Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

A. Badrikian

Quelques applications

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 20 bis, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A22_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   L. S C H W A R T Z   1 9 6 9 - 1 9 7 0

QUELQUES APPLICATIONS

par A. BADRIKIAN

Exposé N° 20 bis

§ 1 - CARACTERISATION DE CERTAINS OPERATEURS LINEAIRES ENTRE BANACH AU MOYEN DE LA NOTION DE nième EPAISSEUR

1) Définitions et propriétés immédiates

Dans cet exposé, on garde les notations de l'exposé 18.

Définition : Soient E et F deux espaces normés et $T : E \to F$ linéaire continue. On appelle nième coefficient d'approximation de T et on note $\alpha_n(T)$ $(n \in \mathbb{N})$ le nombre :

$$\alpha_n(T) = \inf \{\| T - S \| \; ; \; S \in \mathcal{L}_n(E , F)\} .$$

Il est clair que $\alpha_o(T) = \| T \|$ et que la suite $\alpha_n(T)$ est décroissante.

Proposition 1 : Soient E, F, G trois espaces normés, $S \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T \in \mathcal{L}(F,G)$; quels que soient les entiers m et n on a :

$$\alpha_{m+n}(T \circ S) \leq \alpha_m(S) \; \alpha_n(T) .$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$; il existe $S_m \in \mathcal{L}_m(E,F)$ et $T_n \in \mathcal{L}_n(F,G)$ tel que :

$$\| S - S_m \| \leq \alpha_m(S) + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \| T - T_n \| \leq \alpha_n(T) + \varepsilon .$$

En outre,

$$\|(T - T_n) \circ (S - S_m)\| = \| T \circ S - T_n (S - S_m) - T \circ S_m \|$$

$$\leq \| T - T_n \| \, \| S - S_m \| .$$

Donc

$$\| T \circ S - T_n \circ (S - S_m) - T \circ S_m \| \leq (\alpha_m(S) + \varepsilon)(\alpha_n(T) + \varepsilon)$$

Or

$$T_n \circ (S - S_m) + T \circ S_m \in \mathcal{L}_{m+n}(E,G) ;$$

donc pour tout $\varepsilon < 0$

$$\alpha_{m+n}(T \circ S) \leq (\alpha_m(S) + \varepsilon)(\alpha_n(T) + \varepsilon). \text{ CQFD}$$

Il est facile de voir que, pour tout n, l'application $T \to \alpha_n(T)$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ (on caractérisera plus tard les T telles que $\alpha_n(T) = 0$).

<u>Proposition 2</u> : Si $T : E \to F$ est linéaire continue, en désignant par $\hat{T}: \hat{E} \to \hat{F}$ son prolongement, on a :

$$\alpha_n(T) = \alpha_n(\hat{T}) \ , \ \forall n \in \mathbf{N} .$$

<u>Démonstration</u> : Il est clair que

$$\alpha_n(\hat{T}) \leqslant \alpha_n(T) \quad .$$

Démontrons l'inégalité inverse.
Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\hat{S} \in \mathcal{L}_n(\hat{E},\hat{F})$ tel que

$$\| \hat{T} - \hat{S} \| \leqslant \alpha_n(\hat{T}) + \varepsilon$$

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes \hat{y}_i \quad , \quad x_i' \in \hat{E}' = E' \quad , \quad \hat{y}_i \in \hat{F} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Il existe n éléments $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans F tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \| x_i' \| \, \| \hat{y}_i - y_i \| < \varepsilon$$

et

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes y_i \in \mathcal{L}_n(E,F) .$$

Soit $\hat{S}_1$ le prolongement de S_1 à $\hat{E}$. Alors :

$$\| \hat{S} - \hat{S}_1 \| \leq \sum_{i=1}^{n} \| a_i' \| \, \| \hat{y}_i - y_i \| < \varepsilon$$

et

$$\alpha_n(T) \leq \| T - S_1 \| = \| \dot{T} - \dot{S}_1 \| \leq \| \dot{T} - \hat{S} \| + \| \hat{S} - \hat{S}_1 \| \leq \alpha_n(\hat{T}) + 2\varepsilon .$$

Donc $\alpha_n(T) = \alpha_n(\dot{T})$. CQFD

Remarque : On a en fait démontré que si $T : E \to F$ est linéaire continue et si F est un sous-espace partout dense du normé G, muni de la topologie induite, on a $\alpha_n(T) = \alpha_n(T')$ où T' désigne l'application de E dans G définie par T.
Si F est simplement un sous-espace de G, on a seulement $\alpha_n(T) \leq \alpha_n(T')$.

Proposition 3 : Si $\alpha_n(T) \to 0$, quand n augmente indéfiniment, T est compacte. (C'est immédiat).
Le résultat suivant permet de vérifier qu'un opérateur linéaire de E dans F est nucléaire.

Théorème 1 : Soient E et F deux Banach et $T : E \to F$ linéaire continue ; si $\sum_n \alpha_n(T) < \infty$, T est nucléaire.

Démonstration : Nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 1 : Soit E un espace normé et F un sous-espace de E de dimension finie n ; il existe n éléments $(a_i')_{1 \leq i \leq n}$ de E' et n éléments $y_1, \dots, y_n$ de F tels que, pour tout i, $\| y_i \| = \| a_i' \| = 1$, $\langle y_i , a_k' \rangle = \delta_{ik}$ $(k = 1, \dots, n)$ et tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, a_i' \rangle y_i \quad , \quad \forall x \in F .$$

Preuve de ce lemme : Soient $z_1, \dots, z_n$ n éléments linéairement indépendants de F. Soit U° la boule unité de E', qui est un compact pour la topologie $\sigma(E', E)$. Si $(b_i')_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie de U°, posons :

$$\Delta(b_1', \dots, b_n') = | \det \langle z_i , b_k' \rangle | ;$$

Δ est une fonction continue sur le compact $(U^\circ)^n$, donc elle atteint son maximum Δ_o. Soit $(a'_i)_{1 \le i \le n} \in (U^\circ)^n$ tel que :

$$\Delta(a'_1, \ldots, a'_n) = \Delta_o.$$

$\Delta_o > 0$, car les z_i sont linéairement indépendants.
Soient $y_1, \ldots, y_n$ n éléments de F qui sont la solution unique du systéme

$$\sum_{j=1}^{n} < z_i, a'_j > y_j = z_i \qquad (i = 1, \ldots, n) .$$

Alors

$$< y_j, a'_k > = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n) .$$

Maintenant si $b'_1, \ldots, b'_n$ sont n éléments de U°, on a

$$\sum_{j=1}^{n} < z_i, a'_j > < y_j, b'_k > = < z_i, b'_k > ,$$

donc

$$\Delta(a'_1, \ldots, a'_n) \ |\det < y_j, b'_k >| = \Delta(b'_1, \ldots, b'_n)$$

et par conséquent

$$|\det < y_j, b'_k > | \le 1$$

pour toute famille $b'_1, \ldots, b'_n$ de n éléments de U°.
En particulier, en prenant $b'_k = a'_k$, si $k \neq i$ et $b'_i = b' \in U^\circ$, on obtient

$$| < y_i, b' > | \le 1 , \qquad \forall b' \in U^\circ ,$$

donc $\| y_i \| \le 1$.

Mais puisque $\| a'_i \| \le 1$, comme :

$$1 = < y_i, a'_i > \le \| y_i \| \ \| a'_i \|$$

on en déduit

$$\| y_i \| = \| a'_i \| = 1.$$

Les y_i $(1 \leq i \leq n)$ étant linéairement indépendants dans F, tout $x \in F$ se met de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \; y_i$$

et

$$<x, a_k'> = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \; <y_i, a_k'> = \xi_k .$$

D'où le résultat.

<u>Lemme 2</u> : Soient E et F deux espaces normés et $T \in \mathcal{L}_n(E,F)$ avec rang T = n ; T se met sous la forme

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; a_i' \otimes y_i$$

avec

$$\| a_i' \| \leq 1 \quad , \quad \| y_i \| \leq 1 \quad \text{et} \quad | \lambda_i | \leq \| T \| \quad , \quad \forall \, i.$$

<u>Démonstration</u> : D'après le lemme 1, tout élément y de T(E) se met sous la forme

$$y = \sum_{i=1}^{n} < y, b_i' > y_i \qquad (b_i' \in F' \; ; \; y_i \in T(E) \; , \; \forall \, i).$$

Donc

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} < x, T' b_i' > y_i \quad , \quad \forall x \in E$$

(où T' désigne la transposée de T).

Posons $\lambda_i = \| T' b_i' \|$ (alors, $\lambda_i > 0$, $\forall$ i) et soit $a_i' = \lambda_i^{-1} (T' b_i')$;

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x, a_i' > y_i \quad , \quad \forall \, x \in E.$$

En outre

$$\| a_i' \| = 1 \quad , \quad \| y_i \| \leq 1 \quad \text{et} \quad | \lambda_i | \leq \| T \| \quad , \quad \forall \, i. \; \text{CQFD}$$

<u>On peut maintenant démontrer le théorème.</u>

Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, soit $A_n \in \mathcal{L}_{2^n - 2}(E,F)$ tel que

$$\| A - A_n \| \leq 2 \, \alpha_{2^n - 2}(T)$$

et soit $B_n = A_{n-1} - A_n$.

Alors $\dim (T(B_n)) \leq 2^{n+2}$

et

$$\| B_n \| \leq \| T - A_n \| + \| T - A_{n+1} \| \leq 4 \; \alpha_{2^n-2}(T).$$

Donc :

$$\dim (T(B_n)) \times \| B_n \| \leq 2^{n+4} \; \alpha_{2^n-2}(T).$$

Puisque $(\alpha_n(T))_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite décroissante, on a

$$\sum_n 2^{n-1} \; \alpha_{2^n-2}(T) \leq \sum_n \sum_{k=2^{n-1}-1}^{2^n-2} \alpha_k(T) = \sum_k \alpha_k(T).$$

Donc, $\sum_n \dim T(B_n) \times \| B_n \| \leq 2^5 \sum_k \alpha_k(T)$.

Maintenant, d'après le lemme 2

$$B_n x = \sum_{i=1}^{\dim T(B_n)} \lambda_i^n < x, \; a_i^n > y_i^n$$

avec :

$$\| a_i^n \| \leq 1 \; ; \quad \| y_i^n \| \leq 1 \quad , \quad |\lambda_i^n| \leq \| B_n \| \; ;$$

d'où

$$\sum_n \sum_{i=1}^{\dim T(B_n)} |\lambda_i^n| \leq \sum_n \dim T(B_n) \times \| B_n \| \leq 2^5 \sum_k \alpha_k(T).$$

Puisque pour tout $x \in E$

$$Tx = \lim_n A_{n+1}(x) = \sum_n B_n x = \sum_n \sum_{i=1}^{\dim T(B_n)} \lambda_i^n < x, a_i^n > y_i^n \; ,$$

on a démontré le théorème.

2) $n^{\text{ièmes}}$ coefficients d'approximation et $n^{\text{ièmes}}$ épaisseurs

Soient E et F deux espaces normés dont les boules unités seront désignées par U et V respectivement. Si $T : E \to F$ est linéaire, on posera $d_n(T) = d_n(TU, V)$.

<u>Théorème 2</u> : Si $T : E \to F$ est linéaire continue, on a :

$$d_n(T) \leq \alpha_n(T) \leq (n+1)\ d_n(T) \quad , \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

<u>Démonstration</u> :

$d_n(T) \leq \alpha_n(T)$ est évident car si $\varepsilon > 0$, soit $S \in \mathcal{L}_n(E,F)$ tel que $\| T-S \| \leq \alpha_n(T) + \varepsilon$; alors

$$TU \subset \| T-S \|\ V + S(E),$$

donc

$$d_n(T) \leq \| T-S \| \leq \alpha_n(T) + \varepsilon$$

et

$$d_n(T) \leq \alpha_n(T).$$

Pour démontrer la seconde inégalité, soit $\varepsilon > 0$; posons $\delta = d_n(T) + \varepsilon$. Il existe un sous-espace de G de dimension au plus égale à n tel que

$$T(U) \subset \delta\ V + G.$$

Soit $m = \dim G$; en vertu du lemme 1 ci-dessus, il existe m éléments $y_1, \dots, y_m$ de G et m éléments $a'_1, \dots, a'_m$ de F' de normes égales à un tels que $\langle y_i , a'_k \rangle = \delta_{ik}$ $(i,k = 1,\dots,m)$ et

$$y = \sum_{i=1}^{m} \langle y, a'_i \rangle y_i , \quad \forall\ y \in G.$$

Soit P l'application de F dans F de la forme $\sum_{i=1}^{n} a'_i \otimes y_i$; c'est un projecteur sur G. Alors $\| P \| \leq m$ et soit $S = P\circ T$; $S \in \mathcal{L}_m(E,F)$.

Si $x \in U$, $Tx = \delta y + z$ avec $y \in V$ et $z \in G$. Alors

$$Tx - Sx = \delta y + z - \delta\ Py - \delta\ Pz = \delta\ (y - Py).$$

Donc

$$\| Tx - Sx \| = \delta\ \| y - Py \| \leq \delta(m+1) \geq \delta(n+1) \quad , \quad \forall\ x \in U$$

et

$$\alpha_n(T) \leq \| T-S \| \leq (n+1)\ (d_n(T) + \varepsilon).\ \text{CQFD}$$

Corollaire 1. Si F est un Hilbert, on a $d_n(T) = \alpha_n(T)$.

Démonstration : Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 2 ; ici, on peut supposer que P est un projecteur orthogonal. Alors $\| y - Py \| \leq 1$ pour tout $y \in V$ et par conséquent

$$d_n(T) \leq \alpha_n(T) \leq d_n(T). \text{ CQFD}$$

Corollaire 2. Si E et F sont deux Banach et si $T : E \to F$ est nucléaire, alors $\sum_n d_n(T) < \infty$ et $\rho(TU,V) \leq 1$.

Démonstration : Cela résulte en effet du théorème 2 et du théorème 1 pour la première partie. La seconde partie est une conséquence de l'inégalité

$$\rho(TU,V) \leq \lambda((d_n(T))_n)$$

(exposé XIX, page 10, application).

Corollaire 3. Avec les notations du corollaire 2, si $\sum_n n\, d_n(T) < \infty$, T est nucléaire. Cette condition sera réalisée si $\rho(TU,V) < \frac{1}{3}$.

Démonstration : Puisque $\rho(TU,V) < 1$, on a

$$\lambda((d_n(T))_n) \leq \frac{\rho(TU,V)}{1 - \rho(TU,V)}$$

(voir exposé 20). Donc

$$\lambda((d_n(T))_n) < \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}$$

et $\lambda((d_n(T))_n) < \frac{1}{2}$ implique $\sum_n n\, d_n(T) < +\infty$. CQFD

3) Cas où E et F sont deux espaces d' Hilbert

Dans toute la suite de ce numéro E et F seront deux Hilbert. A part cela nous gardons les notations des numéros précédents.
Si $T : E \to F$ est un opérateur linéaire compact, il se met sous la forme

$$T = \sum_n \lambda_n(T)\ e_n \otimes f_n$$

où (e_n) est une famille orthonormée de E, (f_n) une famille orthonormée de F et $(\lambda_n(T))$ une suite décroissante de nombres réels positifs convergeant vers zéro.

<u>Théorème 3</u> : Si $T : E \to F$ est compacte, on a :

$$\alpha_n(T) = \lambda_n(T) \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ .$$

<u>Démonstration</u> : Posons $T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(T)\ e_i \otimes f_i$ (les $\lambda_i(T)$, e_i, f_i ont été définis plus haut.

Alors $T_n \in \mathcal{L}(E,F)$ et le rang de T_n est égal à n

$$\| Tx - T_n x\|^2 = \sum_{i \geq n} |\lambda_i(T)|^2\ (x|e_n)^2 \leq \lambda_n^2(T)\ \| x\|^2\ .$$

Donc $\alpha_n(T) \leq \| T-T_n\| \leq \lambda_n(T)$.

Réciproquement, soit $B \in \mathcal{L}_n(E,F)$:

$$Bx = \sum_{i=1}^{n} (x|a_n)\ y_n,\ \forall\ x \in E$$

avec $a_i \in E$ $(i = 1,\dots,n)$ et $y_i \in F$ $(i = 1,\dots,n)$.

Considérons le système homogène

$$\sum_{i=0}^{n} \xi_i\ (e_i|a_k) = 0 \qquad (k = 1,\dots,n) \qquad (\xi_i) \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Il admet une solution unique telle que $\sum_{i=0}^{n} |\xi_i|^2 = 1$. Posons :

$$x_o = \sum_{i=0}^{n} \xi_i\ e_i \qquad (\Rightarrow \| x_o\| = 1).$$

Alors :

$$Bx_o = \sum_{k=1}^{n} (x_o|a_k)\ y_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{n} \xi_i (e_i|a_k)\ y_k = 0$$

et :

$$\| T - B\|^2 \geq \| Tx_o - Bx_o\|^2 = \| Tx_o\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^2(T) \, |\xi_i|^2 \geq \lambda_n^2(T).$$

Puisque B est arbitraire, on en déduit $\alpha_n(T) \geq \lambda_n(T)$. D'où l'égalité.

<u>Remarque</u> : On retrouve le fait que si

$$T = \sum_n \lambda_n(T) \; e_n \otimes f_n = \sum_n \lambda'_n(T) \; e'_n \otimes f'_n$$

où (e'_n) et (f'_n) sont orthonormées dans E et F respectivement, on a :

$$\lambda_n(T) = \lambda'_n(T) \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

<u>Corollaire 1</u> : Si E et F sont des Hilberts et si T : E → F linéaire continue, on a l'équivalence des propriétés suivantes :

a) T nucléaire ;

b) $\sum_n d_n(T) < \infty$;

c) $\sum_n \alpha_n(T) < \infty$.

C'est immédiat, compte tenu du corollaire 1 du théorème 2 et du fait que T nucléaire équivaut à $\sum_n \lambda_n(T) < \infty$ (si T compacte).

<u>Corollaire 2</u> : Soit T : E → F linéaire continue. T est d'Hilbert-Schmidt si et seulement si $\sum_n d_n^2(T) = \sum_n \alpha_n^2(T) < \infty$.
Donc, T d'Hilbert-Schmidt implique $\rho(TU,V) \leq 2$.

<u>Démonstration</u> : T compacte est d'Hilbert-Schmidt si et seulement si $\sum \lambda_n^2(T) < \infty$. Le reste résulte de :

$$\rho(TU,V) \leq \lambda((d_n(T))_n) \leq 2.$$

§ 2. LES THEOREMES DE MITYAGIN

Peut-être n'est-il pas tout à fait inutile de rappeler ce qu'est un espace nucléaire.

Définition 1 : Soit E un e. l. c. séparé. E est dit nucléaire, si pour tout voisinage disqué de zéro, soit U, il existe un voisinage V disqué de zéro tel que :

$$V \subset U \quad \text{et} \quad \pi_{UV} : \hat{E}_V \to \hat{E}_U \text{ soit nucléaire.}$$

(Pour nous, une application nucléaire est une application 1 nucléaire à droite au sens de l'exposé 9, § 3, soit encore une application 1 - nucléaire à gauche).

Théorème 1 : Soit E un e.l.c. séparé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) E est nucléaire ;

b) Pour tout $c > 0$ et pour tout U, voisinage disqué de zéro, il existe un voisinage disqué de zéro V tel que $\rho(V,U) < c$;

c) Il existe $c > 0$, tel que, pour tout U voisinage disqué de zéro, il existe V voisinage disqué de zéro, tel que $\rho(V,U) < c$.

Démonstration :

. a) ⇒ b). On désignera par $\mathcal{V}(0)$ l'ensemble des voisinages disqués de zéro (ou un système fondamental).
Supposons donc E nucléaire et soit $U \in \mathcal{V}(0)$; choisissons $V \in \mathcal{V}(0)$ tel que $\pi_{UV} : \hat{E}_V \to \hat{E}_U$ soit nucléaire. Alors, d'après le corollaire 2 du théorème 2, § 1, $\sum_n d_n(\pi_{UV}) < \infty$, donc $\sum_n d_n(V,U) < \infty$ et par conséquent $\rho(V,U) < 1$, en vertu de l'exposé 19, page 10.
Soit maintenant $U \in \mathcal{V}(0)$ et soit $c < 1$. Il existe un entier n tel que $c < \frac{1}{n}$. Soit $(U_i)_{1 \le i \le n}$ une suite décroissante de voisinages de zéro

disqués contenus dans U telle que

$$\rho(U_1, U) < 1 \quad \text{et} \quad \rho(U_{i+1}, U_i) < 1 \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Alors

$$\frac{1}{\rho(U_n, U)} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\rho(U_i, U_{i-1})} \qquad (\text{avec } U_o = U)$$

d'après l'exposé 18 (proposition 5). Donc

$$\rho(U_n, U) < \frac{1}{n} \leq c$$

et a) $\Rightarrow$ b).

. Il est clair que <u>b) $\Rightarrow$ c)</u>

. Il reste donc à démontrer que c) $\Rightarrow$ a). Supposons donc que c) soit satisfaite pour un certain $c > 0$. On peut, comme il résulte de la fin de la démonstration de a) $\Rightarrow$ b), supposer que $c < \frac{1}{3}$.
Par conséquent, U étant donné, il existe $V \in \mathcal{V}(0)$ tel que $V \subset U$ et $\rho(V, U) < \frac{1}{3}$. On en déduit, d'après le corollaire 3 du théorème 2 du § 1 que π_{UV} est nucléaire. CQFD

<u>Corollaire</u> : Soit E un e.l.c. nucléaire. Pour tout $U \in \mathcal{V}(0)$ et tout compact K de U, on a $\rho(K, U) = 0$.

<u>Démonstration</u> : Si $U \in \mathcal{V}(0)$, il existe une suite de voisinages disqués de zéro (V_n) telle que :

$$\rho(V_n, U) \leq \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}^+.$$

Soit, pour tout n, λ_n tel que $K \subset \lambda_n V_n$; alors, pour tout n,

$$\rho(K, U) \leq \rho(\lambda_n V_n, U) = \rho(V_n, U) \leq \frac{1}{n} \text{ . CQFD}$$

Naturellement, on peut dans ce corollaire remplacer le mot "compact" par "borné".

Ce corollaire admet une réciproque partielle.

Lemme : Soit E un Fréchet ayant la propriété suivante : il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout compact K de E et tout voisinage disqué U de 0, on a $\rho(K,U) \leq c$. Si l'on suppose en outre que E est un espace de Schwartz, alors pour tout $U \in \mathcal{V}(0)$, il existe $V \in \mathcal{V}(0)$ tel que $\rho(V,U) \leq 2c$.

Remarque : Un espace de Schwartz est un e.l.c. séparé tel que pour tout voisinage disqué U de 0, il en existe un autre qui est précompact pour la topologie semi-normée par U.

Démonstration : Supposons le contraire. Il existerait alors un système fondamental de voisinages disqués de zéro, soit U_n, tel que :

- $\rho(U_n,U) > 2c \quad , \forall\, n$;
- chaque U_n est précompact pour la structure uniforme définie par U.

Il existe alors une suite décroissante $(\delta_n)_n$ de nombres réels strictement positifs convergeant vers zéro et une suite $(K_n)_n$ d'ensembles finis, avec $K_n \subset U_n$, pour tout n, telles que

$$H(K_n,\delta_n U) \geq H(U_n,2\delta_n U) \geq \left(\frac{1}{2\delta_n}\right)^{\frac{3c}{2}} .$$

En effet, on choisit d'abord la suite (δ_n) telle que $H(U_n,2\delta_n U) \geq \left(\frac{1}{2\delta_n}\right)^{\frac{3c}{2}}$ et l'on choisit ensuite pour K_n l'ensemble des points d'un $\delta_n U$-réseau (fini) pour U_n. Il est alors immédiat que $K = \bigcup_n K_n \cup \{0\}$ est un compact de E et que

$$\rho(K,U) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} H(K_n,\ \delta_n U)}{\operatorname{Log} \frac{1}{\delta_n}} \geq \frac{3}{2}\, c\ ,$$

ce qui entraîne une contradiction.

Comme conséquence, on a le théorème suivant :

Théorème 2 : Soit E un espace de Fréchet ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) E est nucléaire ;

b) E est de Schwartz et pour tout compact K de E et pour tout voisinage de zéro dans E, soit U, on a $\rho(K,U) = 0$.

Démonstration : Il est clair que a) implique b) car, d'une part, un espace nucléaire est de Schwartz et, d'autre part, $\rho(K,U) = 0$, d'après le corollaire du théorème 1.
b) implique a) en vertu du lemme ci-dessus et du théorème 1.

Nous ignorons si la condition "E est de Schwartz" est une conséquence de la condition $\rho(K,U) = 0$, pour tout compact K et tout voisinage disqué U.