Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

PIERRE SAPHAR

Applications des normes g_k et d_k. Mesures de Radon k sommantes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. nº 10, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

APPLICATIONS DES NORMES g_k ET d_k. MESURES DE RADON k SOMMANTES

-=-

par Pierre SAPHAR

Exposé N° 10

19 Janvier 1970

On utilise systématiquement ici les notations de l'exposé précédent.

§ 1. CAS DES ESPACES DE HILBERT

Théorème 1 : soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Alors pour tout k réel tel que $1 < k \leq +\infty$ on a :

1) les normes d_k et g_k sont équivalentes sur $H_1 \otimes H_2$ à la norme du produit tensoriel hilbertien.

2) $\mathcal{L}^k_g(H_1,H_2) = \mathcal{L}^k_d(H_1,H_2) = \pi_p(H_1,H_2)$, $1 \leq p < +\infty$.

Démonstration : soit $u \in H_1 \otimes H_2$. D'après la proposition 10, exposée n°9, on sait que $|u|_{d_2} = |u|_{g_2} = |u|_2$.

D'après l'exposé n°8, $\pi_p(H_1,H_2) = \pi_2(H_1',H_2)$ pour $1 \leq p < +\infty$.
On conclut, par dualité, (exposé n°9, théorème 2), que d_k est équivalente à d_2 pour $1 < k \leq +\infty$ sur $H_1 \otimes H_2$, car $H_1 \otimes H_2$ muni de d_k ou de d_2 a même dual topologique. Tous les autres résultats en découlent.

Théorème 2 : soient H un espace de Hilbert et F un espace de Banach. Dans ces conditions :

1) sur $H \otimes F$, d_k est équivalente à d_2 pour $2 \leq k \leq +\infty$, g_k est équivalente à g_2 pour $1 < k \leq 2$,

2) $\pi_k(H,F) = \pi_2(H,F)$ pour $1 \leq k \leq 2$,

$\pi_k(F,H) = \pi_2(F,H)$ pour $2 \leq k < +\infty$,

3) $\mathcal{L}^k_g(H,F) = \pi_1(H,F)$ pour $1 < k \leq 2$,

4) $\mathcal{L}^k_d(H,F) = \mathcal{L}^2_d(H,F)$ pour $2 \leq k \leq +\infty$.

Démonstration : soit $T \in \pi_2(H,F)$. Alors, d'après l'exposé n°7, il existe une mesure de Radon positive μ, sur la boule unité K du dual topologique de H muni de la topologie faible, telle que T se factorise sous la forme :

$$T \ : \ H \xrightarrow{A} C(K) \xrightarrow{i} L^2(K,\mu) \xrightarrow{B} F ,$$

A et B étant deux applications linéaires continues et i l'application canonique de $C(K)$ dans $L^2(K,\mu)$. Alors, i est 2 - sommante. Donc, i_oA est sommante d'après l'exposé n°8. On conclut que :

(1) $$\pi_k(H,F) = \pi_2(H,F) \qquad 1 \leq k \leq 2.$$

De plus, i_oA est k-nucléaire à gauche pour $1 < k \leq 2$, (théorème 1). Donc :

(2) $$\mathcal{L}_g^k(H,F) = \pi_1(H,F) \qquad 1 < k \leq 2.$$

On déduit de (2), que, sur $H \otimes F$, g_k est équivalente à g_2 pour $1 < k \leq 2$.
On déduit de (1), par dualité, que, sur $H \otimes F$, d_k est équivalente à d_2 pour $2 \leq k \leq +\infty$.
Les autres résultats en découlent.

§ 2. MESURES DE RADON k-SOMMANTES

Dans tout ce qui suit, U désigne un espace compact et C* l'espace de Banach des fonctions continues sur U à valeurs scalaires. Soit F un espace de Banach. L'espace $C' \otimes F$ peut être plongé dans $\pi_k(C,F)$. Donc, on peut le munir de la norme π_k.

Théorème 3 : sur $C' \otimes F$, $\pi_k = g_k$ pour $1 \leq k \leq +\infty$.
Nous allons pour obtenir ce théorème, démontrer deux lemmes :

Lemme 1 : soit $M \in C' \otimes F$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe :
- une mesure de Radon positive ν sur U,
- des $u_j \in F$, $1 \leq j \leq p$,
- des parties A_j ν-mesurables de U, deux à deux disjointes, avec $\nu(A_j) \neq 0$ pour tout j,

tels que si l'on pose $M_o = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{A_j} \nu \otimes U_j$, ($\varphi_{A_j}$ est la fonction caractéris-

---

*On dit parfois que C est un espace de type C.

tique de A_j), on ait :

$$g_1(M - M_o) \leq \varepsilon .$$

<u>Démonstration</u> : soit $x' \in F'$ et ν la borne supérieure des mesures $|x'_o M|$ pour $|x'| \leq 1$. Pour toute $\varphi \in C(U)$, on a donc :

$$|M(\varphi)| \leq \nu(|\varphi|) .$$

Par ailleurs, on peut écrire :

$M = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \otimes y_i$, les μ_i étant des mesures de Radon scalaires et (y_i) une famille libre d'éléments de F. Soit $y'_i \in E'$ avec $<y_i, y'_j> = \delta_{i,j}$ et $|y'_i| = 1$ $(i = 1,2 \dots n)$. On a :

$$y'_i \circ M = \mu_i$$

$$|[y'_i \circ M](\varphi)| \leq \nu(|\varphi|).$$

Donc

$$\mu_i \ll \nu \quad , \text{ pour tout } i.$$

Il existe alors des fonctions $h_i \in L^1(U,\nu)$ telles que :

$$\mu_i = h_i \nu .$$

Il existe alors des A_j $(1 \leq j \leq p)$, deux à deux disjoints appartenant au clan engendré par les compacts de U et des scalaires $\lambda_{i,j}$ tels que :

$$\int_U | h_i - \sum_j \lambda_{ij} \varphi_{A_j} | d\nu \leq \varepsilon \quad , \quad 1 \leq i \leq h .$$

Posons :

$$M_o = \sum_i \sum_j \lambda_{ij} \varphi_{A_j} \nu \otimes y_i$$

$$M_o = \sum_i \varphi_{A_j} \nu \otimes U_j,$$

avec

$$U_j = \sum_i \lambda_{ij} y_i.$$

Il est clair que l'on peut supposer $\nu(A_j) \neq 0$.
Alors :

$$g_1(M - M_o) \leq \sum_i \| \sum_j \lambda_{ij} \varphi_{A_j} \nu - h_i \nu \| . \| y_i \|$$

$$\leq \sum_i \varepsilon \| y_i \| .$$

Le résultat est obtenu.

<u>Corollaire</u> : pour tout k tel que $1 \leq k \leq +\infty$, on a :

$$g_k(M - M_o) \leq \varepsilon .$$

<u>Lemme 2</u> : soit M_o la mesure vectorielle définie dans le lemme 1. Alors :

$$\pi_k(M_o) = g_k(M_o) .$$

<u>Démonstration</u> : on sait déjà que $\pi_k(M_o) \leq g_k(M_o)$.
– Supposons que $1 \leq k < +\infty$.
D'après l'exposé 7, il existe une mesure de Radon positive μ sur U telle que, pour toute $\varphi \in C(U)$, on ait :

$$|M_o(\varphi)| \leq (\mu(|\varphi|^k))^{1/k}.$$

avec :

$$\pi_k(M_o) = (\mu(U))^{1/k} ,$$

(pour obtenir ce résultat, il suffit de vérifier que dans l'inégalité de Pietsch, au lieu d'intégrer sur la boule unité faible du dual topologique de C(U), il suffit de le faire sur U, considéré comme plongé dans cette boule).

L'application M_o peut être étendue à $L^k(U,\mu)$ avec conservation de la norme $\pi_k(M_o)$.

Posons :

$$\varphi = \sum_j \rho_j \chi_{A_j} ,$$

les ρ_j étant des scalaires arbitraires.

On a :

$$\left| \sum_j \rho_j \nu(A_j) u_j \right| \leq \left(\sum_j |\rho_j|^k \mu(A_j)\right)^{1/k} ,$$

on vérifie immédiatement que $\mu(A_j) \neq 0$, pour tout j.

On peut alors trouver des scalaires σ_j et a_1 tels que :

$$\mu(A_j) = (\nu(A_j))^k \sigma_j^k a_1^k$$

$$\sum_j \sigma_j^k = 1$$

$$\sigma_j > 0 , \quad a_1 > 0 .$$

Alors :

$$\left|\sum_j \rho_j \sigma_j \nu(A_j) \frac{u_j}{\sigma_j} \right| \leq \left(\sum_j |\rho_j|^k (\nu(A_j))^k \sigma_j^k\right)^{1/k} a_1 .$$

On conclut :

$$M_{k'}\left(\frac{u_j}{\sigma_j}\right) \leq a_1 .$$

Donc

$$g_k(M_o) \le N_k(\sigma_j \varphi_{A_j} \nu)\ M_{k'}(\frac{\mu_j}{\sigma_j})$$

$$\le (\sum_j |\sigma_j|^k\ (\nu(A_j))^k)^{1/k}\ a_1$$

$$\le (\sum_j \mu(A_j))^{1/k}$$

$$g_k(M_o) \le (\mu(U))^{1/k}$$

$$\le \pi_k(M_o)$$

Le résultat est obtenu dans ce cas.

- Supposons maintenant que $k = +\infty$.

L'application M_o peut être étendue à $L^\infty(U,\nu)$. Notons M_1 l'extension.
Définissons des scalaires s_j par :

$$s_j \nu(A_j) = 1$$

Alors :

$$M_1 = \sum_j s_j \varphi_{A_j} \nu \otimes \frac{u_j}{s_j}$$

Posons

$$\varphi = \sum_j \rho_j\ \varphi_{A_j}$$

$$M_1(\varphi) = \sum_j \rho_j\ \nu(A_j) s_j\ \frac{u_j}{s_j}$$

$$\sup_{|\rho_j| \le 1} \|M_1(\varphi)\| = M_1(\frac{u_j}{s_j})$$

Donc

$$g_\infty(M_o) \le \sup_j\ (\nu(A_j)s_j)\ M_1(\frac{u_j}{s_j})$$

$$\le \sup_{|\rho| \le 1} |M_1(\varphi)|.$$

$$g_\infty(M_o) \le \|M_1\|$$

Montrons que $\|M_o\| = \|M_1\|$.

A priori $\|M_o\| \leq \|M_1\|$.

Par ailleurs, il existe une constante A telle que pour tout $\varphi \in L^\infty(U,\nu)$ on ait :

$$|M_1(\varphi)| \leq A\ \nu(|\varphi|)$$

Soit $\varphi \in L^\infty(U,\nu)$ avec $\|\varphi\|_\infty \leq 1$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi_1 \in C(U)$, $\|\varphi_1\|_\infty \leq 1$ et $\nu(|\varphi - \varphi_1|) \leq \varepsilon$.

Donc
$$\begin{aligned} |M_1(\varphi) - M_1(\varphi_1)| &\leq A\ \nu(|\varphi - \varphi_1|) \\ &\leq A\varepsilon\ . \end{aligned}$$

On conclut que $\|M_o\| = \|M_1\|$.

Donc $g_\infty(M_o) = \|M_o\|$.

Le résultat est obtenu.

Démonstration du théorème 3

$$\begin{aligned} |\pi_k(M) - g_k(M)| &\leq |\pi_k(M) - \pi_k(M_o)| + |\pi_k(M_o) - g_k(M_o)| + |g_k(M_o) - g_k(M)| \\ &\leq g_k(M - M_o) \qquad\qquad + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Le théorème est obtenu.

Proposition 1 : Soient E et F deux espaces de Banach tels que E ou F vérifie l'hypothèse d'approximation métrique et $T \in \pi_k(E,F)$. Alors, il existe une suite généralisée T_i formée d'applications de rang fini de E dans F telle que $T_i \to T$ simplement et que $\pi_k(T_i) \leq 1$ pour tout i.

Démonstration : Supposons, par exemple, que E vérifie l'hypothèse d'approximation métrique. Alors, il existe des applications linéaires continues A_i de E dans E, de rang fini, telles que $\|A_i\| \leq 1$ et que A_i tende vers l'identité de E simplement. Il suffit alors de poser $T_i = TA_i$.

Corollaire : La boule unité de $C'\otimes_{g_k} F$ est dense dans celle de $\pi_k(C,F)$ pour la topologie de la convergence simple.

Proposition 2 : Soient F un espace de Banach et k et k_1 deux réels tels que : $1 \leq k < k_1 \leq +\infty$. Alors si g_k est équivalente à g_{k_1} sur $C'\otimes F$, on a

$$\pi_k(C,F) = \pi_{k_1}(C,F).$$

Démonstration : Soit $T \in \pi_{k_1}(C,F)$. Il existe des $T_i \in C'\otimes F$ avec $T_i \to T$ simplement et $g_{k_1}(T_i) \leq \pi_{k_1}(T)$. Alors, il existe $a > 0$, tel que

$$g_k(T_i) \leq a\, \pi_{k_1}(T)$$

On en déduit que : $$\pi_k(T) \leq a\, \pi_{k_1}(T) .$$

Le résultat est obtenu.

Théorème 4 : Soit H un espace de Hilbert. Dans ces conditions :

1) Sur $C'\otimes H$, g_k est équivalent à g_2 pour $2 \leq k \leq +\infty$

2) $\pi_k(C,H) = \mathcal{L}(C,H)$ pour $2 \leq k \leq +\infty$.

Démonstration : D'après le théorème 2, sur $C'\otimes H$, g_k est équivalent à g_2 pour $2 \leq k \leq +\infty$.

Le résultat découle alors de la proposition 2.

Corollaire 1 : Soit $T \in \mathcal{L}(C,H)$. Alors, il existe une mesure de Radon positive μ sur U telle que T se factorise sous la forme :

$$T : C(U) \xrightarrow{i} L^2(U,\mu) \xrightarrow{A} H,$$

i étant l'injection canonique de $C(U)$ dans $L^2(U,\mu)$ et A une application linéaire continue (Grothendieck).

Corollaire 2 : Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors pour que T soit 2-sommante , il faut et suffit que T se factorise sous la forme $T : E \xrightarrow{A} C \xrightarrow{B} H \xrightarrow{D} F$,

A,B,D étant trois applications linéaires continues, C un espace de type $\underline{C}$ et H un espace de Hilbert.

Corollaire 3 : Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H_1,H_2)$. Alors pour que T soit de Hilbert-Schmidt, il faut et suffit que T se factorise sous la forme :

$$T : H_1 \xrightarrow{A} C \xrightarrow{B} H_2 ,$$

A et B étant deux applications linéaires continues et C un espace de type $\underline{C}$, (Grothendieck).

Par transposition on obtient le

Corollaire 4 : On garde les notations du corollaire 3, alors pour que T soit de Hilbert-Schmidt il faut et suffit que T se factorise sous la forme :

$$T : H_1 \xrightarrow{A_1} L \xrightarrow{B_1} H_2$$

A_1 et B_1 étant deux applications linéaires continues et L un espace de Banach isomorphe en tant qu'espace normé à l'espace de Banach des classes de fonctions définies sur un localement compact, à valeurs scalaires, et intégrables pour une mesure de Radon positive (Grothendieck).

§ 3. MESURES DE RADON COMPACTES

Soit F un espace de Banach ; on désigne par $\mathcal{C}(C,F)$ l'espace des applications linéaires compactes de C dans F.

Théorème 5 : Si H est un espace de Hilbert et F un espace de Banach, on a :

$$\mathcal{L}_g^\infty(C,F) = \mathcal{C}(C,F)$$

$$\mathcal{L}_g^k(C,H) = \mathcal{C}(C,H) \qquad \text{pour } 2 \leq k \leq +\infty$$

<u>Démonstration</u> : Ces deux propriétés découlent des théorèmes 3 et 4 et du fait que C vérifie l'hypothèse d'approximation métrique (toute application compacte est limite pour la topologie de la norme π_{∞} d'applications de rang fini).