

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. BADRIKIAN

Exposants d'entropie de compacts dans un espace norme

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 20, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970__A21_0

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E L . S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

EXPOSANTS D'ENTROPIE DE COMPACTS DANS UN ESPACE NORME

par A. BADRIKIAN

Exposé N° 20

13 Avril 1970

XX.1

Dans tout cet exposé E désignera un espace normé, U sa boule unité.

Lemme : Soit A un compact de E ; il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^+}$ d'éléments de A telle que

$$\cdot \|x_1\| = \sup_{x \in A} \|x\| = d_0(A)$$

$$\cdot d(x_{n+1}, E_n) = \sup_{x \in A} d(x, E_n) \quad n = 1, 2, \dots$$

où E_n désigne l'espace vectoriel engendré par les x_i d'indice $i \leq n$.

C'est absolument immédiat.

On posera $E_0 = \{0\}$, $a_n = d(x_{n+1}, E_n)$; il est alors clair que la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante et que

$$d_n(a, U) \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbf{N} .$$

Si en outre A est disqué et si $a_n = 0$, on peut supposer $x_{n+1} = 0$, ce que nous ferons par la suite.

Enfin, si $t > 0$, on posera

$$l(t) = l(\{a_n\}, t) = \max\{n ; n \geq 1, \frac{a_{n-1}}{n} > \frac{1}{t}\}.$$

(On a $a_0 = d_0(A)$).

Naturellement cette définition garde un sens pour toute suite numérique décroissante (a_n) .

A étant compact, pour tout t $l(t)$ est fini ; en outre la fonction $t \rightarrow l(t)$ a les propriétés suivantes :

- elle s'annule pour $0 < t < a_0^{-1}$,
- elle a des sauts égaux à un aux points $t = \frac{k}{a_{k-1}}$.

Théorème 1 : Soit A un compact disqué de E ; on a pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

$$C(A, \varepsilon U) \geq \int_0^{1/\varepsilon} \frac{l(t)}{t} dt .$$

Démonstration : Soit n tel que $a_n > 0$ et soit A_n l'enveloppe convexe équilibrée des x_i , $i \leq n$. Alors $A_n \subset A$ et par conséquent

$$M(A, \varepsilon U) \geq M(A_n, \varepsilon U) = M(A_n, \varepsilon(U \cap A_n)).$$

Soient y_1 et y_2 deux points distincts de A_n :

$$y_j = \sum_{i=1}^n \xi_i^j x_i \quad (j = 1, 2)$$

et soit $i_0 = \max\{i; \xi_i^1 \neq \xi_i^2\}$; alors

$$\|y_1 - y_2\| = \left\| \sum_{i=1}^{i_0} (\xi_i^1 - \xi_i^2) x_i \right\| \geq d[(\xi_{i_0}^1 - \xi_{i_0}^2) x_{i_0}, E_{i_0-1}] = |\xi_{i_0}^1 - \xi_{i_0}^2| a_{i_0-1}.$$

Par conséquent, si A'_n désigne le sous-ensemble (fini) de A_n formé des x de la forme

$$x = \sum_{i=1}^n \varepsilon \frac{\eta_i}{a_{i-1}} x_i, \quad \text{avec } \eta_i \in \mathbb{Z}, \forall i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{\eta_i}{a_{i-1}} \varepsilon \right| \leq 1$$

A'_n est une partie εU -discernable de A_n .

Donnons une borne inférieure pour $\text{card } A'_n$.

L'application $T : (\eta_1, \dots, \eta_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \varepsilon \frac{\eta_i}{a_{i-1}} x_i$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^n

sur E_n . T^{-1} fait correspondre à A_n "l'octaèdre" B_n :

$$B_n = \{ \vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n); \sum_{i=1}^n \left| \frac{\eta_i}{a_{i-1}} \varepsilon \right| \leq 1 \}$$

et à A'_n , l'ensemble des points à coordonnées entières situés dans cet octaèdre, soit A''_n .

Maintenant les pavés de centre dans A''_n et d'arête égale à 2 :

$$Q(\vec{\eta}) = \{ \vec{\xi} ; \xi_i = \eta_i + a_i, \sup |a_i| \leq 1 \} \quad (\vec{\eta} \in A''_n)$$

forment un recouvrement de B_n ; donc

$$\text{card } A''_n \cdot \text{vol } Q(\vec{\eta}) \geq \text{vol } B_n$$

(vol est l'abréviation de volume). Or

$$\text{vol } A(\vec{\eta}) = 2^n \quad \text{et} \quad \text{vol } B_n = 2^n \frac{1}{\varepsilon^n n!} \prod_{i=1}^n a_{i-1}.$$

Donc

$$\text{card } A'_n = \text{card } A''_n \geq \prod_{i=1}^n \frac{a_{i-1}}{\varepsilon^i}$$

et

$$C(A, \varepsilon U) \geq \text{Log card } A'_n \geq \sum_{i=1}^n \text{Log } \frac{a_{i-1}}{\varepsilon^i} \geq \sum_{i: \frac{a_{i-1}}{\varepsilon^i} > 1} \text{Log } \frac{a_{i-1}}{\varepsilon^i}$$

Mais

$$\sum_{i: \frac{a_{i-1}}{\varepsilon^i} > 1} \text{Log } \frac{a_{i-1}}{\varepsilon^i} \geq \int_{\frac{1}{a_0}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \text{Log } \frac{1}{t\varepsilon} dl(t)$$

et

$$\int_{\frac{1}{a_0}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \text{Log } \frac{1}{t\varepsilon} dl(t) = [l(t) \text{Log } \frac{1}{t\varepsilon}]_{\frac{1}{a_0}}^{\frac{1}{\varepsilon}} + \int_{\frac{1}{a_0}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{l(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{l(t)}{t} dt.$$

cqfd

Corollaire : Si $(d_n)_n$ désigne la suite des $n^{\text{ièmes}}$ épaisseurs de A , on a :

$$\lambda\left(\left(\frac{d_n}{n}\right)_n\right) \leq \lambda\left(\left(\frac{a_n}{n}\right)_n\right) \leq \rho(A, U)$$

et

$$\rho(A, U) < 1 \Rightarrow \lambda\left(\left(\frac{d_n}{n}\right)_n\right) \leq \frac{\rho(A, U)}{1 - \rho(A, U)}.$$

Démonstration : Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a

$$C(A, \varepsilon U) \geq \int_{\frac{1}{\varepsilon e}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{l(t)}{t} dt \geq l\left(\frac{1}{\varepsilon e}\right) \int_{\frac{1}{\varepsilon e}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dt}{t} = l\left(\frac{1}{\varepsilon e}\right)$$

et

$$\rho(A, U) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log } l\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}} = \lambda\left(\left(\frac{a}{n}\right)_n\right)$$

La suite du corollaire résulte de

$$\frac{1}{\lambda\left(\left(\frac{d}{n}\right)_n\right)} = \frac{1}{\lambda\left(\left(d_n\right)_n\right)} + 1 \quad \text{cqfd}$$

Théorème 2 : Supposons que E soit un Banach et que le compact disqué A de E soit de pleine approximation relativement à la suite (a_n, E_n) . Alors, pour tout n, $d_n(A, U) = a_n$; de plus, si l'on pose

$$m(t) = \max\{n ; n \geq 1, a_{n-1} > \frac{1}{t}\} \quad (t > 0)$$

On a :

$$C(A, \varepsilon U) \geq \int_{d_0/2}^{1/\varepsilon} m(t) dt \quad \text{et} \quad \rho(A, U) = \lambda\left(\left(d_n\right)_n\right).$$

Démonstration : Soient $A_n = A \cap E_n$ et $U_n = U \cap E_n$; alors, pour tout entier, $n > 0$:

$$M(A, \varepsilon U) \geq M(A_n, \varepsilon U_n) \geq \frac{m_{E_n}(A_n)}{m_{E_n}(\varepsilon U_n)}.$$

Mais d'après le lemme suivant (Lorentz) :

Lemme : Soit $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ une base de E_n telle que, pour tout $k \leq n$, l'espace vectoriel engendré par les e_i d'indice $i \leq k$ soit identique à l'espace E_k . Alors :

$$m_{E_n}(A_n) \geq m_{E_n} \left[\left\{ x ; x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_{i-1}} e_i \in U \right\} \right] \quad (\alpha)$$

On peut écrire

$$M(A, \varepsilon U) \geq \frac{\prod_{i=0}^{n-1} a_i}{\varepsilon^n}.$$

On raisonne alors comme dans le théorème précédent pour obtenir la première inégalité. En raisonnant comme dans le corollaire, on obtient

$$\rho(A, U) \geq \lambda((d_n)_n).$$

Mais on a vu que l'on a toujours $\rho(A, U) = \lambda((d_n)_n)$. D'où le second résultat du théorème 2. cqfd

Preuve du lemme (énoncé ci-dessus). Cette preuve est longue et nécessite beaucoup de notations.

Considérons tout d'abord l'isomorphisme $J : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de \mathbb{R}^n sur E_n et posons $T = J^{-1}$. Notons TU_n par U'_n , TA_n par A'_n , TE_i par E'_i . Soit

$$E' = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; x = (x_1, \dots, x_n), \left(\frac{x_i}{a_{i-1}} \right)_{1 \leq i \leq n} \in U'_n \right\}.$$

De plus, F'_k désignera l'espace vectoriel engendré par les vecteurs Te_i avec $i > k$, P_k (resp. Q_k) la projection de \mathbb{R}^n sur F'_k (resp. E'_k) avec $k = 0, \dots, n-1$ (resp. $k = 1, \dots, n$), λ_k (resp. μ_k) la mesure de Lebesgue sur F'_k (resp. E'_k) et S_k l'opérateur $(x_i)_{i>k} \rightarrow \left(\frac{x_i}{a_{i-1}} \right)_{i>k}$ de F'_k sur F'_k .

Commençons par montrer le résultat suivant :

"Si $a \in F'_k$ et si $E'(a)$ désigne la section de E' en a , on a pour tout $\lambda \in [-1, 1]$

$$\mu_k[E'(a)] = \mu_k[E'(\lambda a)]" \quad (1)$$

Posons pour cela $C_\rho = \rho E'(a) + (1-\rho) E'(-a)$. Comme E' est convexe, on a, pour tout ρ de $[0, 1]$,

$$C_\rho \subset E'(\rho a + (1-\rho)(-a)) = E'((2\rho - 1)a).$$

Mais par un théorème de Brun-Minkowski

$$(\mu_k(C_\rho))^{1/k} \geq \rho (\mu_k(C_0))^{1/k} + (1-\rho) (\mu_k(C_1))^{1/k}$$

si $0 \leq \rho \leq 1$; et comme

$$C_0 = E'(-a), C_1 = E'(a), \mu_k[E'(a)] = \mu_k[E'(-a)]$$

c'est donc que

$$\mu_k[E'(\lambda a)] \geq \mu_k(C_\rho) \geq \mu_k[E'(a)]$$

avec $\lambda = 2\rho - 1$. (1) est donc établi.

Revenons à la démonstration du lemme. On veut montrer que

$$\mu_n(E') \leq \mu_n(A'_n) . \quad (2)$$

On a, si E_0 désigne l'ensemble $\{0\}$,

$$A_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} (E_i + a_i U_n) ,$$

donc

$$A'_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} a_i P_i^{-1} P_i U'_n .$$

Posons alors

$$D_k = \bigcap_{i=k}^{n-1} a_i P_i^{-1} P_i U'_n , \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

$$C_k = \left\{ x ; x \in \mathbb{R}^n, Q_k x + \frac{1}{a_{k-1}} S_k \circ P_k x \in E' \right\}$$

et (k=1, \dots, n-1)

$$M_k = D_k \cap C_k \quad (k=1, \dots, n-1).$$

Bien entendu

$$E' \subset D_{n-1}, \quad A'_n \subset M_1 \quad (C_1 = a_0 U).$$

Pour montrer (2), nous allons montrer que :

$$\mu_n(E') \leq \mu_n(M_{n-1}) \quad \text{et} \quad \mu_n(M_k) \leq \mu_n(M_{k-1}) \quad (k=n-1, \dots, 2). \quad (3)$$

On a

$$\mu_n(E') = \int_{P_{n-1} D_{n-1}} \mu_{n-1}[E'(x_n)] dx_n$$

et par (1)

$$\mu_n(E') \leq \int_{P_{n-1} D_{n-1}} \mu_{n-1}\left[E'\left(\frac{S_{n-1}^{-1} x_n}{a_{n-2}}\right)\right] \lambda_n(dx_n) \quad (4)$$

D'autre part, si $k = 1, \dots, n-1$

$$\mu_n(M_k) = \mu_k \otimes \lambda_k(M_k) = \int_{x \in F'_k} \mu_k[M_k(x)] \lambda_k(dx)$$

où $M_k(x)$ est la section de M_k en x .

Mais :

$$\begin{aligned} x \in F'_k, \quad x \notin P_k D_k &\Rightarrow M_k(x) \neq \emptyset, \\ x \in F'_k, \quad x \in P_k D_k &\Rightarrow M_k(x) = E'\left(\frac{S_k^{-1} x}{a_{k-1}}\right); \end{aligned}$$

d'où

$$\mu_n(M_k) = \int_{x \in P_k D_k} \mu_k\left[E'\left(\frac{S_k^{-1} x}{a_{k-1}}\right)\right] \lambda_k(dx). \quad (5)$$

En outre, pour tout x de $P_k D_k$ et pour tout k tel que $2 \leq k \leq n-1$

$$\mu_k\left[E'\left(\frac{S_k^{-1} x}{a_{k-1}}\right)\right] = \int_{S_k} \mu_{k-1}\left[E'\left((x_k, \frac{S_k^{-1} x}{a_{k-1}})\right)\right]$$

avec $S_k = \{x_k; x_k \in \mathbb{R}, (x_k, \lambda) \in a_{k-1} P_{k-1} U'_n\}$; par conséquent

$$\mu_n(M_k) = \int_{(x_k, x) \in P_{k-1} D_{k-1}} \mu_{k-1}\left[E'\left((x_k, \frac{S_k^{-1} x}{a_{k-1}})\right)\right] dx_k \otimes \mu_k(dx).$$

D'où, par (1)

$$\mu_n(M_k) \leq \mu_n(M_{k-1}) \quad (k = 2, \dots, n-1)$$

et par (4) et (5)

$$\mu_n(E') \leq \mu_n(M_{n-1})$$

On a donc obtenu (3), qui implique (2). cqfd

Théorème 3 : Si E est un Hilbert et si A est un compact disqué on a :

$$EV(A) \geq - \frac{1}{\frac{a}{\lambda\left(\left(\frac{n}{n}\right)\right)}} + \frac{1}{2} .$$

Démonstration : Reprenons la démonstration du théorème 1, A_n désignant toujours l'enveloppe convexe équilibrée des x_i , $i \leq n$. Notons m'_{E_n} la mesure de Haar sur E_n telle que

$$m'_{E_n} [\{x ; x \in E_n, \|x\| \leq 1\}] = c_n,$$

où c_n est le volume de la boule euclidienne de \mathbb{R}^n .

Comme E est un Hilbert, on a :

$$m'_{E_n}(A_n) \geq \prod_{i=1}^n \frac{2a_{i-1}}{i} ;$$

d'où

$$\frac{\text{Log } m'_{E_n}(A_n)}{n \text{ Log } n} \geq \sum_{i=1}^n \frac{\text{Log } \frac{2a_{i-1}}{i}}{n \text{ Log } n} ,$$

et par conséquent

$$- \frac{1}{2} + EV(A) \geq \limsup_n \frac{\sum_{i=1}^n \text{Log } \frac{2a_{i-1}}{i}}{n \text{ Log } n}$$

Le deuxième membre de cette inégalité est égal à $-1/\lambda\left(\left(\frac{a_i}{i}\right)\right)$ d'après le théorème du §3 de l'exposé N° 19. D'où le théorème.

Si de plus, $\underline{a_i} \downarrow 0$, alors

$$\frac{1}{\lambda\left(\frac{a_i}{i}\right)} = \frac{1}{\lambda(a_i)} + 1$$

et

$$EV(A) \geq -\frac{1}{\lambda(a_i)} - \frac{1}{2} . \quad (\beta)$$

Corollaire : Sous les hypothèses du théorème 5, on a

$$\frac{1}{\rho(A,U)} \geq -EV(A) - \frac{1}{2} .$$

Démonstration : On a

$$-\frac{1}{2} + EV(A) \geq -\frac{1}{\lambda\left(\frac{d_i}{i}\right)} = \frac{-1}{\lambda(d_i)} - 1 \geq \frac{-1}{r(A)} - 1 . \quad \text{cqfd}$$

Lemme : Soit A un compact disqué de l'Hilbert E , soit la suite $(x_n, E_n)_n$ définie comme dans le lemme 1. Soit $\{e_i\}$ une famille orthonormée de E telle que l'espace vectoriel engendré par les e_i , $i \geq n$ soit identique à E_n . Soit H_1 le sous espace vectoriel fermé de H engendré par les e_i et soit

$$A_1 = \{x ; x \in H_1, d(x, E_n) \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Alors

$$A_1 \supset \{x ; x \in H_1, \sum_n [\langle x, e_n \rangle]^2 \frac{1}{a_n^2} \leq 1 \} .$$

Si en outre $\lambda((a_n)_n) < 2$, il existe $(b_n)_n$, $b_n \downarrow 0$, telle que $\sum_n b_n^2 < +\infty$ et

$$A_1 \subset \{x ; x \in H_1, \sum_n [\langle x, e_n \rangle]^2 \frac{1}{b_n^2} \leq 1 \} .$$

Démonstration : Posons $\langle x, e_n \rangle = x_n$. Par hypothèse, si $x \in A_1$ on a

$$\sum_{i \geq n} x_i^2 \leq a_n^2 .$$

Si l'on suppose $\lambda((a_n)_n) < 2$, il existe un $\varepsilon > 0$, tel que

$$\sum_n a_n^{2-\varepsilon} < +\infty .$$

Posons

$$\frac{1}{b_n^2} = \sum_{i \leq n} \frac{1}{a_i^\varepsilon} \leq \frac{n}{a_n^\varepsilon} .$$

Je dis que $\sum_n b_n^2 < +\infty$; en effet, puisque $\sum_n a_n^{2-\varepsilon} < +\infty$, on a $n a_n^{2-\varepsilon} < 1$, pour n assez grand ($n \geq m$) ; donc pour ces n

$$\frac{1}{b_n^2} \geq \frac{m}{a_1^\varepsilon} + \sum_{j=m+1}^n j^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}$$

et

$$\sum_{j=m+1}^n j^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \geq \int_m^n x^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} dx = \left[\frac{x^{\frac{2}{2-\varepsilon}}}{\frac{2}{2-\varepsilon}} \right]_m^n .$$

Donc, si $n \geq m$, $\frac{1}{b_n^2} \geq \alpha + \beta n^{\frac{2}{2-\varepsilon}}$ (avec α et β constantes indépendantes de n)
 et

$$b_n^2 \leq \frac{1}{\alpha + \beta n^{\frac{2}{2-\varepsilon}}} \Rightarrow \sum_n b_n^2 < +\infty .$$

Il reste à montrer qu'il existe $M < +\infty$ tel que

$$" \sum_{i \geq n} x_i^2 \leq a_n^2, \forall n " \Rightarrow \sum_n \frac{x_n^2}{b_n^2} \leq M .$$

or

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq n} \frac{x_k^2}{b_k^2} &= \frac{1}{a_0^\varepsilon} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} x_k^2 \right) + \dots + \frac{1}{a_i^\varepsilon} \sum_{i \leq k \leq n} x_k^2 + \dots + \frac{1}{a_n^\varepsilon} x_n^2 \\ &\leq \frac{1}{a_0^\varepsilon} a_0^2 + \dots + \frac{1}{a_i^\varepsilon} a_i^2 + \dots + \frac{a_n^2}{a_n^\varepsilon} \\ &\leq \sum_{i \leq n} a_i^{2-\varepsilon} \end{aligned}$$

et

$$\sum_k \frac{x_k^2}{b_k^2} \leq \sum_k a_k^{2-\varepsilon}, \quad \text{cqfd}$$

Corollaire : Si H est un Hilbert séparable et A un compact disque tel que
 $EV(A) < -1$, alors l'application $H_A \rightarrow H$ est d'Hilbert-Schmidt.

Il en sera ainsi en particulier si $\rho(A,U) < 1$.

Si A est en outre de pleine approximation, $H_A \rightarrow H$ est d'Hilbert-Schmidt
dès que $\rho(A,U) < 2$.

Preuve : En effet, on a vu que

$$-\frac{1}{2} + EV(A) \geq -\frac{1}{\lambda\left(\frac{a_i}{i}\right)} \quad \text{et} \quad \rho(A,U) \geq -\frac{1}{EV(A)} .$$

Mais

$$EV(A) < -1 \Rightarrow -\frac{1}{\lambda\left(\frac{a_i}{i}\right)} < -1 \Rightarrow a_i \downarrow 0 .$$

Donc, par (β)

$$EV(A) < -1 \Rightarrow \lambda((a_i)_i) < 2 .$$

et puisque

$$A \subset \left\{ x ; x \in H ; \sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2 \frac{1}{b_n} \leq 1 \right\}$$

avec $\sum_n b_n^2 < +\infty$, $H_A \rightarrow H$ est d'Hilbert-Schmidt.

Maintenant, si A est de pleine approximation, on a vu que

$$\rho(A,U) = \lambda((a_n)_n) .$$

Remarque : Si A est un disque compact d'un Hilbert, on a :

$$\rho(A,U) < 1 \Rightarrow \lambda((d_n)_n) < 2 .$$