SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. BADRIKIAN

ε-entropies ; ε-capacités ; épaisseurs (suite)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. nº 19, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A20_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   L. S C H W A R T Z   1 9 6 9 - 1 9 7 0

ε-ENTROPIES ; ε-CAPACITES ; EPAISSEURS (Suite)

par A. BADRIKIAN

Exposé N° 19

6 Avril 1970

<u>Proposition 7</u> : <u>Soit E un espace vectoriel normé dont la boule unité est désignée par U et soit $A \subset E$. A est contenue dans un sous-espace de dimension finie si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que</u> $d_n(A,U) = 0$.

<u>Démonstration</u> : la nécessité est immédiate.

Supposons donc que $d_n(A,U) = 0$ et supposons qu'il existe, dans A, n+1 éléments linéairement indépendants $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. Il existe alors n+1 éléments $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}$ de E' (dual de E) tels que

$$< x_i, x'_k > = \delta_{ik} \quad \text{(symbole de Kronecker)}$$

(pour tout $i,k = 1,2,\ldots,n+1$).
Il existe en outre $\sigma > 0$ tel que

$$"\alpha_{ik} \in \mathbb{C} \ , \ |\alpha_{ik}| \leq \sigma \ (i,k = 1,2,\ldots,n+1)" \Rightarrow \det \{\delta_{ik} - \alpha_{ik}\} \neq 0 \ .$$

Posons donc

$$\delta = \sigma(\sup_{1 \leq i \leq n+1} \|x'_i\|)^{-1} \ .$$

Puisque $d_n(A,U) = 0$, il existe un sous-espace F de E de dimension inférieure à n tel que

$$A \subset \delta U + F \ .$$

Par conséquent, chaque x_i peut se mettre sous la forme

$$x_i = \delta y_i + z_i \qquad y_i \in U \ , \ z_i \in F \ .$$

Les éléments $z_i (i=1,2,\ldots,n+1)$ étant linéairement dépendants, on a

$$\det \{ < z_i, x'_k > \} = 0 \ .$$

En outre :

$$\delta |< y_i , x'_k >| \leq \delta \| x'_k \| \leq \sigma .$$

Donc :

$$\det \{< z_i , x'_k >\} = \det \{< x_i , x'_k > - \delta < y_i , x'_k > \} \neq 0 .$$

Ce qui est contradictoire et A ne peut donc contenir plus de n éléments linéairement indépendants. cqfd.

Proposition 8 : soient E et F deux espaces normés et $T : E \to F$ linéaire continue. Soit U(resp.V) la boule unité de E (resp.F). Pour tout $A \subset E$ et tout $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a :

$$d_{m+n}(TA,V) \leq d_n(A,U) d_m(TU,V) .$$

Démonstration : c'est immédiat si $d_n(A,U) = +\infty$ et $d_m(TU,V) \neq 0$. Si $d_n(A,U) = +\infty$ et $d_m(TU,V) = 0$, le résultat reste encore vrai (avec la convention $0.\infty = 0$) car TU est contenu dans un sous-espace de F de dimension m, donc aussi TA ; et par conséquent $d_{m+n}(TA,V) = 0$.

Supposons donc $d_m(A,U) < +\infty$.

Si $\rho > d_n(A,U)$ et $\sigma > d_m(TU,V)$, il existe un sous-espace E_1 de E de dimension n et un sous-espace F_1 de F de dimension m tels que :

$$A \subset E_1 + \rho U \quad \text{et} \quad TU \subset F_1 + \sigma V .$$

Alors

$$TA \subset TE_1 + F_1 + \rho\sigma V \text{ et } \dim(TE_1 + F_1) \leq m+n \quad .$$

D'où le résultat.

Proposition 9 : Si E est un espace vectoriel normé de dimension au moins égale à n+1 et si U désigne sa boule unité fermée on a :

$$d_n(U,U) = 1 .$$

Démonstration : soit E_n un sous-espace de E de dimension égale à n et soit $x \in E \setminus E_n$; on démontre facilement par un raisonnement de compacité qu'il existe $y \in E_n$ tel que

$$\|x - y\| = d(x,E_n) = a > 0 .$$

Posons $z = \frac{1}{a}(x-y)$. Alors $\|z\| = 1$ et $d(z,E_n) = 1$. Donc pour tout sous-espace E_n de dimension n, la "déviation" de U relativement à E_n est égale à un.

cqfd.

Le résultat suivant est nettement plus difficile à démontrer. Aussi, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Lorentz "Approximation of functions" p.137-138.

Théorème 1 (Gokhberg-Krein) : si E est un Banach dont la boule unité fermée est U, pour tout sous-espace vectoriel E_{n+1} de dimension n+1, on a :

$$d_n(U \cap E_{n+1}, U) = 1 .$$

Ce théorème nous permettra de calculer des $n^{\text{ièmes}}$ épaisseurs d'ellipsoïdes. Nous introduisons auparavant une définition.

Définition : Soit E un espace normé et $A \subset C$; A est dite de pleine approximation s'il existe une suite (δ_n) de réels >0 telle que $\delta_n \downarrow 0$ et une suite croissante (E_n) de sous-espaces de E de dimension n, telles que :

$$x \in A \Leftrightarrow d(x,E_n) \leq \delta_n , \forall n \in \mathbb{N} .$$

<u>Proposition 10</u> : <u>Si E est un Banach et si $A \subset E$ est de pleine approximation (relativement à la suite</u> $(\delta_n, E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, <u>alors</u> :

$$d_n(A,U) = \delta_n \ , \ \forall \, n \in \mathbb{N} .$$

<u>En outre</u> :
$$\delta_n = \sup_{x \in A} d(x, E_n) .$$

<u>Démonstration</u> : il est clair que

$$d_n(A,U) \le d_n(x, E_n) \le \delta_n .$$

Posons $U_{n+1} = E_{n+1} \cap \{x ; \|x\| \le \delta_n\}$.
Si $x \in U_{n+1}$, on a :

$$d(x, E_k) \le \delta_n \le \delta_k \quad , \text{ si } k = 0,1,\dots,n$$

et

$$d(x, E_k) = 0 \qquad , \text{ si } k = n+1, n+2, \dots$$

Donc, d'après le théorème 1

$$d_n(A,U) \ge d_n(U_{n+1}, U) = \delta_n$$

(car $U_{n+1} \subset A$). Donc :

$$d_n(A,U) = \delta_n .$$

Il est clair en outre que le sous-espace E_n est <u>extrémal</u>, c'est-à-dire

$$\delta_n = \sup_{x \in A} d(x, E_n) = d_n(A,U). \qquad \text{cqfd.}$$

<u>Remarque</u> : dans la démonstration on a seulement utilisé deux propriétés :

- $x \in A \Rightarrow d(x,E_n) \leq \delta_n$
- $U_{n+1} = E_{n+1} \cap \{x ; \|x\| \leq \delta_n\} \subset A, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$.

Donc la proposition est vraie pour tout $A \subset E$ satisfaisant à ces conditions relativement à $(\delta_n, E_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Comme application, qui sera fondamentale dans la suite, on a la situation suivante :

Soit $E = l^p (1 \leq p < \infty)$ et soit $(\delta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels telle que $\delta_n > 0$ et $\delta_n \downarrow 0$. Soit E_n le sous-espace de l^p formé par les suites dont les coordonnées d'indices strictement supérieurs à $n+1$ sont nulles. Soit $A = \{x ; x \in l^p ; \sum_{n \geq 0} \left|\frac{x_n}{\delta_n}\right|^p \leq 1\}$ (A est un "p-ellipsoïde").

Il est clair que A satisfait aux conditions de la remarque ci-dessus. Donc $d_n(A,U) = \delta_n$, pour tout n.

Donnons enfin une propriété qui lie les $n^{\text{ièmes}}$ épaisseurs à l'ε-entropie.

Soit U un disque équilibré absorbant de l'espace vectoriel E. On écrira d_n au lieu de $d_n(A,U)$. Si $t > 0$, on pose

$$m(t) = \sup\,\{n ; n \in \mathbf{N}^+, d_{n-1} \geq t\}$$

(avec la convention $\sup \emptyset = 1$!). On a alors la :

<u>Proposition 11</u> : <u>pour tout $\varepsilon > 0$</u>

$$H(A, \varepsilon U) \leq m\left(\frac{3}{\varepsilon}\right) \text{Log}\, \frac{4(d_0 + \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

<u>Démonstration</u> : c'est trivial si $m(\frac{3}{\varepsilon}) = +\infty$.

Supposons donc $m(t) < +\infty$. Puisque $d_{m(t)} < \frac{1}{t}$, si $m(t) < \infty$, il existe un sous-espace E_m de E de dimension $m = m(t)$ tel que

$$A \subset E_m + \frac{1}{t}\, U .$$

En outre $A \subset (d_0 + \frac{1}{t})U$; donc, $A \subset E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U + \frac{1}{t}U$.
Or on a l'inégalité :

$$N(B + U', U + 2U') \leq N(B, U)$$

valable pour tout disque absorbant U de E, tout disque U' de E et tout $B \subset E$.
Donc :

$$N(A, \frac{3}{t}U) \leq N(E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U + \frac{1}{t}U ; \frac{3}{t}U)$$

$$\leq N(E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U ; \frac{1}{t}U)$$

(car, en vertu du fait que U est convexe équilibré, $\frac{1}{t}U + \frac{2}{t}U = \frac{3}{t}U$) .

On a

$$N(E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U ; \frac{1}{t}U) = N(E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t}U) ; \frac{1}{t}U \cap E_m) .$$

Or,

$$N(E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U ; \frac{1}{t}U \cap E_m) \leq M(E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U ; \frac{1}{2t}U \cap E_m)$$

(en vertu de la proposition 1 de l'exposé 18 et de la convexité de U).
En outre, d'après la proposition 6 de l'exposé 18

$$M(E_m \cap (d_0 + \frac{1}{t})U ; \frac{1}{2t}U \cap E_m) \leq \left[\frac{2(d_0 + \frac{1}{t})}{\frac{1}{2t}}\right]^m .$$

Il suffit alors de prendre le logarithme et de prendre $\varepsilon = \frac{1}{t}$. cqfd.

§ 3. INDICE DE CONVERGENCE D'UNE SUITE

Définition : Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels positifs telle que $b_n \downarrow 0$. On appelle indice de convergence de cette suite et on note $\lambda((b_n)_n)$ le nombre

$$\inf\{\alpha \; ; \; \alpha > 0, \; \alpha < \infty, \; N_\alpha(b_n) < \infty\} ,$$

où $N_\alpha(b_n)$ a la signification usuelle.
Si $b_n \downarrow a > 0$, il est commode de définir $\lambda((b_n)_n)$ par $\lambda((b_n)_n) = +\infty$.
Quand aucune confusion ne sera possible, on notera λ au lieu de $\lambda((b_n)_n)$.

Proposition 12 : On a, si $b_n \downarrow 0$

$$\lambda((b_n)_n) = \limsup_n \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}\frac{1}{b_n}} = \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\operatorname{Log} n(\varepsilon)}{\operatorname{Log}\frac{1}{\varepsilon}}$$

où $n(\varepsilon) = \sup\{n \; ; \; n \in \mathbb{N}, \; b_n \geq \varepsilon\}$.

Démonstration :

$$1) \qquad \lambda((b_n)_n) \leq \limsup_n \frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}\frac{1}{b_n}} = s$$

C'est trivial, si $s = +\infty$. Sinon, soit $\alpha > s$; il existe alors $\varepsilon_o > 0$ tel que $\alpha - \varepsilon_o > s$ et alors

$$b_n^\alpha \leq \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\alpha-\varepsilon_o}}} \quad \text{(si n suffisamment grand) ;}$$

donc :

$$\Sigma\, b_n^\alpha < +\infty .$$

2) Démontrons maintenant que $s \leq \lambda((b_n)_n)$.

C'est trivial si $\lambda((b_n)_n) = +\infty$. Sinon, soit $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $\alpha > \lambda((b_n)_n)$. Alors $nb_n^\alpha \to 0$, et par conséquent

$$\text{Log } n + \alpha \text{ Log } b_n < 0, \text{ à partir d'un certain } n_o.$$

Donc

$$\sup_{n \geq n_o} \frac{\text{Log } n}{-\text{ Log } b_n} \leq \alpha \quad \text{et} \quad s \leq \alpha.$$

Il reste donc à démontrer que $s = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \dfrac{\text{Log } n(\varepsilon)}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}}$. Or

$$\frac{\text{Log } n}{\text{Log } \frac{1}{b_n}} \leq \frac{\text{Log } n(b_n)}{\text{Log } \frac{1}{b_n}} \leq \frac{\text{Log } m}{\text{Log } \frac{1}{b_m}}$$

avec $m = n(b_n)$. Donc

$$\lambda(b_n) = \limsup_{n} \frac{\text{Log } n(b_n)}{\text{Log } \frac{1}{b_n}} = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\text{Log } n(\varepsilon)}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}}$$

<u>Proposition 13</u> : 1) <u>Soit</u> $0 < \alpha < \infty$ et $b_n \downarrow 0$. <u>Alors</u>

$$\frac{1}{\lambda\left(\left(\frac{b_n}{n^{\alpha}}\right)_n\right)} = \frac{1}{\lambda((b_n)_n)} + \alpha \quad \left(\text{avec la convention } \frac{1}{\infty} = 0 \text{ et } \frac{1}{0} = \infty\right)$$

<u>Plus généralement</u>, <u>si</u> $b_n \downarrow 0$, $a_n \downarrow 0$ <u>et si</u>

$$\lim \frac{\text{Log } \frac{1}{a_n}}{\text{Log } n} \ \underline{\text{existe}},$$

<u>alors</u>

$$\frac{1}{\lambda((a_n\, b_n)_n)} = \frac{1}{\lambda((a_n)_n)} + \frac{1}{\lambda((b_n)_n)}$$

2) <u>Si</u> $\Sigma\, b_n^{\alpha} < +\infty$ $(\alpha \geq 0)$ <u>et si l'on pose</u>
$v_n = \left(\sum_{k \geq n} b_n^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$, <u>alors</u>

$$\frac{1}{\lambda((b_n)_n)} = \frac{1}{\lambda((v_n)_n)} + \frac{1}{\alpha}.$$

<u>Démonstration</u> : 1) est trivial si $\lambda((b_n)_n) = +\infty$ ou si $\lambda((b_n)_n) = 0$. Dans le cas contraire, il suffit d'utiliser la formule

$$\lambda((c_n)_n) = \limsup_n \frac{\operatorname{Log} n}{-\operatorname{Log} c_n} \quad (\text{si } c_n \downarrow 0).$$

Pour démontrer 2), remarquons d'abord que $n^{1/\alpha} b_{2n} < v_n$. Donc

$$\lambda((b_n)_n) = \lambda((b_{2n})_n) \leq \lambda\left(\left(\frac{v_n}{n^{1/\alpha}}\right)_n\right)$$

et

$$\frac{1}{\lambda((b_n)_n)} \geq \frac{1}{\lambda((v_n)_n)} + \frac{1}{\alpha} .$$

Il reste à démontrer l'inégalité inverse.

Supposons que $\lambda((b_n)_n) < \alpha$ et soit γ tel que

$$\lambda((b_n)_n) < \gamma < \alpha.$$

Alors, $b_n < n^{-1/\gamma}$ à partir d'un certain n_o ; donc

$$v_n^\alpha = \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^{\alpha/\gamma}} \leq \int_{n-1}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha/\gamma}} \leq K\, n^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}$$

et

$$\frac{1}{\lambda((b_n)_n)} \leq \frac{1}{\lambda((v_n)_n)} + \frac{1}{\alpha} . \qquad \text{cqfd.}$$

<u>Théorème</u> : On a $\lambda((b_n)_n) = - \dfrac{1}{\limsup_n \dfrac{\Sigma_1^n \operatorname{Log} b_k}{n \operatorname{Log} n}}$.

<u>Démonstration</u> : Nous aurons besoin du lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Pour tout entier p

$$\sum_{k=p+1}^{p+m} \frac{\operatorname{Log} k}{(p+m)\operatorname{Log}(p+m)} \to 1, \quad \text{quand} \quad m \to \infty .$$

En effet, $\sum_{k=p+1}^{p+m} \operatorname{Log} k = \operatorname{Log} \frac{(m+p)!}{p!}$, et d'autre part, d'après la formule de Stirling

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad (1 + \varepsilon(n)),$$

on a :

$$\operatorname{Log}(m+p)! = (m+p)\operatorname{Log}(m+p) + (m+p) \operatorname{Log}\frac{1}{e} + \frac{1}{2} \operatorname{Log}[2\pi(m+p)] + \operatorname{Log}(1 + \varepsilon(m+p)).$$

Par conséquent,

$$\frac{\operatorname{Log}(m+p)!}{(m+p)\operatorname{Log}(m+p)} = 1 + \frac{\operatorname{Log} \frac{1}{e}}{\operatorname{Log}(m+p)} + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Log}[2\pi(m+p)]}{(m+p)(\operatorname{Log}(m+p))} + \frac{\operatorname{Log}(1+\varepsilon(m+p))}{(m+p)\operatorname{Log}(m+p)}$$

tend vers 1, quand $m \to \infty$. cqfd.

<u>Démontrons maintenant le théorème</u> : Puisque (b_n) est décroissante, il est clair que

$$-\frac{1}{\lambda} \leq \limsup_n \frac{\Sigma_1^n \operatorname{Log} b_k}{n \operatorname{Log} n} \leq 0.$$

Donc le résultat est démontré si $\lambda = +\infty$. Supposons $\lambda < +\infty$ et soit α tel que $\lambda < \alpha$; alors $\Sigma\, b_n^\alpha < +\infty$ et par conséquent $n\, b_n^\alpha < 1$, à partir d'un certain n_o ; ou encore

$$\operatorname{Log} b_n \leq \operatorname{Log}(n^{-1/\alpha}) .$$

$$\limsup \frac{\Sigma_1^n \operatorname{Log} b_k}{n \operatorname{Log} n} = \limsup \frac{\Sigma_{n_o}^n \operatorname{Log} b_k}{n \operatorname{Log} n} \leq -\frac{1}{\alpha} \limsup \frac{\Sigma_{n_o}^n \operatorname{Log} k}{n \operatorname{Log} n} = \frac{-1}{\alpha}$$

Puisque ceci est vrai pour tout $\alpha > \lambda$, donc $-\frac{1}{\alpha} > -\frac{1}{\lambda}$, on a le résultat.

<u>Application</u> : <u>Si</u> $A \in E$, <u>on a</u> $\rho(A,U) \leq \lambda((d_n(A,U))_n)$.

En effet, on a vu (proposition 11) que

$$H(A,\varepsilon U) \le m(\tfrac{3}{\varepsilon}) \text{ Log } \frac{4(d_o + \varepsilon)}{\varepsilon} \;;$$

donc

$$\frac{\text{Log } H(A,\varepsilon U)}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}} \le \frac{\text{Log } m(\frac{3}{\varepsilon})}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}} + \frac{\text{Log Log } 4 \frac{d_o + \varepsilon}{\varepsilon}}{\text{Log } \varepsilon}$$

Par conséquent

$$\rho(A,U) = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\text{Log } H(A,\varepsilon U)}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}} \le \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{m(\frac{3}{\varepsilon})}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}}$$

Or, $m(\frac{1}{\varepsilon}) = n(\varepsilon) + 1$; donc

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{m(\frac{3}{\varepsilon})}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}} = \lambda((d_n)_n) .$$

§ 4. PROPRIETES DES EXPOSANTS DE VOLUME

1. $EV(\lambda A, \mu U) = EV(A,U), \quad \forall\, \lambda,\mu > 0$
et $EW(\lambda A, \mu U) = EW(A,U)$.

2. Si E est un espace vectoriel normé et si U désigne sa boule unité et si A est borné

$$EV(A,U) \le 0 .$$

Proposition 14 : Si E est un e.v. normé, U sa boule unité et si A est précompact, alors

$$\rho(A,U) \ge - \frac{1}{EV(A,U)} \quad \underline{\text{et}} \quad \rho(A,U) \ge - \frac{1}{EW(A,U)} .$$

Preuve : Soit $T : E \to E$, linéaire continue de rang m

$$M(A,\varepsilon U) \ge M(TA,\varepsilon TU) \ge \frac{m_{TE}(\overline{TA})}{m_{TE}(\overline{TU})} \times \frac{1}{\varepsilon^m} .$$

Donc :

$$M(A,\varepsilon U) \geq v_m(A,U) \times \frac{1}{\varepsilon^m}, \quad \forall \quad m \in \mathbb{N}^+ .$$

Posons $EV(A,U) = a$; si $EV(A,U) > -d$ $(d > 0)$, il existe donc une suite extraite $\{m_k\}$ telle que :

$$v_{m_k}(A,U) \geq \left(\frac{1}{m_k^d}\right)^{m_k}, \quad m_k \uparrow \infty \quad ;$$

et par conséquent

$$M(A,\varepsilon U) \geq \left(\frac{1}{\varepsilon\, m_k^d}\right)^{m_k} .$$

Posons $\varepsilon_k = \frac{1}{\varepsilon\, m_k^d}$; alors $\varepsilon_k \downarrow 0$,et, en remplaçant,dans la formule ci-dessus, ε par ε_k :

$$\operatorname{Log} M(A,\varepsilon_k U) \geq m_k \operatorname{Log} \frac{1}{\varepsilon}$$

Par suite

$$\rho(A,U) \geq \limsup_{k \to \infty} \frac{\operatorname{Log} m_k}{\operatorname{Log} \frac{1}{\varepsilon_k}} = \limsup_{k \to \infty} \frac{\operatorname{Log} m_k}{\operatorname{Log} \varepsilon\, m_k^d} = \frac{1}{d}$$

Si $d \uparrow -a \neq 0$, on en déduit $\rho(A,U) \geq -\frac{1}{a}$

Si $d \uparrow 0$, on en déduit $\rho(A,U) = 0$. <u>cqfd</u>

De même, $M(A,\varepsilon U) \geq M(A \cap E_n, \varepsilon U \cap E_n)$, $E_n \in \mathcal{E}_n$;

soit $M(A,\varepsilon U) \geq \dfrac{m_{E_n}(\overline{A \cap E_n})}{m_{E_n}(\overline{U \cap E_n})} \times \dfrac{1}{\varepsilon^n}$ et on continue le raisonnement comme ci-dessus.

<u>Application</u> : Soit $E = l^q$ $(1 \leq q \leq \infty)$ et U sa boule unité. Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $b_n \downarrow 0$, $b_n > 0$ pour tout n. Posons

$$A = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,;\, (x_n)_n \in l^q,\ N_p(\frac{x_n}{b_n}) \leq 1\}$$

$(1 \leq p \leq \infty)$. Si $p > q$, on supposera que $\Sigma\, b_n^\alpha < \infty$, avec $\alpha = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Alors

$$EV(A,U) \geq -\frac{1}{\lambda(b_n)} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \quad , \tag{1}$$

$$EW(A,U) \geq -\frac{1}{\lambda(b_n)} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \quad . \tag{2}$$

En effet,

$$v_n(A,U) \geq b_n^n \frac{c_{n,p}}{c_{n,q}}$$

où

$$c_{n,r} = (\frac{2}{r}\,\Gamma(\frac{1}{r}))^n \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{r}+1)} = \int_{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r \leq 1} dx_1 \ldots dx_n \ .$$

Or, $\Gamma(\frac{n}{r}+1) \sim (\frac{n}{re})^{n/r} \sqrt{2\pi \frac{n}{r}}$ (quand $n \to \infty$). Donc

$$\frac{c_{n,p}}{c_{n,q}} \geq \left[C\ n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}\right]^n$$

et on a gagné.

On procède de même pour l'estimation (2).