L. Schwartz

Les applications O-radonifiantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 16, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A17_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   L. S C H W A R T Z   1 9 6 9 - 1 9 7 0

LES APPLICATIONS 0-RADONIFIANTES

Exposé N° 16 2 Mars 1970

§ 1. DEFINITIONS

Une probabilité cylindrique λ sur un espace localement convexe E est dite de type 0, si, lorsque $\xi \in E'$ tend vers 0, $\xi(\lambda)$ tend vers δ dans $\mathcal{P}(\mathbf{R})$. Si $f : E' \to L^0(\Omega,\mu)$ est une fonction aléatoire associée, cela équivaut à dire que f est continue à l'origine de E', car $f(\xi)$ tend vers 0 dans $L^0(\Omega,\mu)$ si et seulement si sa loi $(f(\xi))(\mu)$ tend vers δ dans $\mathcal{P}(\mathbf{R})$, et alors cela entraîne, par linéarité, sa continuité partout, donc aussi la continuité partout de l'application $\xi \mapsto \xi(\lambda)$ de E' dans $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ (alors qu'ici il n'y a plus linéarité). D'après le théorème de Paul Lévy (l'application $\nu \mapsto \mathfrak{F}\nu$ est un homéomorphisme de $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ sur son image dans $C(\mathbf{R})$), cela revient à dire que l'image de Fourier $L = \mathfrak{F}\lambda$ est continue sur E'. Enfin, d'après le théorème page 6 de l'exposé II, cela équivaut encore à dire que λ est scalairement $\mathfrak{T}$-concentrée, où $\mathfrak{T}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées.

Un ensemble $\mathfrak{M}$ de probabilités cylindriques sur E est dit uniformément de type 0, si les $\xi \to \xi(\lambda)$ forment un ensemble équicontinu pour $\lambda \in \mathfrak{M}$, ou si les images de Fourier des $\lambda \in \mathfrak{M}$ sont équicontinues, ou si les $\lambda \in \mathfrak{M}$ sont scalairement équi-$\mathfrak{T}$-concentrées. Si les λ sont de la forme λ_f, les f correspondant à un même (Ω,μ), cela équivaut à dire que ces f sont équicontinues de E' dans $L^0(\Omega,\mu)$. Alors une probabilité cylindrique λ sur E est dite de type 0 approximable (resp. très approximable), si elle est cylindriquement adhérente à un ensemble $\mathfrak{M}$ uniformément de type 0, dont les éléments sont des probabilités de Radon portées par des compacts de dimension finie (resp. portées par des ensembles finis).

Une probabilité de Radon arbitraire est dite d'ordre 0.

Alors une application linéaire faiblement continue u de E dans G est dite 0-radonifiante (resp. approximativement ou très approximativement 0-radonifiante), si, pour toute probabilité cylindrique λ sur E, de type 0 (resp. de type 0 approximable ou très approximable), $u(\lambda)$ est de Radon (d'ordre 0).

§ 2. LE THEOREME FONDAMENTAL

Théorème (XVI,2;1) : soient E, G des Banach, u une application linéaire faiblement continue de E dans G. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$;

1 bis) u est très approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$;

2) Quel que soit $\beta > 0$, il existe $M \geq 0$ et $\alpha > 0$ tel que, pour toute probabilité de Radon λ sur E, portée par un ensemble fini, on ait :

$$J_\beta(u(\lambda)) \leq M\, J^*_\alpha(\lambda) \;;$$

auquel cas cette inégalité reste vraie pour toute probabilité de Radon λ sur E ;

3) Quel que soit le poids A de la forme $A = \sup\limits_{0<\alpha<1} \varphi(\alpha) J_\alpha$, φ partout > 0 et bornée, il existe un poids $B = \sup\limits_{0<\beta<1} \psi(\beta) J_\beta$, $\psi > 0$ et bornée, tel que, pour toute probabilité de Radon λ sur E, portée par un ensemble fini, on ait $B(u(\lambda)) \leq A^*(\lambda)$; auquel cas la même inégalité reste vraie pour toute probabilité cylindrique λ sur E de type A approximable, en remplaçant $A^*(\lambda)$ par $A^{*a}(\lambda)$;

4) Pour tout espace topologique Ω et toute probabilité de Radon μ sur Ω, l'application $\varphi \mapsto u \circ \varphi$ de $L^0(\Omega,\mu;E)$ dans $L^0(\Omega,\mu;G)$ est continue, quand on munit $L^0(\Omega,\mu;E)$ de la topologie induite par le plongement $\varphi \mapsto \varphi^*$ $(\varphi^*(\xi) = <\varphi,\xi> = \xi \circ \varphi)$ de $L^0(\Omega,\mu;E)$ dans $\mathcal{L}(E';L^0(\Omega,\mu))$; et il suffit que cette continuité soit vraie pour un Ω particulier et une probabilité μ particulière diffuse, et pour des $\varphi \in L^0(\Omega,\mu;E)$ étagées.

<u>Démonstration</u> : pour les définitions de J_α, voir page (IV,1) ; pour celle de $J^*_\alpha(\lambda)$, $J_\beta(u(\lambda))$, voir page (V,1).

A) Montrons d'abord que 2) relatif aux probabilités de Radon portées par des ensembles finis l'entraîne pour des probabilités de Radon arbitraires. Soit donc λ une probabilité de Radon sur E. Elle est de type J_α ; en effet, il existe une boule B de E, de rayon $R \geq 0$, telle que $\lambda(\complement B) \leq \alpha$, alors $J_\alpha(\lambda) \leq R$, et a fortiori $J^*_\alpha(\lambda) \leq R$. Comme elle est limite étroite de tronquées $\lambda_K = \chi_K\lambda + \lambda(\complement K)\delta$, K compact, elle est de type J_α approximable, avec $J^{*a}_\alpha(\lambda) = J^*_\alpha(\lambda)$. Alors la prop. (V,5;1) (on a $J_\alpha(\mu+\varepsilon) = J_\alpha(\mu)+\varepsilon$, donc l'inégalité (V,5;1) est vérifiée), dit que λ est de type J_α très approximable, avec $J^{*ta}_\alpha(\lambda) = J^{*a}_\alpha(\lambda) = J^*_\alpha(\lambda)$. Donc λ est limite cylindrique et même étroite de probabilités λ_j de Radon, portées par des ensembles finis, avec $J^*_\alpha(\lambda_j) \leq J^*_\alpha(\lambda)$. On a donc $J_\beta(u(\lambda_j)) \leq M\ J^*_\alpha(\lambda_j) \leq M\ J^*_\alpha(\lambda)$. Mais $\nu \mapsto J_\beta(u(\nu))$ est semi-continue inférieurement (voir démonstration de la prop. (IV,6;1)), et $u(\lambda_j)$ converge étroitement vers $u(\lambda)$, donc $J_\beta(u(\lambda)) \leq M\ J^*_\alpha(\lambda)$.

B) Montrons que 2) entraîne 3) pour des probabilités de Radon λ portées par des ensembles finis. Par hypothèse, pour tout β il existe $M(\beta)$ et $\alpha(\beta)$ tel que $J_\beta(u(\lambda)) \leq M(\beta) J^*_{\alpha(\beta)}(\lambda)$. Si alors $A = \sup\limits_{0<\alpha<1} \varphi(\alpha) J_\alpha$, et si nous posons $B = \sup\limits_{0<\beta<1} \dfrac{\varphi(\alpha(\beta))}{M(\beta)}\ J_\beta$, on a

$$B(u(\lambda)) = \sup_{0<\beta<1} \frac{\varphi(\alpha(\beta))}{M(\beta)}\ J_\beta(u(\lambda))$$

$$\leq \sup_{0<\beta<1} \varphi(\alpha(\beta))\, J^*_{\alpha(\beta)}(\lambda) \leq A^*(\lambda)\ .$$

En outre, si φ est >0 et bornée, comme on peut toujours supposer $M(\beta) \geq 1$ pour tout β, $\beta \to \dfrac{\varphi(\alpha(\beta))}{M(\beta)}$ est aussi bornée.

C) Montrons maintenant que 3) pour des probabilités de Radon portées par des ensembles finis entraîne 1) et 1 bis), que celles-ci sont équivalentes, et que cela entraîne 3) pour des probabilités cylindriques quelconques, avec $A^{*a}(\lambda)$ au lieu de $A^{*}(\lambda)$.

Tout d'abord soit λ cylindrique de type 0. Alors l'ensemble $\{\mu \in \mathcal{P}(\mathbf{R})\ ;\ J_\alpha(\mu) \leq \varepsilon\}$ est un voisinage de δ dans $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ (et ces ensembles forment un système fondamental de voisinages de δ) ; donc il existe un $R > 0$ tel que $\xi \in E'$, $\|\xi\| \leq R$, entraîne $J_\alpha(\xi(\lambda)) \leq \varepsilon$; comme le poids J_α est homogène (§ 4 de l'exposé IV), on en déduit $J_\alpha(\xi(\lambda)) \leq \frac{\varepsilon}{R}$ pour $\|\xi\| \leq 1$, ou $J^*_\alpha(\lambda) \leq \frac{\varepsilon}{R}$. Donc, pour tout $\alpha > 0$, il existe $\varphi(\alpha) > 0$ tel que $\varphi(\alpha) J^*_\alpha(\lambda) \leq 1$; on peut toujours supposer $\varphi(\alpha) \leq 1$. Si alors $A = \sup\limits_{0<\alpha<1} \varphi(\alpha) J_\alpha$, on aura $A^*(\lambda) \leq 1$, λ est de type A. Si maintenant λ parcourt un ensemble $\mathfrak{M}$ de probabilités cylindriques uniformément de type 0, on trouvera qu'il existe un même poids A de la forme ci-dessus, tel que $A^*(\lambda) \leq 1$ pour $\lambda \in \mathfrak{M}$. Mais A vérifie la condition (V,5;1), parce que $\varphi \leq 1$ $\left(A(\mu+\varepsilon) = \sup\limits_{0<\alpha<1} \varphi(\alpha) J_\alpha(\mu+\varepsilon) = \sup\limits_{0<\alpha<1} \varphi(\alpha)(J_\alpha(\mu)+\varepsilon) \leq A(\mu)+\varepsilon\right)$.

Donc, si λ est de type 0 approximable, il existe un A tel que λ soit de type A approximable, et la prop.(V,5;1) dit que λ est de type A très approximable ; elle est donc de type 0 très approximable, par le raisonnement inverse. Donc 1) et 1 bis) sont équivalentes. Si λ est de type 0 approximable, il existe donc un A[♦] limite cylindrique de λ_j de Radon, portées par des ensembles finis, avec $A^*(\lambda_j) \leq A^{*a}(\lambda)$; mais, si l'on suppose 3) pour de telles probabilités λ_j, il existe un poids $B = \sup\limits_{0<\beta<1} \psi(\beta) J_\beta$, $\psi > 0$, tel que $B(u(\lambda_j)) \leq A^*(\lambda_j) \leq A^{*a}(\lambda)$. Les $u(\lambda_j)$ convergent cylindriquement vers $u(\lambda)$, et $B(u\lambda_j) \leq A^{*a}(\lambda)$. Mais le poids B est compact (§ 3 de l'exposé IV), et les boules de $\sigma(G'',G')$ sont compactes, donc (prop. (IV,6;1)) $u(\lambda)$ est de Radon sur $\sigma(G'',G')$, et $B(u(\lambda)) \leq A^{*a}(\lambda)$, ce qui montre nos affirmations.

[♦] tel qu'elle soit de type A très approximable, donc