Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

S. Chevet

Existence de versions à trajectoires uniformément continues

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 21, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A23_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE L. SCHWARTZ 1969-1970

EXISTENCE DE VERSIONS A TRAJECTOIRES UNIFORMEMENT CONTINUES

par S. CHEVET

Exposé N° 21

20 Avril 1970

Dans nos exposés, nous utiliserons les définitions des exposés N° 6 et N° 13.

§ 1. INTRODUCTION

Dans tout cet exposé, on se donne (Ω, P) un espace probabilité, T un espace uniforme, K un sous espace de T, métrisable et précompact pour la structure uniforme induite par celle de T et d une distance sur K compatible avec cette structure uniforme. On se donne aussi (E,δ) un espace métrique complet et $\widetilde{X}$ une fonction aléatoire relative à (Ω,P), définie sur T et à valeurs dans E (c'est-à-dire une application de T dans $L^0(\Omega,P\,;E)$. On notera $\mathcal{P}(K)$ la famille des parties de K.

X est une version de $\widetilde{X}$, si X est une application de T dans $\mathcal{L}^0(\Omega,P\,;E)$ telle que, pour tout $t\in T$, $X(t)$ est un élément de (la classe) $\widetilde{X}(t)$. Chacune des fonctions $t \to X(t)(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ définies sur T est une trajectoire de X. Pour toute partie S de T, X_S désignera la restriction de X à S.

Définition (XXI,1;1) : La fonction aléatoire $\widetilde{X}$ est dite à trajectoires uniformément continues sur $S\subset T$, s'il existe une version X de $\widetilde{X}$ telle que l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels que la restriction à S de la trajectoire $X(.)(\omega)$ n'est pas uniformément continue sur S, muni de la structure uniforme induite par celle de T, est P-négligeable.

Définition (XXI,1;2) : Dans le cas où $E = \mathbb{C}$, on dit que la fonction aléatoire $\widetilde{X}$ est à trajectoires bornées sur $S\subset T$, s'il existe une version X de $\widetilde{X}$ telle que l'ensemble des $\omega\in\Omega$ pour lesquels la restriction à S de la trajectoire $X(.)(\omega)$ n'est pas bornée sur S (c'est-à-dire si $\sup\{X(x)(\omega)\,;\,x\in S\} = +\infty$) est P-négligeable.

Nous nous proposons de trouver certaines conditions suffisantes pour que $\widetilde{X}$ soit à trajectoires uniformément continues sur K ; ces conditions feront intervenir de manière essentielle la notion de ε-recouvrement introduite dans l'exposé N° 18. En particulier, nous donneront une condition suffisante au moyen de l'ε-entropie.

Commençons par rappeler un théorème bien connu.

<u>Théorème fondamental</u> : Soit D une partie de K, dénombrable et partout dense dans K. K est toujours un espace uniforme métrisable et précompact, (E,δ) un espace métrique complet et $\widetilde{X}$ une application de K dans $L^o(\Omega,P;E)$ (ici K = T). On a équivalence de :

i) $\widetilde{X}$ est à trajectoires uniformément continues sur K ;

ii) $\widetilde{X}$ est continue et à trajectoires uniformément continues sur $D \subset K$.

Nous rappelons (exposé N° 6) que $\widetilde{X}$ est dite continue si l'application $\widetilde{X}$ de K dans $L^o(\Omega,P;E)$ est continue.

Rappelons aussi la preuve de ce théorème. L'implication "i) ⇒ ii)" est triviale. Montrons donc : "ii ⇒ i". Par hypothèse ii), il existe Ω_o tel que ${}^c\Omega_o$ est P-négligeable et tel que pour tout $\omega \in \Omega_o$, la restriction à D de la trajectoire $x \to X(x)(\omega)$ est uniformément continue sur D muni de la structure uniforme induite de celle de K.

Soit alors $a \in E$ (fixé) et soit l'application $(x,\omega) \to Y(x,\omega)$ de $K \times \Omega$ dans E définie comme suit :

. si $\omega \in \Omega_o$, $x \to Y(x,\omega)$ est le prolongement par uniforme continuité à K de l'application $x \to X_D(x)(\omega)$ (définie sur D).

. si $\omega \notin \Omega_o$, $Y(x,\omega) = a$ pour tout $x \in K$.

On vérifie que $x \to Y(x,.)$ est bien une version de $\widetilde{X}$ à trajectoires uniformément continues sur K. Par définition

$$Y(x) \in \widetilde{X}(x), \quad \forall\, x \in D ;$$

si $x \in K\setminus D$, il existe une suite $\{x_n\}$ d'éléments de D telle que $x_n \to x$ dans K, d'où

$$Y(x_n,\omega) = X(x_n)(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} Y(x,\omega), \quad \forall \omega \in \Omega_o .$$

Par conséquent

$$Y(x,.) \in \mathcal{L}^o(\Omega,P\,;E), \qquad \forall\, x \in K ;$$

et comme $\widetilde{X}$ est continue

$$Y(x) \in \widetilde{X}(x), \quad \forall\, x \in K.$$

<u>Remarque</u> : Si $T = K$, si $(\Omega', P', \widetilde{X}')$ est isonome à $(\Omega, P, \widetilde{X})$ et si $\widetilde{X}$ est à trajectoires uniformément continues sur K, alors $\widetilde{X}'$ est aussi à trajectoires uniformément continues sur K.
Si K est compact, on peut dans le théorème remplacer i) par i') :
"$\widetilde{X}$ est à trajectoires continues sur K".

§ 2. <u>LIEN AVEC L'EXPOSE N° 13</u>

Soit G un espace vectoriel localement convexe séparé, $\mathcal{K}$ la famille des parties compactes de G et $f : G' \to L^{0}(\Lambda, \mu)$ une fonction aléatoire linéaire sur G.
Si pour tout $A \in \mathcal{K}$, A est métrisable, alors, d'après la proposition (XIII, 3;1), f est décomposée, si et seulement si la mesure cylindrique λ_f associée à f est de Radon. Il est donc nécessaire que f admette une version à trajectoires linéaires continues sur $G'_{\mathcal{T}}$ avec $\mathcal{T}$ topologie localement convexe séparée sur G' compatible avec la dualité entre G et G' et c'est suffisant si G est souslinien.

Dans certains cas, on peut se limiter à chercher si f est à trajectoires uniformément continues sur certains compacts métrisables. Donnons quelques exemples.

<u>Exemple (XXI.2;1)</u> : Soit G un Banach <u>séparable</u> ; soit $f : G' \to L^{0}(\Lambda, \mu)$ une fonction aléatoire sur G'. Notons U_λ la boule fermée de rayon λ de G', munie de la structure uniforme induite par $\sigma(G', G)$. U_λ est donc un compact métrisable. On a équivalence de :

i) la mesure cylindrique λ_f associée à f est de Radon sur G ;

ii) f est à trajectoires uniformément continues sur $G'_{\mathcal{K}}$;

iii) $f : G'_{\mathcal{K}} \to L^{0}(\Lambda, \mu)$ est continue et f est à trajectoires uniformément continues sur $D \subset G'_{\mathcal{K}}$, avec D partie dénombrable de U_1, partout dense dans U_1.

Remarquons que si l'on a iii), il existe un Q-sous espace vectoriel de G' dénombrable partout dense dans G'_K, soit F_1, et il existe une version de f, foit f_1, telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $x \to f_{1F_1}(x)(\omega)$ est linéaire continue sur F_1 muni de la structure uniforme induite par celle de G'_K. On en déduit facilement que f est décomposée.

Exemple (XXI,2;2) : Soit H un Hilbert réel séparable, et soit $f : H' \to L^0(\Lambda,\mu)$ une fonction aléatoire linéaire sur H' associée à la mesure cylindrique de Gauss sur H, soit n [c'est-à-dire la transformée de Fourier de n est $x \to \exp(-\pi\|x\|_H^2)$]. Soit C un disque fermé borné de H' et C^0 le polaire de C. On a :

1°) Si f est à trajectoires bornées sur C, C est un compact de H';

2°) Si C est un compact de H', on a équivalence de :

a) f est à trajectoires uniformément continues sur C muni de la structure uniforme induite par celle de H ;

b) f est à trajectoires uniformément continues sur C muni de la structure uniforme induite par $\sigma(H'_C, H_{C^0})$;

c) la mesure cylindrique image de la mesure cylindrique n par l'application canonique $i : H \to H_{C^0}$ est de Radon.

Montrons 1°) et 2°) : notons p_{C^0} la jauge de C^0 et H_{C^0} le complété de $H/p_{C^0}^{-1}(0)$ muni de la norme $\dot{p}_{C^0}$ correspondant à p_{C^0}.

Preuve du 1°) : Soit $D \subset C$, dénombrable et partout dense dans C. Si f est à trajectoires bornées sur C, on a :

$$\mu\{\omega \; ; \; \sup_{x\in D}|f(x)(\omega)| < +\infty\} = 1.$$

Mais, d'après l'exposé N° 18, cela exige que D soit un précompact de H', donc que C soit un compact de H'. D'où 1°).

Preuve du 2°) : a) est équivalent à b) car, d'une part, C est $\sigma(H'_C,H_{C^0})$ compact (H'_C étant le dual de H_{C^0}) et d'autre part, sur C, la structure uniforme séparée $\sigma(H'_C,H_{C^0})$ est moins fine que la structure uniforme de H' (puisque l'application $i : H \to H_{C^o}$ est continue, donc l'application $t_i : H' \to H'_C$ est uniformément continue pour les structures uniformes $\sigma(H',H)$ et $\sigma(H'_C, H_{C^o})$.

b) est équivalent à c), par l'exemple (XXI,2;1) puisque $i : H \to H_{C^o}$ est compacte.

§ 3. ETUDE SYSTEMATIQUE DES VERSIONS DE X A TRAJECTOIRES UNIFORMEMENT CONTINUES SUR K

Pour cela, introduisons quelques définitions et quelques notations.

Définition (XXI,3;1) : K étant toujours un espace uniforme métrisable et précompact et d une distance sur K compatible avec la structure uniforme de K, on dit que la suite $(M_n, \alpha_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(K) \times \mathbb{R}_*^+$ satisfait la propriété $p_{(K,d)}$ si :

a) $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \downarrow 0$;

b) M_n est une partie finie de K telle que pour tout $x \in K$, il existe $y \in M_n$ tel que $d(x,y) \leq \alpha_n$ [c'est-à-dire M_n est un α_n-réseau fini de (K,d)].

Si de plus

c) card $M_n = N(K, \alpha_n)$, $\forall n$

(avec $N(K,\alpha_n)$ égal au plus petit nombre d'éléments que peut comporter un recouvrement de (K,d) par des parties de diamètre $\leq \alpha_n$) on dit que la suite $(M_n, \alpha_n)_n$ satisfait $P_{(K,d)}$.

Remarque 1 : Si la suite $(M_n, \alpha_n)_n$ vérifie $p_{(K,d)}$, $D = \bigcup_n M_n$ est dénombrable et partout dense dans K.

Remarque 2 : Plus généralement, on peut définir les suites $(M_n, W_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(K) \times \mathcal{P}(K^2)$ vérifiant p_K, comme les suites $(M_n, W_n)_n$ telles que

a') $(W_n)_n$ est une suite fondamentale décroissante d'entourages symétriques de l'espace uniforme K,

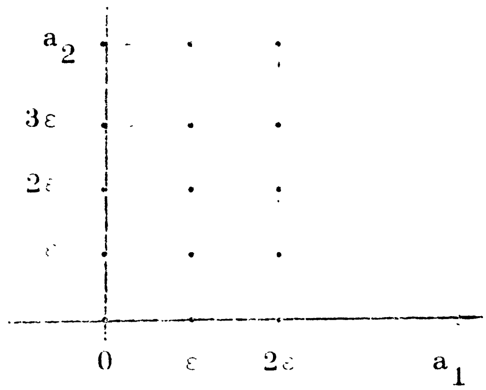
et

b') M_n est un W_n-réseau fini pour K (pour tout n).

<u>Notation</u> : Soit une suite $(M_n, \alpha_n)_n$ satisfaisant $p_{(K,d)}$. A la suite $(M_n)_n$ et à tout $\beta > 0$, on associe la suite $(\mathfrak{M}_n(\beta))_n$ où $\mathfrak{M}_n(\beta)$ est la famille des parties de K à deux éléments s et t tels que (s,t) ou (t,s) appartienne à $M_n \times M_{n+1}$ et $d(s,t) \leq \beta$.

<u>Exemple (XXI,3;1)</u> : Soit $T = \mathbb{R}^k$ et soit $K = \prod_{i=1}^{k} [0,a_i]$ $(a_i > 0,\ i = 1,\dots,k)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons

$$M_k(\varepsilon) = \{x ; x \in K,\ x = (x_i)_{1 \leq i \leq k},\ \frac{x_i}{\varepsilon} \in \mathbb{N} \text{ ou } x_i = a_i\} .$$



Notons, dans $\mathbb{R}^k$, $\|.\|_p$ la norme induite par celle de $l^p\{1,\dots,k\}$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

On vérifie aisément que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_n$ de réels > 0 tels que $\varepsilon_n \downarrow 0$ et pour tout $p \in [1,\infty]$, la suite $(M_k(\varepsilon_n),\ \varepsilon_n\, k^{1/p})_n$ satisfait $p_{(K,\|.\|_p)}$.

Donnons une condition d'existence d'une version de $\tilde{X}$ à trajectoires uniformément continues sur K, dans le cas où K est un ensemble dénombrable, au moyen du lemme suivant :

<u>Lemme (XXI,3;1)</u> : Soient $(b_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ deux suites de réels > 0. On suppose $\sum_n b_n < \infty$. Si T = K, si K est un ensemble dénombrable et si X est une version de $\tilde{X}$, on a équivalence de :

1°) $\tilde{X}$ est à trajectoires uniformément continues sur K ;

2°) Il existe une suite $(\beta_{\sigma(n)})_n$ extraite de la suite β_n telle que

$$\sum_n P[\{\omega\in\Omega,\ \sup[\delta(X(s)(\omega),X(t)(\omega))\ ;\ (s,t)\in K^2, d(s,t)\le\beta_{\sigma(n)}]\ge b_n\}]<\infty$$

3°) Il existe une suite $(M_n,\alpha_n,\eta_n,\varepsilon_n,\varepsilon'_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(K)\times(\mathbb{R}_*^+)^4$ et un entier k_o tels que

C_1. $(M_n,\alpha_n)_n$ vérifie $p_{(K,d)}$ et $\eta_n\to 0$, $\varepsilon_n\to 0$, $\varepsilon'_n\to 0$, quand $n\to\infty$

C_2. $P(\underline{\lim}_n\, A_n)=1$, avec

$$A_n=\{\omega\in\Omega\ ;\ \sup_{\substack{(s,t)\in M_n\times M_{n+1}\\ d(s,t)\le\alpha_n+\alpha_{n+k_o}+\eta_n}}\delta(X(s)(\omega),X(t)(\omega))\le\varepsilon_n\}$$

C_3. $P(\underline{\lim}_n\, B_n)=1$, avec

$$B_n=\{\omega\in\Omega\ ;\ \forall\, s\in K,\ \exists\, t\in M_n/d(s,t)\le\alpha_n,\ \delta(X(s)(\omega),X(t)(\omega))\le\varepsilon'_n\}$$

<u>Remarque 1</u> : Ici $\underline{\lim}_n\, A_n=\bigcup_n\bigcap_{k\ge n}A_k$; si $\omega\in\underline{\lim}_n\, A_n$, $\lim 1_{A_n}(\omega)$ existe et est égale à 1. Si $P(\underline{\lim}_n\, A_n)=1$, il existe une variable aléatoire $\omega\to N(\omega)$ à valeurs entières positives, telle que si $n\ge N(\omega)$, $\omega\in\bigcap_{k\ge n}A_k$.

<u>Remarque 2</u> : La condition C_2 signifie que, pour presque tout $\omega\in\Omega$, il existe un entier $n_o(\omega)$ tel que si

$$n\ge n_o(\omega),\ (s,t)\in M_n\times M_{n+1},\ d(s,t)\le\eta_n+\alpha_n+\alpha_{n+k_o}$$

alors

$$\delta(X(s)(\omega),\ X(t)(\omega))\le\varepsilon_n\ .$$

La condition C_3 signifie que, pour presque tout $\omega\in\Omega$, il existe un entier $n'_o(\omega)$ tel que pour tout $n\ge n'_o(\omega)$ et pour tout $s\in D$, il existe $t\in M_n$ tel que $d(s,t)\le\alpha_n$ et $\delta(X(s)(\omega),\ X(t)(\omega))\le\varepsilon'_n$.

<u>Preuve du lemme</u> : 1°) signifie que l'on a, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$P[\bigcup_n \{\omega ; \sup_{\substack{(s,t)\in K^2 \\ d(s,t)\leq\beta_n}} \delta(X(s)(\omega), X(t)(\omega)) \leq b_k\}] = 1$$

On en déduit que <u>1°) implique 2°)</u>.

<u>2°) ⇒ 3°)</u> : Posons $\alpha_n = \frac{1}{3}\beta_{\sigma(n)}$ et soit alors une suite $(M_n)_n$ de parties de K telles que $(M_n,\alpha_n)_n$ vérifie $p_{(K,d)}$. Il suffit alors de prendre $k_o = 0$, $\eta_n = \alpha_n$, $\varepsilon_n = \varepsilon'_n = b_n$ pour que 3°) soit satisfaite.

<u>3°) ⇒ 1°)</u> : Soit $(s,s') \in K^2$ et soit $\omega \in B_n \cap B_{n+k_o}$; il existe alors $(t,t') \in M_n \times M_{n+k_o}$ tel que

$$d(s,t) \leq \alpha_n, \quad d(s',t') \leq \alpha_{n+k_o}$$

et

$$\delta(X(s)(\omega), X(t)(\omega)) \leq \varepsilon'_n , \quad \delta(X(s')(\omega), X(t')(\omega)) \leq \varepsilon'_{n+k_o},$$

d'où

$$\delta(X(s)(\omega), X(s')(\omega)) \leq \varepsilon'_n + \varepsilon'_{n+k_o} + \delta(X(t)(\omega), X(t')(\omega)).$$

Supposons maintenant $d(s,s') \leq \eta_n$; alors :

$$(t,t') \in M_n \times M_{n+k} \quad \text{et} \quad d(t,t') \leq \alpha_n + \alpha_{n+k_o} + \eta_n .$$

Par conséquent

$$\left.\begin{array}{l} \omega \in A_n \cap B_n \cap B_{n+k_o} \\ (s,s') \in K^2, d(s,s') \leq \eta_n \end{array}\right\} \Rightarrow \delta(X(s)(\omega),X(s')(\omega)) \leq \varepsilon_n + \varepsilon'_n + \varepsilon'_{n+k_o} .$$

On en déduit aisément 1°) (car $P(\bigcap_{k\geq n} B_k \cap A_k) \to 1$, quand $1 \to \infty$).

Le lemme est donc démontré.

<u>Proposition (XXI,3;1)</u> : Soient $(P_n,\beta_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(K) \times \mathbb{R}^+_*$ vérifiant $p_{(K,d)}$ et $(b_n)_n$ une suite de réels > 0, telle que $\sum_n b_n < +\infty$. Soit X une version de $\underset{\sim}{X}$.

Si $\tilde{X}$ est continue, on a équivalence de :

1°) $\tilde{X}$ est à trajectoires uniformément continues sur K ;

2°) il existe une suite extraite de $(P_n, \beta_n)_n$, soit $(M_n, \alpha_n)_n$, telle que

$$P[\overline{\lim_n} \{\omega ; \sup_{\{s,t\} \in \mathfrak{M}_n(3\alpha_n)} \delta(X(s)(\omega), X(t)(\omega)) \leq b_n\}] = 1. \qquad (I)$$

<u>Démonstration</u> :

1°) ⇒ 2°). C'est trivial

2°) ⇒ 1°). D'après le théorème fondamental, il suffit de montrer que $\tilde{X}$ est à trajectoires uniformément continues sur $D = \bigcup_n M_n \subset K$. Vérifions pour cela que la partie 3°) du lemme est satisfaite quand on prend

$$\eta_n = \alpha_n \ ; \quad \varepsilon_n = b_n \ , \quad \varepsilon'_n = \sum_{k \geq n} b_n \ . \ k_o = 1.$$

Trivialement C_1 et C_2 sont satisfaites. Montrons donc que l'on a bien C_3.
Posons :

$$\Lambda_n = \bigcap_{k \geq n} \{\omega ; \sup[\delta(X(t)(\omega), X(s)(\omega)) \ ; \ \{s,t\} \in \mathfrak{M}_n(3\alpha_n)] \leq b_n\}$$

D'où, pour tout $\omega \in \Lambda_n$

$$\sum_{k \geq n} \Big(\sup_{\{s,t\} \in \mathfrak{M}_k(3\alpha_k)} \delta(X(s)(\omega), X(t)(\omega))\Big) \leq \varepsilon'_n = \sum_{k \geq n} b_k .$$

Soit alors $s \in K$; on peut lui associer une suite $(s(k))_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$s(k) \in M_k, \quad d(s, s(k)) \leq \alpha_k$$

donc telle que

$$\{s(k+1), \ s(k)\} \in \mathfrak{M}_k(3\alpha_k) \ .$$

La suite $(s(k))_{k \in \mathbb{N}}$ ayant été fixée pour tout $s \in K$, on a :

$$\omega \in \Lambda_n \Rightarrow \sum_{k \geq n} \sup_{s \in K} \delta(X(s(k+1))(\omega), X(s(k))(\omega)) \leq \varepsilon'_n .$$

Donc, pour tout $s \in K$ et pour tout ω de $\bigcup_n \Lambda_n$ (c'est-à-dire pour presque tout $\omega \in \Omega$), la suite $(X(s(n))(\omega))_n$ est de Cauchy. Mais comme E est un espace métrique complet, il existe donc $Y_s(\omega) \in E$ tel que, pour tout $s \in K$ et pour tout $\omega \in \bigcup_n \Lambda_n$

$$X(s(n))(\omega) \to Y_s(\omega), \quad \text{quand } n \to \infty .$$

Soit a fixé dans E et posons, pour tout $(\omega,s) \in (\complement_\Omega \bigcup_n \Lambda_n) \times K$, $Y_s(\omega) = a$.

On vérifie aisément que, pour tout $s \in K$,

$$Y_s(.) \in \mathcal{L}^0(\Omega,P\,;E)$$

et

$$\delta(Y_s(\omega),X(s(n))(\omega)) \leq \sum_{k \geq n} \delta(X(s(k+1))(\omega),X(s(k))(\omega)), \ \forall\, \omega \in \bigcup_n \Lambda_n \tag{1}$$

Mais comme $\widetilde{X}$ est continu en probabilité et que $P(\bigcup_n \Lambda_n) = 1$, on a donc

$$Y_s(.) \in \widetilde{X}(s), \quad \forall s \in K .$$

D'où C_3 est satisfaite.

<u>Remarque 1</u> : Les notations étant celles utilisées dans la démonstration ci-dessus, on a ainsi montré qu'il existe une version de $\widetilde{X}$, soit Y, à trajectoires uniformément continues sur K, telle que, pour presque tout ω, il existe un entier $n_o(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(n \geq n_o(\omega),\ s \in K) \Rightarrow \delta(Y_s(\omega),\ Y_{s(n)}(\omega)) \leq \sum_{k \geq n} \delta(Y_{s(k+1)}(\omega),Y_{s(k)}(\omega)).$$

<u>Remarque 2</u> : Soit $K = \prod_{i=1}^{k} [0,1]$; soit $(p_n)_n$ une suite d'entiers > 0 telle que $p_n \uparrow +\infty$.

Considérons $(M_n,\alpha_n) = (M(\frac{1}{p_n}),\ \frac{k^{1/p}}{p_n})$ et $d : (x,y) \to \|x - y\|_p$.

Alors, pour tout $s \in K$, on peut prendre pour $s(n)$ le point $\left(\frac{[p_n\ s_i]}{p_n}\right)_{1 \leq i \leq k}$ $(s = (s_i)_{1 \leq i \leq k})$.

<u>Corollaire 1</u> : Soit φ une fonction positive croissante sur $]0,\infty]$ et X une version de $\tilde{X}$.
Si $\tilde{X}$ est continu et si l'on a

$$P[\underline{\lim}_{n} \bigcap_{\{s,t\}\in \mathfrak{M}_n(3\alpha_n)} \{\omega ;\ \delta(X(s)(\omega),X(t)(\omega)) \le \varphi(d(s,t))\}] = 1 \qquad \text{(II)}$$

et

$$\sum_n \varphi(3\alpha_n) < +\infty \qquad \text{(III)}$$

alors $\tilde{X}$ est à trajectoires uniformément continues sur K.

<u>Preuve</u> : La condition (III) étant satisfaite, la proposition est satisfaite avec $b_n = \varphi(3\alpha_n)$.

<u>Remarque</u> : Ce théorème sera utile dans la recherche de l'existence de conditions de Hölder pour les trajectoires d'une version X de $\tilde{X}$.

<u>Corollaire 2</u> : Supposons $\tilde{X}$ continue. S'il existe une suite $(M_n,\alpha_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(K) \times \mathbb{R}^+_*$ vérifiant $p_{(K,d)}$ et une suite $(b_n)_n$ de réels > 0 avec $\sum_n b_n < +\infty$, telles que :

$$\sum_n \operatorname{card} \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) \sum_{\{s,t\}\in \mathfrak{M}_n(3\alpha_n)} P\{\delta(X(s),X(t)) \ge b_n\} < +\infty$$

alors $\tilde{X}$ est à trajectoires uniformément continues sur K.