et K_2 de $H = l^2$ tels que :

- $\tilde{X}$ est à trajectoires continues sur K_1 et n'est pas à trajectoires continues sur K_2 ,
- $H(K_2, \varepsilon U)/H(K_1, \varepsilon U) \to 0$, quand $\varepsilon \overset{>}{\to} 0$,
- $v_n(K_2, U)/v_n(K_1, U) \to 0$, quand $n \to \infty$.

Il a considéré :

$$K_1 = \{x = (x_n)_n \ ; \ (x_n)_n = (a_n y_n)_n \ , \ \sum_n |y_n| \leq 1 \}$$

$$K_2 = \{x = (x_n)_n \ ; \ (x_n)_n = (b_n y_n)_n \ , \ \sum_n |y_n|^2 \leq 1\}$$

avec, pour $n \geq 3$,

$$a_n = (\text{Log Log } n)^{-1/4} \cdot (\text{Log } n)^{-1/2} \ , \ b_n = (n \text{ Log } n \text{ Log Log } n)^{-1/2} .$$

<u>Remarque 3</u> : Si $EV(K,U) > -\frac{1}{2}$, alors $\tilde{X}$ n'est pas à trajectoires continues sur K [puisque $\rho(K,U) \geq -1/EV(K,U)$].

En tenant compte de l'exemple (XXI,2;2), le corollaire 3 donne le :

<u>Corollaire 4</u> : Soit H un Hilbert réel <u>séparable</u>, de boule unité U et soit V un voisinage disqué fermé de H. Soit $V^o = \{x; x \in H, \langle x, y\rangle \leq 1 , \forall\ y \in V\}$. Pour que la mesure cylindrique image de la mesure cylindrique de Gauss normale sur H par l'application $i : H \to H_V$ soit de Radon, il est nécessaire que $\rho(V^o, U) \leq 2$ et il est suffisant que $\rho(V^o, U) < 2$.

APPENDICE

Théorème : Soit H un Hilbert réel, de boule unité U, de norme $\|.\|$ et soit $f : H \to L^0(\Omega, P)$ une fonction aléatoire réelle linéaire gaussienne normale.

Si K est un disque compact de H, tel que $\rho(K,U) > 2$, f n'est pas à trajectoires bornées sur K.

Démonstration : Supposons f à trajectoires bornées sur K. Il existe donc une version f_1 de f telle que

$$P\{\omega \; ; \; \omega \in \Omega \; , \; \sup_{x \in K} | f_1(x)(\omega) | < +\infty\} = 1 \; ;$$

par conséquent, il existe α et a dans $\mathbb{R}_*^+$ tels que

$$P\{\omega \; ; \; \omega \in \Omega \; , \; \sup_{x \in K} | f_1(x)(\omega) | \leq \alpha\} = a \; .$$

On peut toujours se ramener au cas $\alpha = 1$: il suffit de remplacer K par $K_1 = \alpha^{-1}K$ (on a $\rho(K_1,U) = \rho(K,U)$). On supposera dans ce qui suit $\alpha = 1$.

Comme $\rho(K,U) > 2$, il existe b réel et une suite $(\alpha_n)_n$ de réels > 0 tels que

$$\alpha_n \downarrow 0 \; , \; \lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{Log} C(K, \alpha_n U)}{\operatorname{Log} 1/\alpha_n} > b > 2 \; .$$

Soit alors $(M_n)_n$ une suite de parties de K, α_n-discernables et telles que

$$\operatorname{card} M_n = M(K, \alpha_n U) \; ;$$

notons m_k ce nombre.

Nous allons montrer que l'on obtient une contradiction en prouvant que :

$$P\{\omega;\ \sup_{x\in M_n} f_1(x)(\omega) \le 1\} \to 0 \ , \text{ quand } n \to \infty \ .$$

Pour cela, commençons par établir le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Soient E_{n+1} un Hilbert de dimension n+1, M et ε deux réels >0. Soit $\{e_1,\dots,e_{n+1}\}$ une base orthonormale de E_{n+1} et soit E_n l'espace vectoriel engendré par les e_i d'indice $i \le n$.
Soient alors $a_1,\dots,a_n$ n éléments de E_n tels que

$$\sup_{1\le i\le n} \|a_i\| \le M \quad , \ \|a_i - a_j\| \ge \varepsilon \quad (i \ne j\ ;\ i,j = 1,\dots,n) \ . \qquad (1)$$

Alors, si on pose $F(\lambda) = \int_\lambda^{+\infty} \exp(-\pi t^2)dt \quad (\lambda \in \mathbb{R})$, $a_i^* = a_i - e_{n+1}$, $e_i^* = \dfrac{\varepsilon}{2(M^2+1)}\, e_i - e_{n+1} \quad (i=1,\dots,n)$ et si G est la mesure de Gauss normale sur E_{n+1}, on a :

$$I_1 \le I_2 \le I_3 \le I_4$$

avec

$$I_1 = F(1) \times G(\{z; z \in E_{n+1}\ ,\ \langle z, a_i\rangle \le 1, \quad i = 1,\dots,n\}) \quad ,$$

$$I_2 = G\{z\ ;\ z \in E_{n+1} \quad , \quad \langle z, a_i^*\rangle \le 0 \quad , \quad i = 1,\dots,n\} \quad ,$$

$$I_3 = G\{z\ ;\ z \in E_{n+1} \quad , \quad \langle z, e_i^*\rangle \le 0 \quad , \quad i = 1,\dots,n\} \quad ,$$

$$I_4 = \frac{1}{2^n} + \int_0^\infty e^{-\pi\lambda^2} \left[1 - F\left(\frac{2\lambda(M^2+1)}{\varepsilon}\right)\right] d\lambda \quad .$$

Preuve de ce lemme

- $I_1 \leq I_2$, puisque

$$(z = x+\lambda\ e_{n+1}\ ,\ x \in E_n) \Rightarrow \langle z, a_i^* \rangle = \langle x, a_i \rangle - \lambda$$

et que

$$I_1 = G\{z\ ;\ z = x+\lambda\ e_{n+1}\ ,\ \lambda \geq 1,\ x \in E_n,\ \langle x, a_i \rangle \leq 1\ ,\ i = 1,\ldots,n\}\ .$$

- $I_2 \leq I_3$

Soient les matrices $n \times m$ $A = ((a_{ij}))$ et $B = ((b_{ij}))$ avec

$$a_{ij} = \frac{\langle a_i^*, a_j^* \rangle}{\|a_i^*\|\ \|a_j^*\|}\quad ,\qquad b_{ij} = \frac{\langle b_i^*, b_j^* \rangle}{\|b_i^*\|\ \|b_j^*\|}\ .$$

On a, si $i \neq j$,

$$a_{ij} = \frac{\langle a_i, a_j \rangle + 1}{\sqrt{\|a_i\|^2+1}\ \sqrt{\|a_j\|^2+1}} \quad \text{et} \quad b_{ij} = \frac{1}{1+\varepsilon^2/4(M^2+1)^2}\ .$$

On vérifie que, par (1),

$$\begin{cases} a_{ij} \leq b_{ij} & i,j = 1,\ldots,n \\ a_{ii} = b_{ii} = 1 & i = 1,\ldots,n \end{cases}\ .$$

On en déduit alors, par un théorème de SLEPIAN (Bell System Tech. J 41 (1962), 463, p.481 et p.483), que $I_2 \leq I_3$.

- $\underline{I_3 \le I_4}$. Posons $C = 2(M^2+1)$. On a :

$$I_3 = \int_{\substack{x_i \le \frac{\lambda C}{\varepsilon} \\ 1 \le i \le n}} e^{-\pi(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)} e^{-\pi\lambda^2} dx_1 \dots dx_n \, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\lambda^2} \left(\int_{-\infty}^{\lambda C/\varepsilon} e^{-\pi u^2} du\right)^2 d\lambda$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\pi\lambda^2} \left[F^n\left(\frac{\lambda C}{\varepsilon}\right) + F^n\left(\frac{-\lambda C}{\varepsilon}\right)\right] d\lambda$$

$$\le \frac{1}{2^n} + \int_0^{\infty} e^{-\pi\lambda^2} \left[1 - F\left(\frac{\lambda C}{\varepsilon}\right)\right]^n d\lambda \quad . \qquad \underline{\text{cqfd}}$$

<u>Revenons à la preuve du théorème</u>

Posons $M = \sup\{\|x\| ; x \in K\}$ et $C = 2(M^2+1)$.

On a, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$P\{\omega : \sup_{x \in M_k} f(x)(\omega) \le 1\} \le \frac{1}{2^{m_k}} + \int_0^{\infty} e^{-\pi\lambda^2} \left[1 - F\left(\frac{\lambda C}{\alpha_k}\right)\right]^{m_k} d\lambda \, .$$

Or, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $\lambda > 0$,

$$\left(1 - F\left(\frac{\lambda C}{\alpha_k}\right)\right)^{m_k} \le \exp\left(-m_k \, F\left(\frac{\lambda C}{\alpha_k}\right)\right) \quad .$$

Comme

$$F\left(\frac{\lambda C}{\alpha_k}\right) = \int_{\lambda C/\alpha_k}^{\infty} e^{-\pi u^2} du \ge \frac{\lambda C}{\alpha_k} \exp\left[-2\pi C \lambda^2 \left(\frac{1}{\alpha_k}\right)^2\right] ,$$

$$m_k \ge \exp\left[\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)^b\right] , \quad b > 2$$

on a, pour tout $\lambda \geq 0$,

$$m_k \; F\left(\frac{\lambda C}{\alpha_k}\right) \to \infty \;, \qquad \text{quand } k \to \infty$$

et par suite

$$P\{\omega \,;\; \sup_{x \in M_k} \{f_1(x)(\omega)\} \leq 1\} \to 0, \text{ quand } k \to \infty \,. \qquad \underline{\text{cqfd}}$$

COMPLEMENT A L'EXPOSE XXII

DEMONSTRATION DU THEOREME DE SLEPIAN cité dans l'Appendice de cet exposé.

Théorème (SLEPIAN) : Soit E_m un espace de Hilbert réel de dimension m. Notons $\| \ \|$ la norme de E_m et G_m la mesure de Gauss normale sur E_m.
Si l'on se donne deux famille $(a_1,\dots,a_p)$ et $(b_1,\dots,b_p)$ de p éléments non nuls de E_m satisfaisant

$$a_{ij} = \frac{\langle a_i, a_j\rangle}{\|a_i\|\,\|a_j\|} \le \frac{\langle b_i, b_j\rangle}{\|b_i\|\,\|b_j\|} = b_{ij} \qquad i,j = 1,\dots,p \quad ,$$

alors

$$G_m\{x\ ;\ x \in E_m, \langle x, a_i\rangle \le 0,\ i=1,\dots,p\} \le G_m\{x; x \in E_m, \langle x, b_j\rangle \le 0, j=1,\dots,p\} \tag{1}$$

Démonstration : Notons respectivement par A et B les matrices $p \times p$ $((a_{ij}))$ et $((b_{ij}))$. Pour montrer le théorème il suffit de montrer que pour tout $m' \in \mathbb{N}_*$ et pour tout couple $(C,D) = (((c_{ij})),((d_{ij})))$ de matrices $m' \times m'$ réelles inversibles de type positif et telles que

$$c_{ii} = d_{ii}\ ,\ i=1,\dots,m' \quad ; \quad c_{ij} \le d_{ij} \quad i,j=1,\dots,m'$$

l'on a (2) :

$$\frac{1}{\sqrt{\det C}} \int_{\substack{x_i>0 \\ i=1,\dots,m'}} e^{-\pi\langle C^{-1}x, x\rangle}\, dx \le \frac{1}{\sqrt{\det D}} \int_{\substack{x_i>0 \\ i=1,\dots,m'}} e^{-\pi\langle D^{-1}x, x\rangle}\, dx$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a (2) avec $C = A+\varepsilon I$ et $D = B+\varepsilon I$ (ou I est la matrice unité $p \times p$). En faisant tendre ε vers zéro, on en déduit (1) d'apres un théorème de comparaison des convergences des fonctions caractéristiques et des fonctions de répartition associées.

Montrons donc (2).

Si $x = (x_1, \ldots, x_{m'}) \in \mathbb{R}^{m'}$, on notera $x > 0$ si $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, m'$. Considérons pour tout $\lambda \in [0,1]$ la matrice $P(\lambda) = ((p_{ij}(\lambda))) = \lambda C + (1-\lambda) D$ et soit ($\lambda \in [0,1]$)

$$I(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\det P(\lambda)}} \int_{\substack{x \in \mathbb{R}^{m'} \\ x > 0}} \exp(-\pi < P^{-1}(\lambda)x, x >) dx .$$

Nous allons montrer que $\lambda \mapsto I(\lambda)$ est une fonction croissante sur $[0,1]$, ce qui impliquera (2).

Commençons pour cela par introduire quelques notations. $\mathfrak{M}_{m'}$ désignera la famille des matrices $m' \times m'$ à coefficients réels $P = ((p_{ij}))$ telles que $\det P > 0$ et $p_{ii} = c_{ii}$ $(i = 1, \ldots, m')$ et τ l'application $P = ((p_{ij})) \mapsto (p_{ij})_{i<j; i,j=1,\ldots,m'}$ de $\mathfrak{M}_{m'}$ dans $\mathbb{R}^{m'(m'-1)/2}$; τ est injective. Soient aussi les applications $g : \mathbb{R}^{m'} \times \tau(\mathfrak{M}_{m'}) \mapsto \mathbb{R}^+$ et $J : \tau(\mathfrak{M}_{m'}) \mapsto \mathbb{R}^+$ telles que, pour tout $P \in \mathfrak{M}_{m'}$, tout $x \in \mathbb{R}^{m'}$,

$$g(x ; \tau(P)) = \frac{1}{\sqrt{\det P}} \exp(-\pi < P^{-1}x, x >)$$

et

$$J(\tau(P)) = \int_{\substack{x \in \mathbb{R}^{m'} \\ x > 0}} g(x ; \tau(P)) dx.$$

Trivialement, pour tout $\lambda \in [0,1]$, $P(\lambda)$ est dans $\mathfrak{M}_{m'}$. Posons $p(\lambda) = \tau(P(\lambda))$. Nous avons

$$\frac{dI}{d\lambda}(\lambda) = \sum_{i<j} \frac{\partial J}{\partial p_{ij}} (p(\lambda))(d_{ij} - c_{ij})$$

et montrons que $\frac{dI}{d\lambda}(\lambda)$ est positif pour tout $\lambda \in [0,1]$).

Soit $P \in \mathfrak{M}_{m'}$ et $i < j$ $(i,j = 1,\ldots,m')$; pour tout $y \in \mathbb{R}^{m'}$

$$\frac{\partial g}{\partial p_{ij}}(y,\tau(P)) = \frac{\partial}{\partial p_{ij}} \int_{\mathbb{R}^{m'}} \exp(-\pi < Px,x >)\exp(2\pi i < x,y >)\, dx$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial y_i\, \partial y_j}(y,\tau(P))$$

et par suite

$$\frac{\partial J}{\partial p_{ij}}(\tau(P)) = \int_{\substack{\tilde{x} \in R_{ij} \\ \tilde{x} > 0}} g_{ij}(\tilde{x},\tau(P))\, d\tilde{x}$$

où $R_{ij} = \prod_{\substack{1 \le k \le m' \\ k \neq i,j}} R_k$, $R_k = \mathbb{R}$ et $g_{ij}(\tilde{x},\tau(P)) = g(x,\tau(P))$ avec $x_k = \tilde{x}_k$ si $k \neq i,j$ et $x_i = x_j = 0$.

Par conséquent, pour tout $P \in \mathfrak{M}_{m'}$ et pour tout (i,j) tel que $i < j$; $i,j = 1,\ldots,m'$

$$\frac{\partial J}{\partial p_{ij}}(\tau(P)) \ge 0 \quad ;$$

et ainsi

$$\frac{dI}{d\lambda}(\lambda) = 0 \quad , \quad \forall\, \lambda \in [0,1].$$

<u>cqfd</u>