

STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

M. DELECROIX

O. YAZOURH

**Estimation non paramétrique du taux de hasard
en présence de censures droites : la méthode
des fonctions orthogonales**

Statistique et analyse des données, tome 16, n° 3 (1991), p. 39-62

http://www.numdam.org/item?id=SAD_1991__16_3_39_0

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

ESTIMATION NON PARAMETRIQUE DU TAUX DE HASARD EN PRESENCE DE CENSURES DROITES : LA METHODE DES FONCTIONS ORTHOGONALES

M. DELECROIX

GREMAQ - (URA 947)
Université des Sciences Sociales Toulouse 1
Place Anatole France
31042 TOULOUSE CEDEX
L.S.P., (URA DO745)
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne,
31062 TOULOUSE CEDEX

O. YAZOURH

Laboratoire de Statistique et Probabilité
U.F.R. de Mathématiques pures et appliquées
U.S.T.L.F.A.
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX

RESUME

On définit un estimateur non paramétrique du taux de hasard de variables aléatoires positives soumises à des censures droites. Cet estimateur, original, est construit par la méthode des fonctions orthogonales. On démontre sa convergence asymptotique en divers sens stochastiques.

Classification AMS 62 G05
 STIMA 04 180

Mots clés

Données censurées, estimateur non paramétrique du taux de hasard, méthode des fonctions orthogonales, estimateur de Kaplan-Meier, modèle à censures aléatoires.

NON PARAMETRIC INFERENCE FOR FAILURE RATES WITH RANDOM RIGHT CENSORSHIP : ORTHOGONAL FUNCTIONS METHOD

ABSTRACT

Let h be the common hazard-rate of right censored lifetimes. We define a new nonparametric estimator of h , based on the orthogonal functions method, and prove its pointwise and L^2 asymptotic consistencies.

Keywords

Censored data, nonparametric hazard rate estimation, Kaplan-Meier estimator, orthogonal functions methods, random censorship model

I - INTRODUCTION

L'estimation fonctionnelle dans les modèles de durée a désormais une longue histoire : on peut dater de Kaplan-Meier (1958) la première étude sur le sujet. La spécificité des problèmes statistiques à résoudre dans ce cadre provient évidemment de la présence des "censures" apportées aux observations de la variable d'intérêt par les conditions de l'expérience. Divers choix de modèles, dépendant de la nature des censures, sont possibles à ce niveau : nous adopterons dans ce travail celui d'Efron (1967).

Appelons X_i^0 , $i \geq 1$, les variables aléatoires représentatives des durées de vie que l'on veut étudier (temps de chômage, de survie, de non-défaillance, etc...). Elles sont à valeurs dans \mathbb{R}^+ , i.i.d, on appelle f leur densité, supposée continue, F leur fonction de répartition. Le statisticien ne peut alors observer que des variables X_i , $i \geq 1$, où $X_i = \inf \{X_i^0, C_i\}$, les C_i symbolisant les censures (droites) apportées aux durées de vie d'intérêt (dates d'échantillonnage etc...). On suppose que les C_i forment une suite de variables réelles i.i.d, à valeurs dans \mathbb{R}^+ , de densité g , de fonction de répartition G , et indépendantes des X_i^0 . On appellera enfin λ la densité des X_i , L leur fonction de répartition ($1 - L = (1 - F)(1 - G)$). Comme le statisticien sait néanmoins si l'observation X_i dont il dispose est censurée ou non, l'échantillon est finalement constitué de n couples (X_i, δ_i) où $\delta_i = I_{\{X_i^0 \leq C_i\}}$ (δ_i est l'indicateur de non censure).

Dans le cadre de ce modèle ont été étudiés des estimateurs de F , du "taux de hasard cumulé" Λ ($\Lambda = -\text{Log}(1 - F)$), de la densité f des X_i^0 , enfin de leur taux de hasard h ($h = f/(1 - F) = \Lambda'$). On peut citer, sans souci d'exhaustivité, des travaux récents comme ceux de K. E. Gneyou (1990) ou G. Gregoire (1991), et renvoyer à Dreesbeke et al (1990) chapitre 4, pour une synthèse de résultats obtenus sur le sujet avant 1988.

Dans les travaux concernant f et h , la méthode d'estimation fonctionnelle usuelle est celle du noyau. Quelques auteurs ont néanmoins déjà utilisé la méthode alternative des "fonctions orthogonales". Kimura (1972) semble être le pionnier en ce domaine, mais sans aborder le problème du devenir asymptotique de l'estimateur. Hjört (1985, 1991) propose un estimateur de h déduit du classique estimateur de Nelson Aalen (Nelson (1972), Aalen (1978)), sans en étudier systématiquement les propriétés de convergence.

Enfin Mc Keague (1986), sous le nom d'"estimateur sieves", propose aussi de projeter un estimateur empirique sur une famille de fonctions orthogonales.

Dans la lignée de ces travaux nous étudions, dans ce papier, les propriétés de convergence, L^2 et ponctuelle, d'un estimateur h_n de h défini par la méthode des fonctions orthogonales à partir d'un estimateur classique Λ_n de Λ . Ces convergences établies, nous conclurons l'article en comparant les performances de h_n avec celles des estimateurs non paramétriques qu'on avait jusque là proposés, afin de justifier l'emploi de h_n dans des situations pratiques.

Le second paragraphe sera consacré à la définition de h_n et à l'exposé des principaux résultats de convergence. Nous discuterons les propriétés obtenues dans le troisième paragraphe, le quatrième contiendra les démonstrations, le cinquième la bibliographie.

II - RESULTATS DE CONVERGENCE

2.1) La fonction h n'étant pas de carré intégrable sur \mathbb{R}^+ pour les lois de survie usuelle (la loi exponentielle par exemple), nous construirons un estimateur de la restriction de h à un intervalle $[0, b]$, la continuité de h (donc celle de f) suffisant à obtenir son appartenance à $L^2([0, b])$. Ce point n'implique pas de restriction pratique : on peut toujours, pour réaliser l'estimation, choisir b supérieur au plus grand des X_i non censurés qu'on observe et même beaucoup plus grand, ce qui permet d'estimer h sur un intervalle "utile" suffisant au praticien.

b étant désormais fixé, nous supposons d'autre part vérifiée l'hypothèse usuelle : $H_0) : P[X_j > b, \delta_j = 0] > 0$ et $P[X_j > b, \delta_j = 1] > 0$.

H_0) assure simplement que l'on puisse obtenir des observations, censurées ou non, à droite de la valeur b , c'est-à-dire en pratique que ni la loi des X_i , ni celle des censures C_i ne sont concentrées sur un intervalle fini, ce qui est le cas usuel du modèle d'Efron.

2.2) Sans distinguer plus avant h et sa restriction à $[0, b]$, supposons donc que $h \in L^2([0, b])$ et que (e_i) , $i \geq 1$ constitue une base orthonormale de cet ensemble. Alors

h s'écrit $\sum_1^{\infty} a_i e_i$; avec :

$$a_i = \int_0^b e_i(x) h(x) dx = \int_0^b e_i d\bar{\Lambda}$$

où $\bar{\Lambda}$ est la mesure de densité h (i. e. de fonction de répartition Λ) sur $[0, b]$.

L'estimateur h_n est alors défini, $q(n)$ étant une suite croissante d'entiers, par :

$$h_n = \sum_1^{q(n)} \hat{a}_i e_i$$

$$\hat{a}_i = \int_0^b e_i \cdot d\bar{\Lambda}_n$$

où $\bar{\Lambda}_n$ est une mesure empirique approximant $\bar{\Lambda}$; c'est la mesure de fonction de répartition Λ_n égale à $-\text{Log}(1 - F_n)$, où F_n est l'estimateur de Kaplan-Meier de F (voir Dreesbeke et al (1988) pour une synthèse). Pratiquement $\bar{\Lambda}_n$ met en chaque X_i non censuré la masse $-\text{Log}\left(1 - \frac{1}{n - R_i + 1}\right)$ où R_i est le rang de X_i dans l'échantillon ordonné. Dès lors

$$\hat{a}_j = - \sum_{i/x_i < b} \delta_i \cdot e_j(X_i) \cdot \text{Log}\left[1 - \frac{1}{n - R_i + 1}\right]$$

En posant $K_n(x, t) = \sum_{i=1}^{q(n)} e_i(x) e_i(t)$, on a donc :

$$h_n(x) = \int_0^b K_n(x, t) d\bar{\Lambda}_n(t) = - \sum_{i/x_i < b} \delta_i \cdot K_n(X_i, x) \cdot \text{Log}\left[1 - \frac{1}{n - R_i + 1}\right]$$

On notera que Tanner et Wong (1983) ont étudié le même type d'estimateur, s'écrivant $\int K_n^*(x, t) d\Lambda_n^*(t)$, K_n^* correspondant cette fois à la méthode du noyau et Λ_n^* dérivant de l'estimateur de Nelson-Aalen (Nelson (1972), Aalen (1978)) de Λ , asymptotiquement équivalent à $\bar{\Lambda}_n$.

2.3) Comme l'appartenance de h à $L^2[0,b]$ est la condition sine qua non de construction de h_n , nous étudierons d'abord la convergence de h_n vers h au sens de la norme de cet espace, notée désormais : $\| \cdot \|_{L^2[0,b]}$. Cette convergence sera obtenue sous l'hypothèse générale suivante, vérifiée par les bases classiques de $L^2[0,b]$:

H_1) Les éléments (e_i) , $i \geq 1$, de la base choisie sont des fonctions continûment différentiables et uniformément bornées par un nombre M sur l'intervalle $[0,b]$.
En posant alors, pour toute fonction réelle m dérivable :

$$(1) N(m,b) = [|m(b)| + \int_0^b |m'(t)| dt]$$

nous pouvons définir la quantité D_n , caractéristique de la base (e_i) , par :

$$(2) D_n = \sum_1^{q(n)} N^2(e_i,b) = \sum_1^{q(n)} \left[|e_i(b)| + \int_0^b |e_i'(t)| dt \right]^2$$

et énoncer :

Théorème 1.

Soit b un réel positif tel que H_0 soit vérifiée, (e_i) une base de $L^2[0,b]$ telle que H_1 le soit.

Si l'on suppose que $q(n) \uparrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q(n)/n = 0$ et enfin $\lim_{n \rightarrow \infty} [D_n (\log n)^4 / n^2] = 0$, nous aurons : $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\|h_n - h\|_{L^2[0,b]}^2 \right) = 0$.

Si maintenant $q(n) \uparrow \infty$, de telle sorte que pour tous γ_1 , et γ_2 strictement positifs les séries de termes généraux $q(n) \exp\{-\gamma_1 n / q(n)\}$ et $n \left\{ \sum_{i=1}^{q(n)} \exp[-\gamma_2 n / \sqrt{q(n)} \cdot N(e_i,b)] \right\}$ convergent, on aura $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{p.s.} \left[\|h_n - h\|_{L^2[0,b]}^2 \right] = 0$.

2.4) Une base classique de $L^2[0,b]$ est constituée par les fonctions trigonométriques, définies par $e_1(t) = 1 / \sqrt{b}$ et $(k \geq 1, t \in [0,b])$:

$$(3) e_{2k}(t) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \left[\frac{2k\pi}{b} \left(t - \frac{b}{2} \right) \right], e_{2k+1}(t) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cos \left[\frac{2k\pi}{b} \left(t - \frac{b}{2} \right) \right]$$

Pour ces fonctions les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées, le majorant M étant égal à $\sqrt{2/b}$, et de surcroît on a :

$$N(e_i, b) = O \left\{ \int_0^b |e_i'(t)| dt \right\} = O(i)$$

On peut alors énoncer le corollaire suivant, dont la démonstration découle directement du théorème, 1 et de l'égalité précédente :

Corollaire.

Si la base (e_i) est celle des fonctions trigonométriques, la convergence vers 0 de $\|h_n - h\|_{L^2[0,b]}^2$ est assurée

* en moyenne si $q(n) \uparrow \infty$, $q(n)/n \rightarrow 0$, $(q(n))^3 (\text{Log}n)^4/n^2 \rightarrow 0$

* p.s. si $\forall \gamma, \gamma > 0$, $\sum_1^\infty n q(n) \exp\{-\gamma n / (q(n))^{3/2}\} < \infty$

(et en particulier, dans les deux cas, si $q(n)$ est la partie entière de $n^{2/3} / (\text{Log}n)^{4/3+\alpha}$, $\alpha > 0$)

2.5) Pour un x quelconque de $]0, b[$ posons alors :

$$(4) \quad A_n = \sqrt{n} (h_n(x) - E(h_n(x))) / B_n$$

$$\text{où } B_n^2 = \int_0^b K_n^2(x, t) \frac{h(t)}{1-L(t)} dt$$

Pour obtenir la normalité asymptotique de A_n , nous devons imposer à la suite $q(n)$ et à la base (e_i) la condition suivante :

$$H2) : q(n) / \sqrt{n} \cdot B_n = o(1) \text{ et } N(\bar{K}_n, b) (\text{Log}n)^2 / B_n \cdot \sqrt{n} = o(1), \text{ lorsque } n \rightarrow \infty .$$

Ici, x étant fixé, \bar{K}_n représente la fonction : $t \rightarrow K_n(x, t)$

On obtient alors :

Théorème 2

Sous les conditions H_0 , H_1 et H_2) on a : $A_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}^0(0,1)$, lorsque $n \rightarrow \infty$.

2.6) Remarques

Si la quantité $q(n)$ reste bornée, H_2) est automatiquement vérifiée ($N(\bar{K}_n, b)$ et B_n sont constantes), donc $A_n \rightarrow \mathcal{N}^0(0,1)$. Il n'y a d'ailleurs dans ce cas qu'à utiliser le théorème central limite standard en lieu de la démonstration du §IV. L'intérêt du résultat reste limité puisqu'alors la quantité $\overline{h_n}(x) - h_n(x) = \sum_{q(n)+1}^{\infty} a_i e_i(x)$ ne tend pas vers 0 ...

Dans le cas général, $q(n) \uparrow \infty$, mais il est difficile d'obtenir la loi limite de $A_n^* = (h_n(x) - h(x)) / \sigma(h_n(x))$. Il est facile (voir 4, § IV) de montrer que sous H_2) $V(h_n(x))$ est équivalent à B_n^2/n mais $\sqrt{n} (\overline{h_n}(x) - h(x)) / B_n$ qui est

$O \left[\sqrt{n} \left(\sum_{q(n)+1}^{\infty} a_i \right) / B_n \right]$ dépend entièrement de la série des coefficients a_i : sans hypothèse précise sur celle-ci, on ne peut obtenir la convergence à 0 de ce terme, donc la loi limite cherchée.

Si la base choisie est celle des fonctions trigonométriques on peut montrer (voir 5, § IV) qu'existe une constante A , $A > 0$, telle que $B_n^2 \geq A \cdot q(n)$, pour n grand. Comme $N(\bar{K}_n, b) = O[(q(n))^2]$, H_2) est vérifiée en ce cas dès que $q(n)^{3/2} [\text{Log}(n)]^2 / \sqrt{n}$ tend vers zéro.

2.7) Dans les résultats qui précèdent, la convergence de h_n vers h résulte évidemment de la convergence uniforme de A_n vers A (Breslow - Crowley 1974), l'essentiel des démonstrations concernant le comportement asymptotique de quantités du type : $\int_0^b e_i(t) d(\bar{A}_n(t) - \bar{A}(t))$

Elles se basent pratiquement sur le lemme 1 ci-dessous, qui montre que ces quantités s'écrivent sous forme d'une somme de variables indépendantes, à un reste asymptotiquement négligeable près, à partir d'une évaluation de $A_n(t) - A(t)$ introduite par

N.Reid (1981).En utilisant la notion de "courbes d'influence", cet auteur a montré exactement que :

$$(5) \quad \forall t, t \geq 0, \Lambda_n(t) - \Lambda(t) = P_n(t) + R_n(t)$$

où

$$(6) \quad n.P_n(t) = \sum_{i=1}^n \{ I_{\{\delta_i=1\}} k_1(t, X_i) + I_{\{\delta_i=0\}} k_2(t, X_i) \}$$

avec

$$\begin{cases} k_1(t, s) = \int_0^{s \wedge t} \frac{h(u)}{1-L(u)} du - \frac{I_{\{s \leq t\}}}{1-L(s)} \\ k_2(t, s) = \int_0^{s \wedge t} \frac{h(u)}{1-L(u)} du \end{cases}$$

($s \wedge t = \min(t, s)$), k_1 et k_2 sont les "courbes d'influence" de Λ). Le reste R_n se majore uniformément sur tout intervalle $[0, T]$. Il existe ainsi un réel C_T (variable avec T) tel que

$$(7) \quad \sup_{[0, T]} |R_n(t)| \leq C_T \left\{ \left[\sum_{i=0}^1 \left\| H_n^i - H^i \right\| \right]^2 + \frac{1}{n} \right\}$$

où $H^i(t) = P(X_j \leq t, \delta_j = i)$ et $H_n^i(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{\{X_j \leq t, \delta_j = i\}}$, pour $i = 0, 1$ et

$\|F\| = \sup_{0 \leq x \leq T} F(x)$. La majoration est valable dès que l'on a :

$$P(X_i > T, \delta_i = 0) > 0 \quad \text{et} \quad P(X_i > T, \delta_i = 1) > 0$$

(cf. Mielniczuk (1983) pour une synthèse et mise en forme des résultats de Reid), d'où l'hypothèse H_0) introduite.

Soit alors m une application de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , supposée continuellement différentiable, b un réel positif tel que $L(b) < 1$.

Si nous posons :

$$C(m, b) = \int_0^b m(t) d\bar{\Lambda}_n(t) - \int_0^b m(t) d\bar{\Lambda}(t)$$

et

$$(8) \quad Z_i = \int_0^{X_i \wedge b} m(t) \frac{h(t)}{1-L(t)} dt - I_{\{(\delta_i=1) \cap (X_i \leq b)\}} \frac{m(X_i)}{1-L(X_i)}$$

nous obtenons :

Lemme 1

Les Z_i sont des variables centrées, de variance égale à $\int_0^b m^2(t) \frac{h(t)}{1-L(t)} dt$, et on peut écrire

$$(9) \quad C(m,b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i + R_n^*$$

où

$$(10) \quad |R_n^*| \leq N(m,b) \cdot \left\{ \sup_{t \in [0,b]} |R_n(t)| \right\}$$

Dès lors on aura :

$$\begin{cases} E(C(m,b)) = O\left(\frac{(\text{Log}n)^2}{n}\right) \\ V(C(m,b)) = \frac{1}{n} V(Z_i) + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

La démonstration de ce lemme, comme celle des théorèmes qui précèdent, est fournie au paragraphe IV. On notera que Lo et Singh (1986) avaient déjà introduit une décomposition du même type, pour $F_n(t) - F(t)$, et l'avaient utilisée pour étudier la convergence d'un estimateur de h basé sur la méthode du noyau (Lo, Mack et Wang (1989)).

III -QUELQUES COMMENTAIRES

1) Outre les convergences ponctuelles et L^2 , on a déjà obtenu des théorèmes de convergence uniforme p.s. pour un estimateur s'écrivant $f_n / (1 - F_n + \frac{1}{n})$ (f_n est un estimateur de f construit par la méthode du noyau, F_n l'estimateur de Kaplan Meier, le résultat est dans Földes et al. (1981)) et pour l'estimateur de Tanner-Wong, évoqué au §2 (le résultat est dans Gneyou (1991)). Les convergences obtenues ont lieu sur un intervalle borné $[0,T]$.

Ce type de résultats est immédiat pour h_n : sous réserve que la série $\sum_{i=1}^{q(n)} a_i e_i$ converge uniformément vers h sur $[0,b]$, il est clair que pour obtenir :

$$\sup_{0 \leq x \leq b} |h_n(x) - h(x)| \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$$

$$\text{il suffira de prouver que } \sup_{0 \leq x \leq b} \left| \sum_1^{q(n)} (\hat{a}_i - a_i) e_i(x) \right| \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$$

$$\text{soit : } \forall \varepsilon > 0, \sum_n \left\{ \sum_1^{q(n)} P \left(|\hat{a}_i - a_i| > \varepsilon/q(n) \right) \right\} < \infty$$

et cette condition est vérifiée (cf. (14)) si pour tous $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, les séries

$$\sum_1^{\infty} n \exp \left\{ -\gamma_1 n / q(n) N(e_i, b) \right\} \text{ et } \sum_1^{\infty} \exp \left\{ -\gamma_2 n / q^2(n) \right\}$$

convergent, c'est-à-dire dans le cas des fonctions trigonométriques, en choisissant $q(n) = \sqrt{n} / \log n$ par exemple.

2) Les résultats évoqués ci-dessus ne permettent pas de comparer les efficacités des divers estimateurs existant de h , avec h_n , du point de vue des convergences fonctionnelles. On peut par contre établir une comparaison à partir des M.S.E et des M.I.S.E des estimateurs existant.

* Pour les convergences ponctuelles Grégoire (1991) et Mielniczuk (1983) ont montré que les estimateurs à noyau de la densité f et du taux de hasard h des X_i avaient un M.S.E asymptotique optimal en $n^{-4/5}$, la décomposition biais-variance obtenue s'écrivant, aux constantes près, comme dans le cas de données non censurées. Tanner et Wong (1983) ont, eux montré que, sous certaines conditions, on pouvait écrire la variance asymptotique de leur estimateur h_n^* sous la forme

$$V(h_n^*(x)) = \frac{A_1}{n\delta(n)} \frac{h(x)}{1-L(x)} + 0 \left(\frac{1}{n\delta(n)} \right)$$

avec $\delta(n) \rightarrow 0$, $n\delta(n) \rightarrow \infty$, [$\delta(n)$ est la "fenêtre" au choix du statisticien, C_1 dépend du choix du "noyau"]. Nous pouvons ici écrire, quand la base (e_i) est celle des fonctions trigonométriques et $q(n)$ choisi tel que $H_1)$ et $H_2)$ soient vérifiées :

$$(11) \quad V(h_n(x)) \sim \frac{B_n^2}{n} \sim \frac{q(n)}{n} \frac{h(x)}{1-L(x)} \cdot A_2$$

(voir 4) et 5), au § IV). La similitude est frappante.

h_n sera donc aussi performant que les estimateurs à noyau pour estimer les fonctions h telles que le biais $\sum_{q(n)+1}^{\infty} a_i e_i(x)$ converge assez rapidement vers 0 (par ex. en $(q(n))^{-4}$, ce qui correspond au biais usuel que donne un estimateur du noyau avec $\delta(n) = (q(n))^{-1}$)

* Pour les convergences dans $L^2[0,b]$, on obtient aussi pour le MISE une vitesse optimale en $n^{4/5}$ avec les estimateurs à noyau de h (cf. Grégoire (1991), Singpurwalla et Wong (1983)). La vitesse de convergence de h_n paraît, a priori, moins rapide. Dans le cas des fonctions trigonométriques, à partir de (12), en choisissant $q(n)$ impair de la forme $q(n) = 2 \overline{q(n)} + 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{q(n)} E \left[(\hat{a}_i - a_i)^2 \right] = & \\ & \frac{1}{b} \frac{\overline{q(n)} + 1}{n} \int_0^b \frac{h(t)}{1-L(t)} dt + O \left((\overline{q(n)})^3 \frac{(\log n)^4}{n^2} \right) \\ & + O \left((\overline{q(n)})^2 \frac{(\log n)^2}{n^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

quantité équivalente à $\frac{1}{b} \frac{\overline{q(n)} + 1}{n} \int_0^b \frac{h(t)}{1-L(t)} dt$, pourvu que l'on choisisse $\overline{q(n)}$ tel que $\overline{q(n)} (\log n)^2 / \sqrt{n}$ tende vers 0 (ce qui n'est pas nécessaire à la convergence du MISE).

Comme de surcroît (cf. Szegő (1959)) on a ici : $\forall k, a_{2k}^2 + a_{2k+1}^2 = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, le

MISE asymptotique s'écrit alors :

$$AMISE = \frac{1}{b} \frac{\overline{q(n)} + 1}{n} \int_0^b \frac{h(t)}{1-L(t)} dt + O\left(1 / \overline{q(n)}\right)$$

et devient donc équivalent à $O\left(1 / \overline{q(n)}\right)$, sous la contrainte imposée à $\overline{q(n)}$.

Le résultat précédent est valable sans conditions particulières sur f , mais l'écart optimal obtenu apparaît plus grand que dans le cas de la méthode du noyau. Il dépend ici encore étroitement du reste de la série $\sum_{q(n)+1}^{\infty} a_i^2$, et de la base (e_i) choisie.

De façon générale, l'efficacité de h_n dépendra donc, comme dans le cas des échantillons non censurés, du choix d'une base (e_i) "la plus adaptée possible" à h , et d'un $q(n)$ optimal. Hjört (1985) propose d'utiliser une méthode de validation croisée classique en ce domaine, mais n'en justifie pas l'usage, d'un point de vue théorique. Notre étude reste donc à compléter sur ce point, tout comme dans celui d'une mise en oeuvre pratique (par simulation), qui devrait faire l'objet de travaux ultérieurs.

IV - DEMONSTRATIONS

1) Théorème 1

1) Il s'agit d'abord de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$, où M_n est le "M.I.S.E." usuel, c'est-à-dire $M_n = E \left(\left\| h_n - h \right\|_{L^2[0,b]}^2 \right)$.

Les (e_i) formant une base orthonormale de $L^2 [0,b]$, on a :

$$M_n = \sum_{i=1}^{q(n)} E[(\hat{a}_i - a_i)^2] + \sum_{q(n)+1}^{\infty} a_i^2$$

Or $\hat{a}_i - a_i = \int_0^b e_i d\bar{\Lambda}_n - \int_0^b e_i d\bar{\Lambda}$, donc, d'après le lemme (1) (formules 26, 28) :

$$E((\hat{a}_i - a_i)^2) = \frac{1}{n} \int_0^b e_i^2(t) \frac{h(t)}{1-L(t)} dt + O \left\{ (N(e_i, b))^2 \cdot \frac{(\log n)^4}{n^2} \right\} \\ + O \left\{ N(e_i, b) \cdot \left[\int_0^b e_i^2(t) \frac{h(t)}{1-L(t)} dt \right]^{1/2} \cdot \frac{(\log n)^2}{n^{3/2}} \right\}$$

soit, les e_i étant uniformément bornés :

$$(12) \quad \sum_{i=1}^{q(n)} E (\hat{a}_i - a_i)^2 = \frac{1}{n} \int_0^b \left(\sum_{i=1}^{q(n)} e_i^2(t) \right) \frac{h(t)}{1-L(t)} dt + O \left\{ D_n \cdot \frac{(\log n)^4}{n^2} \right\} \\ + O \left\{ \sum_{i=1}^{q(n)} (N(e_i, b)) \right\} \cdot \frac{(\log n)^2}{n^{3/2}}$$

Le premier terme est $O(q(n)/n)$. S'il tend vers 0, comme le second, le carré du troisième terme qui est $O[q(n) \cdot D_n (\log n)^4 / n^3]$ tendra aussi vers 0. Enfin, comme

$q(n) \uparrow \infty, \sum_{q(n)+1}^{\infty} a_i^2 \rightarrow 0$: c'est le reste d'une série convergente égale à $\int_0^b h^2(t) dt$.

La première partie du théorème est démontrée.

2) Pour la seconde partie, en utilisant les propriétés des e_i et le fait que $q(n) \uparrow \infty$, on est ramené à montrer que $\sum_1^{q(n)} (\hat{a}_i - a_i)^2 \xrightarrow{p.s.} 0$, soit a fortiori :

$$\forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \quad \sum_n P \left[\sum_1^{q(n)} (\hat{a}_i - a_i)^2 > \varepsilon \right] < \infty$$

ou encore

$$(13) \quad \forall \varepsilon, \varepsilon > 0, \quad \sum_n \left\{ \sum_1^{q(n)} P \left(|\hat{a}_i - a_i| > \sqrt{\varepsilon} / \sqrt{q(n)} \right) \right\} < \infty$$

Mais d'après le lemme 1, on peut écrire, pour tout $\alpha > 0$:

$$P(|\hat{a}_i - a_i| > \alpha) \leq P \left(\left| \sum_{j=1}^n Z_j^i \right| > \frac{\alpha n}{2} \right) + P \left(|R_{i,n}^*| > \frac{\alpha}{2} \right)$$

avec

$$Z_j^i = \int_0^{X_j \wedge b} e_i(t) \frac{h(t)}{1-L(t)} dt - I_{\{(\delta_j = 1) \cap (X_j \leq b)\}} \frac{e_i(X_j)}{1-L(X_j)}$$

et (cf (7) et (10)), il existe un réel C_b tel que :

$$\left| R_{i,n}^* \right| \leq C_b N(e_i, b) \left\{ \frac{1}{n} + \left[\sum_0^1 \left\| H_n^i - H^i \right\|^2 \right] \right\}$$

Pour n assez grand on peut minorer $\frac{1}{2} [\alpha / 2 C_b N(e_i, b) - n^{-1}]^{1/2}$ par $(\alpha / 9 C_b N(e_i, b))^{1/2}$.

On en conclut (cf. (24)) :

$$\begin{aligned} P \left(\left| R_{i,n}^* \right| > \frac{\alpha}{2} \right) &\leq \sum_0^1 P \left[\left\| H_n^i - H^i \right\| > (\alpha / 9 C_b \cdot N(e_i, b))^{1/2} \right] \\ &\leq 16 (n + 1) \exp \left\{ - n \alpha / 288 \cdot C_b \cdot N(e_i, b) \right\} \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Bernstein (Pollard (1984), p 193), on a aussi :

$$P \left(\left| \sum_{j=1}^n Z_j^i \right| > \frac{\alpha n}{2} \right) \leq 2 \exp \left[- \alpha^2 n^2 / 8K \right]$$

$$\text{où } K \leq n M^2 \int_0^b \frac{h(t)}{1-L(t)} dt + \frac{1}{3} M \left(\int_0^b \frac{h(t)}{1-L(t)} dt + \frac{1}{1-L(b)} \right) \frac{\alpha n}{2}$$

(M majore les (e_i) , en valeur absolue, d'après H1)).

Finalement, en remplaçant α par $\sqrt{\varepsilon} / \sqrt{q(n)}$, on obtient :

$$\begin{aligned} (14) \quad P \left(\left| \hat{a}_i - a_i \right| > \sqrt{\varepsilon} / \sqrt{q(n)} \right) &= O \left\{ n \exp \left[- \alpha_1 n / \sqrt{q(n)} N(e_i, b) \right] \right\} \\ &+ O \left\{ \exp \left[- \alpha_2 n / q(n) \right] \right\} \end{aligned}$$

avec $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 > 0$. Les conditions du théorème assurent donc la convergence souhaitée.

Q.E.D.

2) Démonstration du théorème 2

$$1) \text{ Posons d'abord } \overline{h}_n(x) = \sum_1^{q(n)} a_i e_i(x).$$

Comme $h_n(x) = \int_0^b K_n(x,t) d\bar{\Lambda}_n(t)$ et que $\bar{h}_n(x) = \int_0^b K_n(x,t) d\bar{\Lambda}(t)$ on aura (lemme 1) :

$$h_n(x) - \bar{h}_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n Z_{i,n} + R_n^*(x)$$

$$\text{où } Z_{i,n} = \int_0^{X_i \wedge b} K_n(x,t) \frac{h(t)}{1-L(t)} dt - I_{\{(\delta_i=1) \cap (X_i \leq b)\}} \frac{\bar{K}_n(X_i)}{1-L(X_i)}$$

$$\text{Donc } A_n = \sqrt{n} \left\{ \frac{1}{n} \sum_1^n Z_{i,n} + R_n^*(x) - E(h_n(x) - \bar{h}_n(x)) \right\} / B_n$$

D'autre part on a (cf. lemme 1)

$$\begin{aligned} * \sqrt{n} \cdot E(h_n(x) - \bar{h}_n(x)) / B_n &= O \left(\sqrt{n} \left[N(\bar{K}_n, b) \cdot \frac{(\log n)^2}{n} \right] / B_n \right) \\ &= o(1) \text{ sous } H_2 \end{aligned}$$

* $\sqrt{n} R_n^*(x) / B_n \rightarrow 0$ en probabilité, puisque (voir la majoration de R_n^* dans la preuve du théorème 1) :

$$\begin{aligned} P \left[\sqrt{n} R_n^*(x) / B_n > \varepsilon \right] &= O \left\{ n \cdot \exp \left[-\gamma \left(\frac{\varepsilon B_n}{\sqrt{n}} \right) \cdot n \cdot / N(\bar{K}_n, b) \right] \right\} \\ &= O \left\{ n \cdot \exp \left[-\gamma_1 \sqrt{n} B_n / N(\bar{K}_n, b) \right] \right\} \end{aligned}$$

et, sous H_2 , cette expression, $O \left\{ n \cdot \exp \left\{ -\gamma^*(\text{Log} n)^2 \right\} \right\}$, tend vers 0.

La limite en loi de A_n est donc celle de $\sqrt{n} \left[(1/n) \sum_1^n Z_{i,n} \right] / B_n$, soit celle de $\sum_1^n Z'_{i,n}$ où $Z'_{i,n} = Z_{i,n} / \sqrt{n} \cdot B_n$.

2) On sait que $E(Z_{i,n}) = 0$ et $V(Z_{i,n}) = B_n^2$. Donc les $Z_{i,n}'$ sont centrées, de variances égales à $\frac{1}{n}$ et $S_n^2 = \sum_1^n V(Z_{i,n}') = 1$. Pour montrer que $\sum_1^n Z_{i,n}' \rightarrow \mathcal{N}^0(0,1)$, il suffira de prouver (théorème de Liapounov : Billingsley (1968) p 44) qu'il existe δ , $\delta > 0$ tel que :

$$(17) \quad \sum_1^n E (| Z_{i,n}' |^{2+\delta}) \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty$$

Or les v.a. $Z_{i,n}$ sont toutes majorées en valeur absolue par (e_i bornées) $O(q(n))$, donc $E (|Z_{i,n}|^{2+\delta}) = O [(q(n))^\delta \cdot B_n^2]$ et

$$\begin{aligned} \sum_1^n E (| Z_{i,n}' |^{2+\delta}) &= n \cdot E (|Z_{i,n}|^{2+\delta}) / (\sqrt{n} \cdot B_n)^{2+\delta} \\ &= O \{ (q(n))^\delta / n^{\delta/2} \cdot B_n^{\delta,n} \} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 sous la condition H_2) Q.E.D.

3) DEMONSTRATION DU LEMME 1

1) Le théorème d'intégration par parties permet d'écrire que $C(m,b)$ vaut :

$$(18) \quad \left\{ m(b) \Lambda_n(b) - \int_0^b \Lambda_n(t) m'(t) dt \right\} - \left\{ m(b) \Lambda(b) - \int_0^b m'(t) \Lambda(t) dt \right\}$$

Λ_n et Λ étant les fonctions de répartition de $\bar{\Lambda}_n$ et $\bar{\Lambda}$. En décomposant $\Lambda_n - \Lambda$ selon (5), on obtient :

$$(19) \quad C(m,b) = \left\{ m(b) P_n(b) - \int_0^b P_n(t) m'(t) dt \right\} + R_n^*$$

avec

$$(20) \quad R_n^* = m(b) R_n(b) - \int_0^b R_n(t) m'(t) dt$$

La majoration de R_n^* donnée dans le lemme est immédiate. Reste à montrer que le premier terme constituant $C(m,b)$ s'écrit $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$.

2) D'après (6), on a :

$$(21) \quad n P_n(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^{X_i \wedge t} \frac{h(s)}{1-L(s)} ds - \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-L(X_i)} I_{\{(X_i \leq t) \cap (\delta_i = 1)\}}$$

soit

$$(22) \quad n P_n(t) = \int_0^t u(s) ds - \mu(]0,t])$$

en posant :

$$u(t) = \left\{ \sum_{i=1}^n (n-i+1) I_{[X_{(i-1)}, X_{(i)}]}^{(t)} \right\} \frac{h(t)}{1-L(t)}$$

et

$$\mu = \sum_{i=1}^n I_{\{\delta_i=1\}} \frac{1}{1-L(X_i)} \cdot \delta X_i$$

($X_{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, représente comme d'habitude l'échantillon ordonné, avec $X_{(0)} = 0$).

On obtient alors directement d'après (22) :

$$\begin{aligned} n \int_0^b P_n(t) m'(t) dt &= \int_0^b (m(b) - m(s)) u(s) ds - \int_0^b (m(b) - m(s)) d\mu(s) \\ &= n.m(b) P_n(b) - \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{X_i \wedge b} m(s) \frac{h(s)}{1-L(s)} ds \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n m(X_i) \frac{I_{\{(\delta_i=1) \cap (X_i \leq b)\}}}{1-L(X_i)} \end{aligned}$$

en remplaçant u et μ par leurs expressions.

$$\text{Donc } C(m,b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i + R_n^*, \text{ les } Z_i \text{ étant définis en (8).}$$

3) Les variables X_i , i.i.d, ont la densité λ , égale à $f(1-G) + g(1-F)$, puisqu'elles ont la f.d.r. $1 - (1-F)(1-G)$. D'autre part, la mesure ν définie par $\nu(A) = P(X_i \in A, \delta_i=1)$ admet la densité $f(1-G)$. Dès lors :

$$E(Z_i) = \int_0^\infty \left(\int_0^{s \wedge b} m(t) \frac{h(t)}{1-L(t)} dt \right) \lambda(s) ds - \int_0^\infty m(s) \frac{I_{\{s \leq b\}}}{1-L(s)} f(s) (1-G(s)) ds$$

Le premier des deux termes, valant : $\int_0^b \left(\int_t^\infty \lambda(s) ds \right) m(t) \frac{h(t)}{1-L(t)} dt$ (théorème de Fubini) annule le second, donc les Z_i sont centrées.

$$\text{De même } E(Z_i^2) = \sum_{i=1}^3 A_i, \text{ avec}$$

$$A_1 = \int_0^\infty \left(\int_0^{s \wedge b} m(t) \frac{h(t)}{1-L(t)} dt \right)^2 \lambda(s) ds$$

$$A_2 = -2 \int_0^\infty \left(\int_0^{s \wedge b} m(t) \frac{h(t)}{1-L(t)} dt \right) \cdot \left(m(s) \frac{I_{\{s \leq b\}}}{1-L(s)} \right) f(s) (1-G(s)) ds$$

$$A_3 = \int_0^\infty \left(\frac{m(s) I_{\{s \leq b\}}}{1-L(s)} \right)^2 f(s) (1-G(s)) ds = \int_0^b m^2(s) \frac{h(s)}{1-L(s)} ds$$

On veut montrer que $V(Z_i) = A_3$. Reste donc à prouver que $A_2 = -A_1$. Il suffit d'intégrer par parties A_1 : $-(1-L)$ étant primitive de λ ; on aura bien :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[- \left\{ \int_0^{s \wedge b} m(t) \cdot \frac{h(t)}{1-L(t)} dt \right\}^2 (1-L(s)) \right]_{s=0}^{s=\infty} \\ &+ 2 \int_0^\infty (1-L(s)) \left\{ \int_0^{s \wedge b} m(t) \frac{h(t)}{1-L(t)} dt \right\} \left\{ \frac{m(s) h(s)}{1-L(s)} I_{\{s \leq b\}} \right\} ds \\ &= 0 - A_2 \end{aligned}$$

3) Comme $E(Z_i) = 0$, $E(C(m,b)) = E(R_n^*)$, et donc, d'après (20) et (7), il existe un réel positif C_b tel que :

$$(23) \quad |E C(m,b)| \leq N(m,b) \cdot C_b \left\{ \frac{1}{n} + \sum_{i=0}^1 E \left[\left\| H_n^i - H^i \right\|^2 \right] \right\}$$

Une étude attentive de Pollard (1984), p 13-16, montre que, bien que les H_n^i et H^i ne soient pas des f.d.r. "standard" on peut écrire :

$$(24) \quad \forall \varepsilon > 0, P \left(\left\| H_n^i - H^i \right\| > \varepsilon \right) \leq 8 (n + 1) \exp (- n \varepsilon^2 / 32)$$

En "coupant" alors $\left\| H_n^i - H^i \right\|^2$ par $I \left\{ \left\| H_n^i - H^i \right\| > \text{Log} n / \sqrt{n} \right\}$, on obtient :

$$E \left(\left\| H_n^i - H^i \right\|^2 \right) \leq \frac{(\text{log} n)^2}{n} + 32 (n + 1) \exp (- (\text{log} n)^2 / 32)$$

puisque $\left\| H_n^i - H^i \right\|$ se majore par 2.

On aurait de même :

$$E \left(\left\| H_n^i - H^i \right\|^4 \right) \leq \frac{(\text{log} n)^4}{n^2} + 128 (n + 1) \exp (- (\text{log} n)^2 / 32)$$

Alors (23) permet d'écrire :

$$(25) \quad |E(C(m,b))| = O \left\{ N(m,b) \cdot C_b \frac{(\text{log} n)^2}{n} \right\}$$

En utilisant encore (9), on a aussi :

$$(26) \quad E \{ [(C(m,b))]^2 \} = \frac{1}{n} V(Z_1) + E \left[(R_n^*)^2 \right] + 2 E \left[R_n^* \cdot \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Z_i \right) \right]$$

avec

$$(27) \quad E \left[(R_n^*)^2 \right] = o \left\{ [N(m,b) \cdot C_b]^2 \frac{(\log n)^4}{n^2} \right\}$$

et donc (inégalité de Schwarz)

$$(28) \quad \frac{1}{n} E \left(R_n^* \left(\sum_1^n Z_i \right) \right) = O \left\{ [N(m,b) C_b] \times \frac{(\log n)^2}{n} \left\{ \frac{1}{n} \int_0^b m^2(t) \frac{h(t)}{1-L(t)} dt \right\}^{1/2} \right\}$$

Le lemme s'ensuit.

■

4) Calcul du biais et de la variance de $h_n(x)$

1) On peut écrire :

$$V(h_n(x)) = E \left\{ \left(h_n(x) - \bar{h}_n(x) \right) - E \left(h_n(x) - \bar{h}_n(x) \right) \right\}^2$$

avec :

$$h_n(x) - \bar{h}_n(x) = \int_0^b K_n(x, t) d\bar{\Lambda}_n(t) - \int_0^b K_n(x, t) d\bar{\Lambda}(t)$$

D'après (25), on a donc

$$E(\bar{h}_n(x) - h_n(x)) = O \left\{ N(\bar{K}_n, b) \cdot (\text{Log} n)^2 / n \right\}$$

Sous la condition H₂) (2ème partie) cette quantité est négligeable devant B_n^2 / \sqrt{n} ,
alors que $E \left[\left(h_n(x) - \bar{h}_n(x) \right)^2 \right]$ est elle-même équivalente à cette quantité (cf.26-27).

Finalement $V(h_n(x)) = \frac{B_n^2}{n} (1 + o(1))$.

$$2) E \left(h_n(x) - h(x) \right) = E \left(h_n(x) - \bar{h}_n(x) \right) + \sum_{q(n)+1}^{\infty} a_i e_i(x)$$

Les e_i étant bornés, d'après ce qui précède, on obtient le biais de $h_n(x)$ égal à

$$O \left(\sum_{q(n)+1}^{\infty} |a_i| \right) + O \left(N(\bar{K}_n; b) \cdot (\text{Log}n)^2 / n \right).$$

5) Equivalent asymptotique de B_n^2 (base des fonctions trigonométriques).

Lorsque les (e_i) sont les fonctions définies en (3), et si $q(n)$ est impair, un calcul classique donne :

$$K_n(x, t) = \sum_1^{q(n)} e_i(x) e_i(t) = \frac{1}{b} \cdot \sin \left\{ q(n) \frac{\pi}{b} (x - t) \right\} / \sin \left\{ \frac{\pi}{b} (x - t) \right\}$$

quotient défini sans ambiguïté pour tout $x, 0 < x < b$: pour tout $t \in [0, b]$ le dénominateur ne s'annule que pour $x = b$, auquel cas on prolonge le quotient à $q(n)$, par continuité.

En effectuant le changement de variables $u = q(n) \cdot \frac{\pi}{b} (x - t)$, on obtient

$$B_n^2 = q(n) \cdot \int_{\mathbb{R}} g_n(u) du$$

où

$$g_n(u) = \frac{1}{\pi b} I_{\left\{ q(n) \frac{x-b}{b} \pi, q(n) \frac{x}{b} \pi \right\}}(u) \left\{ \frac{1}{q(n)} \frac{\sin u}{\sin(u/q(n))} \right\}^2 \frac{h \left(x - \frac{bu}{\pi q(n)} \right)}{1 - L \left(x - \frac{bu}{\pi q(n)} \right)}$$

Soit $a = \sup \left(\left| \frac{x-b}{b} \right|, \frac{x}{b} \right)$. Pour $g_n(u) \neq 0$, nous aurons $-\pi < u/q(n) \leq \pi a$

et comme $a < 1$, $\sin a / \sin(a/q(n))$, ici encore défini sans ambiguïté, est tel que :

$$(29) \quad \left\{ \sin(u/q(n)) / (u/q(n)) \right\} \in \left[\frac{\sin a}{a}, 1 \right]$$

Alors :

$$* \text{ pour tout réel } a, \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(u) = \frac{2}{\pi b} \left(\frac{h(x)}{1 - L(x)} \right) \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$$

($q(n) \uparrow \infty$, h et L sont continues).

* pour n assez grand $g_n(u) \leq K \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \left(\sup_{0 \leq t \leq b} h(t) \right) / (1 - L(b))$
(cf. 29)).

Donc, le théorème de Lebesgue s'appliquant, on peut écrire :

$$\int g_n(u) \, du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi b} \frac{h(x)}{1 - L(x)} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \, du$$

et B_n^2 est équivalent à $A \cdot q(n)$, $A > 0$, pour n grand Q.E.D.

■

V - BIBLIOGRAPHIE

Aalen O., (1978) Nonparametric estimation of partial transition probabilities in multiple decrement models, *Ann. Stat.* 6, p 534-545.

Billingsley P., (1968) *Convergence of probability measures*, Wiley New-York.

Breslow N., Crowley, J., (1974) A large sample study of the life table and product limit estimates under random censorship, *Ann. of statist.* 2 (1974), p 437-453.

Droesbeke, J.J., Fichet, B., Tassi, P., éditeurs, *Analyse statistique des durées de vie*, Economica (1989).

Efron, B., (1967) The two sample problem with censored data, *Proc. 5th Berkeley symp*, Vol. 4, p 831-853.

Földes, A., Rejtő, L. Winter, B.B., (1981) Strong consistency properties of nonparametric estimators for randomly censored data II. Estimation of density and failure rate - *Period. Math. Hungar* 12, p 15-29.

Gneyou K.E., (1991) *Inférence statistique non paramétrique pour l'analyse du taux de panne en fiabilité*. - Thèse soutenue à l'Université de Paris VI.

Grégoire, G. (1991) Bandwidth selection for the intensity of point processes. Application to hazard rate models for censored data. RR LMC/IMAG 859 I & M.

Hjört N.L., (1985) Discussion contribution to Andersen and Borgan's review article. *Scand. J. Statis.* - 12 - p 141-150.

Hjört N.L., (1991) Semiparametric estimation of parametric hazard rates. Invited paper presented at the Advanced Study Workshop on Survival Analysis and Related Topics.

Kaplan, E., Meier, P., (1958) Nonparametric estimation from incomplete observations, *JASA* 53, p 457-481.

Kimura, D.K., (1972) *Fourier series methods for censored data*, Thèse soutenue à l'Université de Washington.

Lo S.H., Mack, Y.P. and Wang, J.L., (1989) Density and hazard rate estimation for censored data via strong representation of the Kaplan-Meier estimator, *Prob.Th.and Rel. Fields.* 80 - p 461-473.

Lo S.H., Singh, K., (1986) The product-limit estimator and the bootstrap. Some asymptotic representations. *Prob. Th.and Rel. Fields* 71 - p 455-465.

McKeague, I.W., (1986) Estimation for a semimartingale regression model using the method of sieves, *Ann. Statis.* 14 - p 579-589.

Mielniczuk, J., (1983) Properties of some kernel estimators and of the adapted Loftgarten-Quesenberry estimator of a density function for censored data, *Periodica Math. Hungarica*, Vol. 16 (2), p 69-80

Nelson, W.B., (1972) Theory and applications of hazard plotting for censored failure data, *Technometrics* 14, p 945-966.

Pollard, D., (1984) *Convergence of stochastic processes*, Springer Verlag.

Pons, O., (1986) Vitesse de convergence des estimateurs à noyau pour l'intensité d'un processus ponctuel, *Statistics*, 17 - p 577-584.

Reid, N., (1981) Influence Functions for censored data, *The Annals of Stat.*, Vol. 9 n° 1, p 78-92.

Singpurwalla, N.D., Wong, W.H., (1983) The estimator of the hazard function from randomly censored data by kernel method, *JASA*, 78 p 478-481.

Szego, G., (1959) *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 32.

Tanner, A., Wing Hung Wong, (1983) The estimation of the hazard function from randomly censored data by the kernel method, *The Annals of statistics*, Vol. 11 n° 3, p 989-993.