Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

A. Badrikian

# ε-entropies ; ε-capacités ; épaisseurs

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1969-1970), exp. n° 18, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A19_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE L. SCHWARTZ 1969-1970

# $\varepsilon$-ENTROPIES ; $\varepsilon$-CAPACITES ; EPAISSEURS

par A. BADRIKIAN

Exposé N° 18 — 16 Mars 1970

## § 1. ENTROPIE ET CAPACITE

### 1) Définitions fondamentales

Soit E un ensemble, U une partie de $E \times E$ symétrique et contenant la diagonale $\Delta$ de $E \times E$.
On dira que deux points x et y sont voisins d'ordre U si $(x,y) \in U$. On définit de même des ensembles petits d'ordre U.

Soit A une partie de E. Un U-recouvrement de A est un recouvrement de A par des ensembles petits d'ordre U. Le cas le plus important sera celui où E est un espace uniforme. Si $U = \{(x,y) \in E \times E \,;\, p(x,y) < \varepsilon\}$ où p est un écart sur E et $\varepsilon > 0$, on dira $(p,\varepsilon)$-recouvrement (ou encore $\varepsilon$-recouvrement si aucune confusion n'est possible) au lieu de U-recouvrement.

Uen partie S de E est dite U-discernable si elle a un seul élément ou si $x \in S$, $y \in S$, $x \neq y \Rightarrow (x,y) \in U$. On dira encore $(p,\varepsilon)$-discernable si U est défini comme ci-dessus.

Une partie S de E est dite un U-réseau (ou $(p,\varepsilon)$-réseau le cas échéant) pour A si pour tout $x \in A$, il existe $y \in S$ tel que $(x,y) \in U$.

Si $(A_i)_{i\in I}$ est un U-recouvrement de A et si $x_i \in A_i$ pour tout i alors $S = \{x_i, i \in I\}$ est un U-réseau pour A. En outre deux points U-discernables ne peuvent appartenir à un même ensemble d'un U-recouvrement.

Dans tout ce qui suit nous poserons $\inf \emptyset = +\infty$.

La terminologie étant ainsi fixée nous introduisons les notations suivantes :

- $N(A,U)$ désignera le plus petit nombre d'éléments que peut compter un U-recouvrement de A, $N(A,U) \leq +\infty$.

<u>Remarque</u> : En toute rigueur on devrait écrire $N(E;A,U)$, mais on voit facilement que si $A \subset E' \subset E$ on a

$$N(E;A,U) = N(E';A,U \cap (E' \times E'))$$

et en particulier

$$N(E;A,U) = N(A;A,U \cap (E' \times E'))\ .$$

Si $U = \{(x,y) \in E \times E; p(x,y) < \varepsilon\}$, $p$ écart, $\varepsilon > 0$, on écrira $N(A,p,\varepsilon)$ ou $N(A,\varepsilon)$ au lieu de $N(A,U)$. On posera $H(A,U) = \text{Log } N(A,U)$ (avec la convention $\text{Log } +\infty = +\infty$). Si $E$ est un espace uniforme et si $A$ est précompacte pour cette structure, $H(A,U)$ sera appelée <u>entropie de A par rapport à U</u>. On a $N(A,U) < +\infty$ pour tout entourage symétrique $U$ (et réciproquement).

<u>Définition</u> : si $p$ est un écart sur $E$, on appelle exposant d'entropie de $A$ relativement à $p$ et on note $\rho_p(A)$ ou $\rho(A)$ le nombre

$$\limsup_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\text{Log } H(A,p,\varepsilon)}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}}\ .$$

Il est clair que $\rho(A)$ est égal à la borne inférieure des nombres positifs $\mu$ ayant la propriété suivante :
"il existe $\varepsilon_0$ (dépendant de $\mu$) tel que :

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \Rightarrow N(A,p,\varepsilon) \leq e^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\mu}}\text{"}$$

ou encore, $N(A,p,\varepsilon) \leq C\, e^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\mu}}$, pour tout $\varepsilon > 0$ (où $C$ est une constante dépendante de $\mu$).

Il est clair que $\rho(A) = \limsup\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \dfrac{\text{Log } H(A,p,\alpha\,\varepsilon)}{\text{Log } \frac{1}{\varepsilon}}$ pour tout $\alpha > 0$.

- $M(A,U)$ désignera un entier égal au <u>maximum</u> du nombre d'éléments que peut comporter une partie U-discernable de $A$

On posera $C(A,U) = \text{Log } M(A,U)$ et $C(A,U)$ sera appelée <u>capacité de A par</u>

rapport à U. On définit de même la quantité $C(A,p,\varepsilon)$. On dira alors $\varepsilon$-capacité.

- Enfin, si B est une autre partie de E, $P(A;B,U)$ désignera l'entier (éventuellement égal à $+\infty$) égal à :

$$\inf \{\text{card } S \,;\, S \subset B, \qquad , S \text{ est un } U\text{-réseau pour } A\}.$$

On appelle entropie de A par rapport à B et U et l'on écrit $H_B(A,U)$ la quantité $\text{Log } P(A;B,U)$.

2) Propriétés fondamentales

Les propriété suivantes sont quasi-immédiates.

- $N(A,U)$, $P(A;B,U)$ et $M(A,U)$ (ainsi que leurs logarithmes) sont des fonctions croissantes de A et des fonctions décroissantes de U.

- $P(A;B,U)$ est une fonction décroissante de B.

En outre, on la

Proposition 1 : quel que soit $A \subset E$ et quel que soit $U \subset E \times E$ (symétrique et contenant la diagonale) on a, pour tout $X \subset E$

$$N(A, U \circ U) \leq P(A;X,U) \tag{1}$$

et pour toute partie X de E contenant A

$$N(A, U \circ U) \leq P(A;X,U) \leq P(A;A,U) \leq M(A,U) \leq N(A,U). \tag{2}$$

Démonstration : L'inégalité (1) résulte du fait que tout U-recouvrement de A est un $U \circ U$-recouvrement de A.

L'inégalité de droite de (2) est due au fait que deux points U-discernables de A ne peuvent appartenir à un même ensemble d'un U-recouvrement de A.

L'inégalité $P(A;A,U) \leq M(A,U)$ est triviale si $M(A,U) = +\infty$. Dans le cas contraire soit S une partie finie U-discernable de A telle que

card $S = M(A,U)$. Si $x \in S$, soit $U(x)$ la coupe de $U$ suivant $x$ ; alors la famille $\{U(x),\ x \in S\}$ est un U-recouvrement de A. Donc S est une partie de E qui est un U-réseau pour A.
L'inégalité $P(A;X,U) \leq P(A;A,U)$ est triviale d'après la remarque précédant cette proposition. cqfd

Corollaire : si P est un écart sur E, X une partie de E contenant A

$$\rho_P(A) = \limsup_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{\operatorname{Log} H(A;X,\varepsilon)}{\operatorname{Log}\frac{1}{\varepsilon}} = \limsup_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{\operatorname{Log} M(A,\varepsilon)}{\operatorname{Log}\frac{1}{\varepsilon}} .$$

Proposition 2 : Soient E et F deux ensembles et $T : E \to F$ une application quelconque. Soit $\hat{T}$ l'application de $E \times E$ dans $F \times F$ définie par $\hat{T}(x_1,x_2) = (Tx_1,Tx_2)$. Soit U(resp.V) une partie symétrique de $E \times E$ (resp. $F \times F$) contenant la diagonale $\Delta(E)$(resp. $\Delta(F)$).
Quels que soient $A \subset E$, $A_1 \subset E$, $B \subset F$, $B_1 \subset F$ on a les inégalités suivantes

$$N(TA,\hat{T}U) \leq N(A,U) \quad ; \quad N(T^{-1}B,\hat{T}^{-1}V) \leq N(B,V) \quad ;$$

$$P(TA;TA_1,\hat{T}U) \leq P(A;A_1,U) \quad ; \quad P(T^{-1}B,T^{-1}B_1,\hat{T}^{-1}V) \leq P(B;B_1,V) \quad ;$$

$$M(TA,\hat{T}U) \leq M(A,U) \quad ; \text{ et } M(T^{-1}B,\hat{T}^{-1}V) \leq M(B,V)$$

si la restriction de T à $T^{-1}(B)$ est injective.
Si T est bijective, ces inégalités deviennent des égalités.

Démonstration : il suffit de remarquer que pour tout $x \in E$

$$(T^{-1}V)(x) = T^{-1}(V(Tx)) \quad \text{et} \quad T(U(x)) \subset (\hat{T}U)(Tx) .$$

<u>Corollaire</u> : avec les notations de la proposition 2, on a

$$N(TA,V) = N(TA,\check{T}\check{T}^{-1}V) = N(A,\check{T}^{-1}V) = N(T^{-1}TA.\check{T}^{-1}V) \ ;$$

$$P(TA;TA_1,V) = M(TA,\check{T}A_1,\check{T}\check{T}^{-1}V) = P(A;A_1,\check{T}^{-1}V) = P(T^{-1}TA,A_1,\check{T}^{-1}V) \ ;$$

$$M(TA,V) = M(TA,\check{T}\check{T}^{-1}V) \leq M(A,\check{T}^{-1}V) \leq M(T^{-1}TA,\check{T}^{-1}V) \ .$$

<u>Démonstration</u> : démontrons le premier groupe d'égalités. On a

$$N(TA,V) = N(TA,\check{T}\check{T}^{-1}V)$$

car $(TA\times TA)\cap V = (TA\times TA)\cap \check{T}\check{T}^{-1}V$ et l'égalité résulte de la remarque suivant la définition de $N(A,U)$.
Maintenant, d'après la proposition 2, on a

$$N(TA,\check{T}\check{T}^{-1}V) \leq N(\check{T}^{-1}V) \ ;$$

et puisque $T^{-1}TA\supset A$

$$N(A,\check{T}^{-1}V) \leq N(T^{-1}TA,\check{T}^{-1}V) \ .$$

Maintenant en appliquant encore la proposition 2, on obtient

$$N(T^{-1}TA,\check{T}^{-1}V) \leq N(TA,V) \ .$$

On en déduit le premier groupe d'égalités.
On démontrerait de la même façon le deuxième groupe d'égalités.

Maintenant $M(TA,V) = M(TA,\check{T}\check{T}^{-1}V)$ se démontre comme pour l'égalité analogue du 1er groupe d'égalités (la remarque suivant la définition de $N(A,U)$ reste valable pour $M(A,U)$). On a $M(TA,\check{T}\check{T}^{-1}V) \leq M(A,\check{T}^{-1}V)$ à cause de la proposition 2 et la dernière égalité résulte alors de $A\subset T^{-1}TA$.

La proposition suivante nous montre comment on peut calculer les entropies dans un produit

Proposition 3 : E, F, U et V, A et B ont la même signification que dans la proposition 2 ; on désigne par U V le sous-ensemble de $(E\times F)\times(E\times F)$ défini par

$$(x_1,y_1,x_2,y_2)\in U\odot V \Leftrightarrow (x_1,x_2)\in U \text{ et } (y_1,y_2)\in V .$$

On a alors :

$$N(A\times B,U\odot V) \le N(A,U)\times N(B,V) \;;$$

$$P(A\times B;A_1\times B_1,U\odot V) \le P(A;A_1,U)\ P(B;B_1,V)$$

pour tout $A_1\times B_1\subset E\times F$ ;

$$M(A\times B),U\odot V) \ge M(A,U)M(B,V) .$$

Démonstration immédiate

3) Cas où E est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Dans tout ce numéro, U désignera un sous-ensemble de E disqué et absorbant ; on désignera par $p_U$ sa semi-norme jauge :

$$p_U(x) = \inf\{\lambda;\lambda<0, x\in\lambda U\} .$$

$\tilde{U}$ désignera la semi-boule "fermée"

$$\tilde{U} = \{x;x\in E,\ p_U(x)\le 1\} .$$

L'espace vectoriel $E_U = E/p_U^{-1}(0)$ sera muni de la norme quotient et l'on désignera par $\pi_U$ l'application (linéaire) canonique de E dans $\hat{E}_U$ (complété de $E_U$ pour la norme déduite de $p_U$) $\hat{U}$ sera la boule unité de $\hat{E}_U$.

Si V est un ensemble disqué absorbant tel que $V \subset U$ on désignera par $\pi_{UV}$ l'application (linéaire continue) canonique de $\hat{E}_V$ dans $\hat{E}_U$.
Si F est un autre espace vectoriel et si $V \subset F$ est disqué absorbant et si $T : E \to F$ est linéaire, il est clair que :

$$p_{T^{-1}V}(x) = p_V(Tx) \quad , \forall\ x \in E \ .$$

Si $U \subset E$ est disqué absorbant on lui associe la partie $\hat{U}$ de $E \times E$ (symétrique, contenant la diagonale) définie comme suit :

$$\check{U} = \{(x,y) \in E \times E \ ; \ x - y \in U\}$$

et l'on écrira $N(A,U)$, $M(A,U)$, $P(A;B,U)$ au lieu de $N(A,\check{U})$, $M(A,\check{U})$ et $P(A;B,\check{U})$ respectivement.

Les propriétés suivantes sont satisfaites :
- $\forall\ \alpha \neq 0$, $\forall\ A \subset E$, $\forall$ U disqué

$$N(\alpha A,\alpha U) = N(A,U) \ ;$$

$$P(\alpha A;\alpha B,\alpha U) = P(A;B,U) \ ;$$

$$M(\alpha A,\alpha U) = M(A,U) \ .$$

(C'est immédiat car $x \to \alpha x$ est une bijection de E).

- En posant $\rho(A,U) = \rho_{p_U}(A)$ on voit que

$$\rho(\alpha A,\beta U) = \rho(A,U), \ \forall\ \alpha,\beta \text{ réels non nuls.}$$

<u>Proposition 4</u> : quels que soient U (disqué absorbant), $A \subset E$ et $B \subset E$ on a :

$$N(\pi_U A,\hat{U}) = N(A,\tilde{U}) \ ,$$
$$P(\pi_U A;\pi_U B,\hat{U}) = P(A;B;\tilde{U}) \ ,$$
$$M(\pi_U A,\hat{U}) = M(A,\tilde{U}) \ .$$

Démonstration : les deux premières égalités résultent immédiatement du corollaire de la proposition 2 et de $\pi_U^{-1}(\hat{U}) = \tilde{U}$. Ce même corollaire donne $M(\pi_U A, \hat{U}) \leq M(A, \tilde{U})$. Pour démontrer l'inégalité inverse il suffit de remarquer que :

$$p_{\hat{U}}(\pi_U x) = p_U(x) = p_{\tilde{U}}(x) \,. \quad \underline{\text{cqfd}}$$

Lemme : soient $E_1$ et $E_2$ deux espaces vectoriels, $U_i$ un disque absorbant et $B_i \subset E_i (i = 1, 2)$ et T une application linéaire de $E_1$ dans $E_2$. Pour tout $A \subset E_1$, on a

$$P(TA; B_2 + TB_1, U_2) \leq P(A; B_1, U_1) \times P(TU_1; B_2, U_2) \,.$$

Démonstration : comme $P(A_1; B_1, U_2) \geq P(TA; TB_1, TU_1)$ il suffit de démontrer que

$$P(TA; B_2 + TB_1, U_2) \leq P(TA; TB_1, TU_1) P(TU_1; B_2, U_2) \,.$$

Or c'est immédiat car soit $S_1$ une partie de $TB_1$ qui est un $TU_1$-réseau pour TA et soit $S_2$ une partie de $B_2$ qui est un $U_2$-réseau pour $TU_1$ ; $S_1 + S_2$ est une partie de $TB_1 + B_2$ qui est un $U_2$ réseau pour TA, cqfd.

Proposition 5 : avec les notations du lemme précédent on a

$$\frac{1}{\rho(TA, U_2)} \geq \frac{1}{\rho(A, U_1)} + \frac{1}{\rho(TU_1, U_2)}$$

si $\rho(TU_1, U_2) < +\infty$ et $\rho(A, U_1) < +\infty$.

Démonstration : posons $\rho_1 = \rho(A, U_1)$ et $\rho_2 = \rho(TU_1, U_2)$. Soit $\sigma > 0$ et $\alpha$ tel que $0 < \alpha < 1$ ; soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varepsilon' = \varepsilon^\alpha$ choisis de telle façon que

$$\text{Log } P(T\varepsilon' U_1 ; E_2, \varepsilon U_2) \leq \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{(1+\sigma)\rho_2} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(1+\sigma)(1-\alpha)\rho_2}$$

et
$$\text{Log } P(A : E_1, \varepsilon' U_1) \leq \left(\frac{1}{\varepsilon'}\right)^{(1+\sigma)\rho_1} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(1+\sigma)\alpha\rho_1} .$$

Prenons $\alpha = \dfrac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$ ; donc $\alpha\rho_1 = (1-\alpha)\rho_2 = \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$ et

$$\text{Log } P(TA ; E_2, U_2) \leq 2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(1+\sigma)\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}} .$$

Donc,
$$\rho(TA, U_2) \leq (1+\sigma)\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2} \quad , \quad \underline{\text{cqfd}} .$$

<u>Proposition 6</u> : si S est une partie disquée de $\mathbb{R}^n$, pour tout r et tout $\varepsilon$ tels que $r > \varepsilon > 0$, on a

$$\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^n \leq M(rS, \varepsilon S) \leq \left(\frac{r+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n \leq \left(\frac{2r}{\varepsilon}\right)^n .$$

<u>Démonstration</u> : soit $\{x_1, \ldots, x_m\}$ une partie (finie) $\varepsilon S$-discernable de rS et maximale, c'est-à-dire $m = M(rS, \varepsilon S)$ ; alors

$$r \subset \bigcup_{i=1}^{m} (x_i + \varepsilon S) \subset (r+\varepsilon) S .$$

On obtient le résultat en prenant la mesure de Lebesgue de ces différents volumes.

Faisons encore les remarques suivantes :

- Si U' est un disque de E et U un disque absorbant de E, alors :

$$N(A + U', U + 2U') \leq N(A, U) .$$

- Si $C(A, U) < +\infty$, alors il existe une partie finie K de A telle que

$$H_B(A, 2U) \leq H_B(K, U) .$$

(Il suffit de prendre K partie U-discernable "maximale" de A).

## § 2. $n^{\text{ièmes}}$ EPAISSEURS ET $n^{\text{ièmes}}$ VOLUMES DANS LES ESPACES VECTORIELS

### 1) $n^{\text{ièmes}}$ épaisseurs et $n^{\text{ièmes}}$ volumes

Si E est un espace vectoriel on désignera par $\mathcal{E}_n$ la famille des sous-espaces de E de dimension au plus égale à n. Si de plus E et F sont des espaces vectoriels topologiques, $\mathcal{L}_n(E,F)$ désignera la famille de tous les opérateurs linéaires continus de E dans F de rang au plus égal à n ; si E = F, on notera $\mathcal{L}_n(E)$ ou $\mathcal{L}_n$.

Définition : Soit U un disque (non nécessairement absorbant) de E et $A \subset E$ ; soit $\mathcal{E}_n(U)$ la famille des éléments de $\mathcal{E}_n$ contenus dans l'espace vectoriel engendré par U. On appelle $n^{\text{ième}}$ épaisseur de A relativement à U le nombre

$$d_n(A,U) = \inf\{\sup_{x\in A} \inf_{y\in E_n} p_U(x-y) \; ; \; E_n \in \mathcal{E}_n(U)\} ,$$

c'est-à-dire

$$d_n(A,U) = \inf\{\lambda \; ; \; \lambda > 0, \; \exists \, E_n \in \mathcal{E}_n(U) \text{ tel que } A_n \subset E_n + \lambda\overline{U}\}.$$

Si aucun risque de confusion n'est possible (par exemple, si U est la boule unité d'un normé E) on notera $d_n(A)$ au lieu de $d_n(A,U)$.

Définition 2 : Soit U un disque absorbant de E et $A \subset E$. On appelle $n^{\text{ième}}$ volume de A relativement à U le nombre

$$v_n(A,U) = \sup_{\substack{T\in\mathcal{L}_n(E) \\ \text{rang } T=n}} \frac{m_{TE}(\overline{TA})}{m_{TE}(\overline{TU})}$$

(où $m_{TE}$ désigne une mesure de Haar sur TE) quand tous les rapports ont un sens, c'est-à-dire quand on n'a pas la forme $\frac{\infty}{\infty}$ . Bien entendu, si E est normé et U sa boule unité, le $n^{\text{ième}}$ volume est bien défini. Quand ce $n^{\text{ième}}$ volume est bien défini, on appelle exposant de volume de A relativement à U le nombre

$$EV(A,U) = \limsup_n \frac{\text{Log } v_n(A,U)}{n \text{ Log } n} .$$

Soit $V_n$ le volume de la boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^n$. En vertu de

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \quad \text{et de } \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \sim \sqrt{2\pi}\,\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\frac{n}{2}+1} e^{-(\frac{n}{2}+1)} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2}+1}}$$

on a $EV(A,U) = \frac{1}{2} \limsup\limits_{n} \dfrac{\mathrm{Log}\, v_n(A,U)}{-\mathrm{Log}\, V_n}$.

<u>Remarque 1</u> : Si $d_o = d_o(A,U) < +\infty$, si $x \in A$ et si $E_n \in \mathcal{E}_n$

$$\inf_{y \in E_n} p_U(x-y) = \inf_{\substack{y \in E_n \\ p_U(y) \leq 2d_o}} p_U(x-y) .$$

En effet, il est clair que le premier membre est inférieur au second et que $\inf\{p_U(x-y)\ ;\ y \in E_n,\ p_U(y) \leq 2d_o\} \leq d_o$. En outre

$$p_U(x-y) \geq p_U(y) - p_U(x) \geq p_U(y) - d_o,\ \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in E_n.$$

Donc, $p_U(y) > 2d_o \Rightarrow p_U(x-y) > d_o$. <u>cqfd</u>

<u>Remarque 2</u> : Soit $T \in \mathcal{L}_n(E)$, rang $T = n$ et soit $T_1$ un isomorphisme de $T(E)$ sur un autre espace vectoriel $F$ ; en posant $S = T_1 \circ T$ on a

$$\frac{m_{TE}(\overline{TA})}{m_{TE}(\overline{TU})} = \frac{m_{SE}(\overline{SA})}{m_{SE}(\overline{SU})} .$$

Donc, on peut remplacer les $T \in \mathcal{L}_n(E)$ par des applications linéaires continues dans un espace de dimension n, quelconque. En particulier, si E est un Hilbert, au lieu de prendre $\mathcal{L}_n(E)$ on peut prendre la famille des projecteurs orthogonaux de rang n.

<u>Remarque 3</u> : Dans le cas où E est un Hilbert dont la boule unité est U, Dudley a défini un exposant de volume par

$$E'V(A,U) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\mathrm{Log}\, V'_n}{n \log n}$$

où $V'_n = \sup\{m'_{PE}(PA)\ ;\ P$ projecteur orthogonal de rang $n\}$ et $m'_{PE}$ est la mesure de Haar sur PE telle que $m'_{PE}(PE \cap U)$ est égal au volume de la boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^n$. Il est clair que

$$EV(A,U) = E'V(A,U) + \frac{1}{2} .$$

Remarque 4 : Etant donné un espace vectoriel normé E, on peut définir un autre $n^{\text{ième}}$ volume en posant

$$w_n(A) = \sup_{E_n \in \mathcal{E}_n} \frac{m_{E_n}(\overline{A \cap E_n})}{m_{E_n}(\overline{U \cap E_n})} .$$

et un autre exposant de volume, à savoir

$$EW(A) = \limsup_n \frac{\operatorname{Log} w_n(A)}{n \operatorname{Log} n} .$$

Le problème se pose de comparer EV et EW. Si E est un Hilbert et si $P_{E_n}$ est la projection orthogonale sur $E_n$, on a $P_{E_n} U = U \cap E_n$ et $P_{E_n} \supset A \cap E_n$, donc

$$w_n(A) \leq v_n(A) .$$

Mais, si E est un normé quelconque on ne peut rien dire car $TA \supset A \cap E_n$ et $TU \supset U \cap E_n$, si T est un projecteur sur $E_n$.

2) Propriété des $n^{\text{ièmes}}$ épaisseurs

Remarquons tout d'abord que si $A \subset E' \subset E$, où E' est un sous-espace de E, on a

$$d_n(A, U \cap E') \geq d_n(A,U) .$$

En outre :

- $d_n(A,U)$ est une fonction croissante de A et décroissante de n et U.
- Si $T : E \to F$ est linéaire et surjective, alors

$$d_n(TA,TU) = d_n(A,T^{-1}TU) \leq d_n(A,U) .$$

Cela résulte immédiatement du fait que $p_{T^{-1}TU}(x) = p_{TU}(Tx)$

- <u>Si E est un espace vectoriel normé de boule unité U, on a si</u> $A \subset E$

$$\underline{d_n(A,U) = d_n(A,\hat{U})} \qquad (1)$$

<u>Preuve</u> : On a toujours $d_n(A,U) \geq d_n(A,\hat{U})$. Si $d_n(A,\hat{U}) = +\infty$, (1) est triviale. Supposons donc $d_n(A,\hat{U}) < +\infty$. Alors, il existe un sous espace vectoriel $E_n$ de $\hat{E}$ de dimension n tel que

$$\sup_{x \in A} \inf_{\substack{y \in E_n \\ p_{\hat{U}}(y) \leq 2d_o}} p_{\hat{U}}(x-y) \leq d_n(A,\hat{U}) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

D'autre part, il existe $f_i \in (\hat{E})'$ $i = 1,2,\ldots,n$ , $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \hat{E}$ tels q

$$p_{\hat{U}}(e_i) = p_{U^o}(f_i) = 1 \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, f_i \rangle e_i, \ \forall\, y \in E_n .$$

Soit alors $a_i \in E$ $(i = 1,\ldots,n)$ tels que

$$p_{\hat{U}}(e_i - a_i) \leq \frac{\varepsilon}{4nd_o} .$$

Si $E'_n$ est le sous espace vectoriel engendré par les $a_i$ $(1 \leq i \leq n)$

$$\inf_{y' \in E'_n} p_{\hat{U}}(x-y') \leq \inf_{y \in E_n} p_{\hat{U}}(x - \sum_{i=1}^{n} \langle y, f_i \rangle a_i) \leq d_n(A,\hat{U}) + \varepsilon .$$

<u>cqfd</u>

<u>Corollaire</u> : Avec les notations déjà utilisées, on a (U disque absorbant dans l'espace vectoriel E, $A \subset U$, $\hat{U}$ boule unité de $\hat{E}_U$)

$$d_n(A,U) = d_n(\pi_U A, \pi_U U) = d_n(\pi_U A, \hat{U}) .$$

- Si E est un e.v.n., $A \subset E$, alors A est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie si et seulement si il existe n tel que $d_n(A,U)$

- Soit E un e.v.t.l.c et $\mathfrak{U}$ un système fondamental de voisinages de 0 disques fermés. On a :

$A$ borné $\Leftrightarrow d_0(A,U) < +\infty$, $\forall\, U \in \mathfrak{U}$ ;

$A$ précompact $\Leftrightarrow d_0(A,U) < +\infty$ et $d_n(A,U) \downarrow 0$, $\forall\, U \in \mathfrak{U}$ ;

$d_n(A,U) = d_n(A,\widetilde{U})$, $\forall\, U \in \mathfrak{U}$.

Donnons <u>un exemple d'application de ces propriétés</u> : soit $H$ un Hilbert et $\mathcal{L} : H \to \mathcal{L}^2(\Omega,\mathfrak{J},P)$ une fonction aléatoire associée à la mesure cylindrique gaussienne normale sur $H$. Soit $A \subset H$ dénombrable et bornée telle que

$$P\{\sup_{x\in A} |\mathcal{L}(x)| < +\infty\} > 0 .$$

Je dis que $A$ est précompacte. Posons $d_n(A) = d_n(A,U)$ ($U$ boule unité de $H$). Supposons que $A$ n'est pas précompacte ; il existe $\alpha > 0$ tel que $d_n(A) > \alpha$, $\forall\, n$. Donc :

$$\forall\, n,\ \exists\, E_n \in \mathcal{E}_n \text{ et } \exists\, x \in A \text{ tels que } \sup_{y\in E_n} \|x - y\| > \alpha .$$

On peut ainsi construire une suite $\{x_n\}$ d'éléments de $A$ telle que si $E_n$ est le sous-espace vectoriel engendré par les $x_i$ $(1 \leq i \leq n)$ et si $P_{E_n}$ désigne le projecteur orthogonal sur $E_n$ on ait

$$\|x_{n+1} - P_{E_n}(x_{n+1})\| > \alpha.$$

Posons alors $s_n = P\{\sup_{i\leq n} |\mathcal{L}(x_i)| < M\}$, $0 < M < +\infty$. Alors

$$\begin{aligned} s_n - s_{n+1} &= P\,\{\sup_{i\leq n} |\mathcal{L}(x_i)| < M \ ;\ |\mathcal{L}(x_{n+1})| \geq M\} \\ &\geq P\,\{\sup_{i\leq n}|\mathcal{L}(x_i)| < M \ ;\ \mathcal{L}(P_{E_n}(x_{n+1})) > 0 \ ;\ \mathcal{L}[x_{n+1} - P_{E_n}(x_{n+1})] > M\} \\ &\geq P\,\{\mathcal{L}\,(x_{n+1} - P_{E_n}(x_{n+1})) > M\}\,\frac{s_n}{2} \\ &\geq \frac{s_n}{2}\int_{\frac{M}{\alpha}}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \delta\, s_n . \end{aligned}$$

Donc $s_n(1-\delta) \geq s_{n+1}$ ; d'où $s_n \leq (1-\delta)^{n-1}$, ce qui est absurde.