

# STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

BRUNO MASSÉ

## **Concentration des mesures bornées sur $\mathbb{R}^N$ et problèmes statistiques associés**

*Statistique et analyse des données*, tome 13, n° 1 (1988), p. 59-113

[http://www.numdam.org/item?id=SAD\\_1988\\_\\_13\\_1\\_59\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAD_1988__13_1_59_0)

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

CONCENTRATION DES MESURES BORNEES SUR  $\mathbb{R}^N$   
ET PROBLEMES STATISTIQUES ASSOCIES

Bruno MASSÉ<sup>1</sup>

Laboratoire de Statistique et Probabilités  
Université des Sciences et Techniques  
de Lille Flandres Artois  
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées  
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ - CEDEX

Résumé : *La fonction de concentration de Paul Lévy, relative aux intervalles de  $\mathbb{R}$ , peut être étendue aux mesures bornées sur  $\mathbb{R}^N$  à partir des convexes fermés. Nous dégageons les propriétés générales de cette extension.*

*Le problème de son estimation est résolu à l'aide des fonctions de concentration des mesures empiriques d'un échantillon de cette loi. Puis des théorèmes permettant d'estimer au moins un convexe fermé réalisant la fonction de concentration sont démontrés.*

*Enfin nous définissons et estimons, à l'aide de la fonction de concentration, l' $\epsilon$ -support d'une probabilité sur  $\mathbb{R}^N$ .*

Abstract : *Paul Lévy's concentration function, with respect to the real intervals, may be extended to the bounded measures on  $\mathbb{R}^N$  through the convex sets. We draw up the general properties of this extension.*

*The problem its estimation is solved with the help of the concentration functions of the empirical distributions. Then theorems, which enable the estimation of one closed convex set realizing the value of the concentration function, are shown.*

*Finally we define and estimate, with the help of the concentration function, the  $\epsilon$ -support of a probability measure on  $\mathbb{R}^N$ .*

Mots clés : *Concentration - Fonction - Mesure - Estimation - Support - Vitesse de convergence.*

Indices de classification STMA : 01050 - 04080

Manuscrit reçu le 29.6.87, révisé le 22.2.88

INTRODUCTION.-

C'est Paul Lévy qui, le premier, a défini la fonction de concentration d'une probabilité ([6]), notamment pour illustrer la dispersion d'une somme de variables aléatoires. Son étude porte sur les probabilités sur  $\mathbb{R}$ .

Etant donné une probabilité  $P$ , cette fonction, notée  $Q$ , est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ , \quad Q(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} P\left(x - \frac{t}{2} ; x + \frac{t}{2}\right) .$$

Puisque les segments fermés de  $\mathbb{R}$ , de longueur  $t$  donnée, sont à la fois les boules de  $\mathbb{R}$  de rayon  $\frac{t}{2}$ , les convexes fermés, les compacts de mesure de Lebesgue  $t$  et les translatés de l'intervalle  $[-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$ , de nombreuses généralisations sont envisageables pour les probabilités sur  $\mathbb{R}^N$ .

En particulier Sevast'yanov ([9]) a comparé la fonction de concentration sur les convexes fermés et celle obtenue à partir des images par les transformations affines d'un convexe fixé ; Rogozin, dans  $\mathbb{R}$  ([8]), et Essen, à partir des boules fermées d'un espace multidimensionnel ([7]), ont étudié le rapport existant entre les fonctions de concentration de plusieurs variables aléatoires et celle de leur somme ; Roger ([1]) et l'auteur ([10]) ont dégagé les propriétés générales de la fonction de concentration sur les boules fermées d'un espace métrique séparable et résolu quelques problèmes de continuité soulevés par cette généralisation.

Cet article est consacré à la fonction de concentration sur les convexes fermés de l'espace euclidien à  $N$  dimensions  $\mathbb{R}^N$ .

Dans le premier paragraphe nous dégagons les propriétés générales de cette fonction. Nous démontrons en particulier que la fonction de concentration d'une mesure bornée quelconque est croissante et continue à droite, que la concentration, à  $t_0$  fixé, est atteinte sur au moins un convexe fermé de mesure de Lebesgue  $t_0$  et que le supremum de la définition peut n'être pris que sur les convexes fermés inclus dans un compact fixe de  $\mathbb{R}^N$  dépendant de  $t_0$ .

Dans le deuxième paragraphe, nous étudions quelques problèmes de continuité de la fonction de concentration. Nous prouvons notamment qu'elle est continue, en tant que fonction de deux variables, en un point si et seulement si elle y est continue par rapport à une de ses variables et que, si la mesure bornée  $\mu_0$  ne charge pas les frontières des parties convexes de  $\mathbb{R}^N$ , la fonction de concentration de  $\mu_0$  est continue.

Des problèmes d'estimation soulevés par cette généralisation de la définition de Paul Lévy et par le fait que la concentration est atteinte sur un convexe fermés sont étudiés dans le troisième paragraphe. Les estimateurs utilisés sont la fonction de concentration, et le convexe "réalisant" cette concentration, de la mesure empirique d'un échantillon. Nous obtenons, pour ces estimateurs, une vitesse de convergence exponentielle.

Dans le quatrième paragraphe nous définissons, à l'aide de la fonction de concentration sur les convexes fermés, les  $\varepsilon$ -supports et les pseudo- $\varepsilon$ -supports d'une probabilité  $P_0$  et nous montrons que l' $\varepsilon$ -support de la loi empirique d'un échantillon de loi  $P_0$  en est un estimateur convergent au sens de la distance de Hausdorff.

I - DEFINITION ET PROPRIETES GENERALES.-

On note  $C$  l'ensemble des convexes fermés compacts de l'espace euclidien à  $N$  dimensions  $\mathbb{R}^N$ ,  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^N$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $C_t$  l'ensemble des convexes compacts de volume  $t$  :

$$C_t = \{C \in C / \lambda(C) = t\} .$$

$C_0$  est alors le sous-ensemble de  $C$  composé des convexes compacts de dimension strictement inférieure à  $N$ .

$M_b$  désigne l'ensemble des mesures bornées sur la tribu borélienne de  $\mathbb{R}^N$ .

On appelle fonction de concentration l'application  $Q$  définie sur  $M_b \times \mathbb{R}^+$  par :

$$\forall \mu \in M_b, \forall t \in \mathbb{R}^+ : Q(\mu, t) = \sup_{C \in C_t} \mu(C) .$$

Et, pour  $\mu$  fixée, l'application  $Q(\mu, \cdot)$  est appelée fonction de concentration de  $\mu$ .

$d$  désignant la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^N$  pour tout  $C \in C$  et tout  $\delta \geq 0$ , le dilaté fermé d'ordre  $\delta$  de  $C$

$$C^{\delta]} = \{x \in \mathbb{R}^N / d(x, C) \leq \delta\}$$

est encore un convexe compact et l'application qui à tout  $\delta \geq 0$  associe  $\lambda(C^{\delta]})$  est continue et croissante. Donc, étant donné  $t_1$  et  $t_2$  vérifiant  $0 \leq t_1 < t_2$ , tout élément de  $C_{t_1}$  est contenu dans au moins un élément de  $C_{t_2}$ . Il en résulte que la fonction de concentration de toute mesure est non décroissante.

D'autre part, quel que soit  $t > 0$ ,  $\mathbb{R}^N$  est réunion dénombrable d'éléments de  $C_t$ . Donc  $Q(\mu, t) > 0$  si  $t > 0$  et si  $\mu$  n'est pas la mesure nulle.

Un des objets de ce paragraphe est de prouver que les convexes importants dans le calcul de  $Q(\mu, t)$  sont tous contenus dans un compact de  $\mathbb{R}^N$  et que  $Q(\mu, t)$  est atteint sur un élément de  $C_t$  si  $\mu$  et  $t$  vérifient

$$Q(\mu, 0) < Q(\mu, t) .$$

Cette dernière condition découlera de l'égalité

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0} \mu(B) = Q(\mu, 0)$$

où  $\beta_\alpha$  est l'ensemble des parties  $B$  de  $\mathbb{R}^N$ , appelées bandes de  $\mathbb{R}^N$  de largeur  $\alpha$ , vérifiant : il existe une forme linéaire  $f$  et deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$B = \{x \in \mathbb{R}^N / a \leq f(x) \leq b\}$$

et

$$\alpha = (b-a) / (f(e_1)^2 + \dots + f(e_N)^2)^{1/2} ,$$

$(e_1, \dots, e_N)$  désignant la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ .

Ces trois propriétés seront démontrées à l'aide de deux lemmes.

Le premier caractérise la limite d'une suite convergente, au sens de la distance  $d_H$  de Hausdorff sur l'ensemble  $F_b$  des fermés bornés de  $\mathbb{R}^N$  d'éléments de  $C$ ; le second établit un lien entre le volume, le diamètre d'un convexe et la largeur minimale des bandes de  $\mathbb{R}^N$  qui le contiennent.

Etant donné  $\delta \geq 0$  et un borélien  $B$ , on pose

$$B^\delta = \{x \in \mathbb{R}^N / d(x, B) \leq \delta\}$$

et 
$$\partial_\delta B = B^\delta \cap (B^c)^\delta$$

où  $B^c$  désigne le complémentaire de  $B$  dans  $\mathbb{R}^N$ .

I.A. - Lemme. -

Soit  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite d'éléments de  $C$  convergente, au sens de  $d_H$ , et  $C_0$  sa limite. Alors  $C_0 \in C$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(C_n) = \lambda(C_0) .$$

N.B. - En particulier  $C$  et  $C_t$ , pour tout  $t \geq 0$ , sont des fermés de  $(F_b, d_H)$ .

Démonstration :

Quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , si on pose  $d_n = d_H(C_n, C_0)$ ,

$$C_0 \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} C_n^{2d_n} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} C_0^{4d_n} = C_0 .$$

Or tout dilaté d'un convexe d'un espace normé est convexe.

Donc  $C_0$ , qui est une intersection de convexes, est convexe et, puisque  $C_0 \in F_b$ ,  $C_0 \in C$ .

D'autre part soit  $\lambda_0$  la restriction de  $\lambda$  au dilaté d'ordre 6 de  $C_0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que, si  $n \geq n_0$ ,  $d_n < 1$ .

Alors, si  $n \geq n_0$ ,

$$C_n \subset C_o^{2d_n} \subset C_n^{4d_n} \subset C_o^6 \quad ,$$

d'où

$$\lambda_o(C_n) \leq \lambda_o(C_o^{2d_n}) \leq \lambda_o(C_n) + \lambda_o(\partial_{4d_n} C_n) . \quad (1)$$

Or, en étendant [2] p. 1-16 aux mesures bornées, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_o(\partial_{4d_n} C_n) = 0 .$$

Ce qui, d'après (1), permet de conclure puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_o(C_o^{2d_n}) = \lambda_o(C_o)$$

I.B. - Lemme.-

Soit  $t > 0$  ,  $C \in C_t$  et  $d = \text{diam}(C)$ . Alors  $C$  est contenu dans une bande de  $\mathbb{R}^N$  de largeur  $N^{-1} \sqrt{\frac{tN!}{d}}$  .

Démonstration :

Supposons, sans perte de généralité, que le premier axe de coordonnées de  $\mathbb{R}^N$  coupe  $C$  selon un diamètre maximal.

Pour tout  $n \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$  , notons  $A_n$  (resp.  $B_n$ ) le point, ou un des points, de  $C$  ayant la plus grande (resp. petite)  $n$ ème coordonnée notée  $a_n$  (resp.  $b_n$ ).

Puisque  $C$  est convexe, il contient le polyèdre convexe de sommets  $A_1, \dots, A_N$  ,  $B_1, \dots$  et  $B_N$  dont le volume est

$$d \cdot \prod_{n=2}^{n=N} (a_n - b_n) / N! .$$



Finalement, si on pose

$$\alpha = \text{Min} \{a_n - b_n / n \in \{2, \dots, N\}\} ,$$

alors 
$$d\alpha^{N-1}/N! \leq d \cdot \prod_{n=2}^{n=N} (a_n - b_n)/N! \leq t$$

et C est contenu dans une bande de largeur  $\alpha$ . ■

I.C. - Proposition.-

Soit  $\mu \in M_b$ . Alors

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{B \in \beta_\alpha} \mu(B) = Q(\mu, 0) .$$

Démonstration :

La suite décroissante  $(\sup_{B \in \beta_{1/n}} \mu(B))_{n \in \mathbb{N}^*}$  a une limite  $\ell$  supérieure ou égale à  $Q(\mu, 0)$ . Supposons que  $\eta = \ell - Q(\mu, 0)$  soit strictement positif.

Soit  $B_0$  une boule fermée de  $\mathbb{R}^N$  vérifiant

$$\mu(B_0) > \mu(\mathbb{R}^N) - \eta/4 .$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $B_n$  un élément de  $\beta_{1/n}$  tel que

$$\mu(B_n) > \sup_{B \in \beta_{1/n}} \mu(B) - \eta/4$$

et posons

$$C_n = B_0 \cap B_n .$$

Alors quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mu(C_n) > \sup_{B \in \beta_{1/n}} \mu(B) - \eta/2 \quad . \quad (1)$$

La suite  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  étant contenue dans le compact  $B_0$ , elle possède au moins une valeur d'adhérence, pour  $d_H$ ,  $C_0$  contenue dans  $B_0$ . D'après le lemme I.A.,  $C_0 \in C_0$ .

Soit  $(C_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  une sous-suite de  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que la suite  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ , où  $d_k = d_H(C_{n_k}, C_0)$ , converge en décroissant vers 0. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $C_{n_k} \subset C_0^{2d_k}$ ; donc

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \mu(C_{n_k}) \leq \mu(C_0) \leq Q(\mu, 0) \quad . \quad (2)$$

Mais (1) entraîne :

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \mu(C_{n_k}) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{B \in \beta_{1/n_k}} \mu(B) - \eta/2 = \eta/2 + Q(\mu, 0) \quad . \quad (3)$$

Et (2) et (3) sont contradictoires. ■

Nous pouvons maintenant démontrer les deux propriétés importantes de ce paragraphe.

1.D. - Théorème. -

Soit  $(\mu, t, \eta) \in M_b \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$  tel que

$$Q(\mu, 0) < \eta < Q(\mu, t) \quad .$$

On pose  $C_{t, \eta} = \{C \in C_t / \mu(C) \geq \eta\}$ . Alors

$$1) \sup_{C \in \mathcal{C}_{t,\eta}} \text{diam}(C) < +\infty .$$

2) Il existe une boule  $B_0$  de  $\mathbb{R}^N$  qui contient tous les éléments de  $\mathcal{C}_{t,\eta}$ .

N.B. - Cette dernière propriété entraîne :

$$\sup_{\substack{C \in \mathcal{C}_t \\ C \not\subset B_0}} \mu(C) < Q(\mu, t) = \sup_{C \in \mathcal{C}_t \\ C \subset B_0} \mu(C) .$$

Démonstration :

1) D'après la proposition I.C., il existe  $\alpha_0 > 0$  tel que , quel que soit  $\alpha < \alpha_0$  ,

$$\sup_{B \in \beta_\alpha} \mu(B) < \eta .$$

Donc aucun élément de  $\mathcal{C}_{t,\eta}$  n'est contenu dans un élément de  $\beta_{\alpha_0}$  et le lemme I.B. entraîne

$$d_0 = \sup_{C \in \mathcal{C}_{t,\eta}} \text{diam}(C) \leq \frac{tN!}{\alpha_0^{N-1}} .$$

2) Soit  $(O,R) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{+*}$  tel que

$$\mu(B(O,R)) > \mu(\mathbb{R}^N) - \eta .$$

Alors, quel que soit  $C \in \mathcal{C}_{t,\eta}$  ,

$$C \cap B(O,R) \neq \emptyset .$$

Donc  $\mathcal{C}_{t,\eta} \subset \{C \in \mathcal{C}_t / C \subset B_0 = B(O, R + d_0)\} . \blacksquare$

I.E. - Théorème.

Soit  $\mu \in M_D$ .

1) Il existe un hyperplan affine  $H_0$  de  $\mathbb{R}^N$  vérifiant :

$$\mu(H_0) = Q(\mu, 0) .$$

2) Quel que soit  $t > 0$  tel que

$$Q(\mu, 0) < Q(\mu, t) ,$$

il existe  $C_0 \in C_t$  vérifiant :

$$\mu(C_0) = Q(\mu, t) .$$

Démonstration :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  notons  $H_n$  un hyperplan affine vérifiant

$$\mu(H_n) > Q(\mu, 0) - Q(\mu, 0) / 2n .$$

Soit  $(0, R_0) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{+*}$  tel que

$$\mu(B(0, R_0)) > \mu(\mathbb{R}^N) - Q(\mu, 0) / 2 .$$

Alors, quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_n = H_n \cap B(0, R_0)$  est de dimension  $N-1$  et contenu dans le compact  $B(0, R_0)$ . Soit  $(A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  une sous-suite convergente de  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  pour  $d_H$ ,  $A_0$  sa limite et  $H_0$  un hyperplan affine contenant  $A_0$ .

Soit  $\epsilon \in ]0, Q(\mu, 0) / 2[$  et  $R > R_0$  tel que

$$\mu(B(0, R)) > \mu(\mathbb{R}^N) - \epsilon$$

La suite  $(A_{n_k}^R)_{k \in \mathbb{N}^*}$ , obtenue en posant  $A_{n_k}^R = H_{n_k} \cap B(0, R)$ , admet une valeur d'adhérence, pour  $d_H$ ,  $A_0^R$  qui engendre également  $H_0$ .  
Donc

$$\begin{aligned} \mu(H_0) \geq \mu(A_0^R) &= \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu((A_0^R)^{2d_i}) \geq \overline{\lim}_{i \rightarrow +\infty} \mu(A_{n_{k_i}}^R) \\ &\geq \lim_{i \rightarrow +\infty} \left( Q(\mu, 0) - \frac{Q(\mu, 0)}{2n_{k_i}} - \varepsilon \right) = Q(\mu, 0) - \varepsilon \end{aligned}$$

où  $(A_{n_{k_i}}^R)_{i \in \mathbb{N}^*}$  est une sous-suite de  $(A_{n_k}^R)_{k \in \mathbb{N}^*}$  qui converge vers  $A_0^R$ , telle que la suite  $(d_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ , obtenue en posant  $d_i = d_H(A_{n_{k_i}}^R, A_0^R)$ , soit décroissante.

$\varepsilon$  étant arbitraire, on obtient

$$\mu(H_0) \geq Q(\mu, 0).$$

Ce qui permet de conclure car,  $H_0$  étant réunion dénombrable d'éléments de  $C_0$ ,

$$\mu(H_0) \leq Q(\mu, 0).$$

2) Soit  $t > 0$  vérifiant  $Q(\mu, 0) < Q(\mu, t)$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $C_n$  un élément de  $C_t$  tel que

$$Q(\mu, t) \geq \mu(C_n) > Q(\mu, t) - (Q(\mu, t) - Q(\mu, 0)) / 2n. \quad (1)$$

D'après le théorème I.D., la suite  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est contenue dans un compact de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $C_0$  la limite, pour  $d_H$ , d'une sous-suite convergente  $(C_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  de  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que la suite  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ , obtenue en posant  $d_k = d_H(C_{n_k}, C_0)$ , soit décroissante. Alors, d'après (1),

$$\mu(C_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(C_0^{2d_k}) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(C_{n_k}) \geq Q(\mu, t).$$

Finalement  $\mu(C_0) = Q(\mu, t)$  car, d'après I.A.,  $C_0 \in C_t$ .

I.F. - Remarque.

Seul le cas  $Q(\mu, 0) = Q(\mu, t)$  pose problème.

Si  $\mu$  est à support compact  $S$ , étant donné  $H_0$  vérifiant  $\mu(H_0) = Q(\mu, 0)$ , il existe un dilaté  $C_0$  de l'enveloppe convexe fermée de  $H_0 \cap S$  qui appartient à  $C_t$  et  $\mu(C_0) = Q(\mu, 0) = Q(\mu, t)$ .

Dans le cas contraire, le contre-exemple suivant montre que  $Q(\mu, t)$  peut n'être atteint sur aucun élément de  $C_t$ .

Soit  $0 \in \mathbb{R}^N$  et  $H$  un hyperplan affine contenant  $0$ . Soit  $\mu$  obtenue en plaçant, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la masse  $1/2^n$  sur  $(B(0, n) - B(0, n-1)) \cap H$ . Alors, par exemple,

$$1 = Q(\mu, 0) = Q(\mu, 1)$$

et aucun élément de  $C_1$  n'est de  $\mu$ -mesure 1. ■

Pour conclure ce paragraphe, nous allons montrer que le théorème I.D. peut être étendu à un voisinage de  $\mu$  pour la topologie de la convergence faible ;  $\rho_p$  désigne la distance de Prokhorov sur  $M_b$ .

I.G. - Proposition.

Soit  $(\mu_0, \tau_0, \eta) \in M_b \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$  vérifiant

$$Q(\mu, 0) < \eta \leq Q(\mu_0, \tau_0) .$$

Alors il existe  $\delta_0 > 0$  tel que, si  $\delta \leq \delta_0$ ,

$$\sup_{C \in \mathcal{C}_{\tau_0, \eta}^{\delta, \mu_0}} \text{diam}(C) < +\infty$$

$$\text{où } \mathcal{C}_{\tau_0, \eta}^{\delta, \mu_0} = \{ C \in \mathcal{C}_{\tau_0} / \sup_{\mu \in M_b} \mu(C) \geq \eta \text{ et } \rho_p(\mu, \mu_0) \leq \delta \} .$$

Démonstration :

Pour tout  $d \in \mathbb{R}^{+*}$ , on pose

$$\mathcal{C}_{\tau_0}^d = \{ C \in \mathcal{C}_{\tau_0} / \text{diam}(C) \geq d \}$$

$$\text{et } \alpha(d) = \sqrt[N-1]{\frac{\tau N!}{d}} .$$

Alors, quel que soit  $(\delta, d) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ , d'après le lemme I.B.,

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\mu \in M_b \\ \rho_p(\mu, \mu_0) \leq \delta}} \sup_{C \in \mathcal{C}_{\tau_0}^d} \mu(C) &\leq \sup_{\substack{\mu \in M_b \\ \rho_p(\mu, \mu_0) \leq \delta}} \sup_{B \in \beta_{\alpha(d)}} \mu(B) \\ &\leq \sup_{B \in \beta_{\alpha(d)+2\delta}} \mu_0(B) . \end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition I.C., il existe  $\delta_0$  assez petit et  $d_0$  assez grand tels que, si  $\delta \leq \delta_0$

$$\sup_{\substack{\mu \in M_b \\ \rho_p(\mu, \mu_0) \leq \delta}} \sup_{\substack{C \in C_{t_0}^{d_0}}} \mu(C) < \eta .$$

Donc  $C_{t_0}^{d_0} \subset (C_{t_0, \eta}^{\delta, \mu_0})^c$  dès que  $\delta \leq \delta_0$ . ■

Nous avons vu que toutes les applications  $Q(\mu, \cdot)$  sont monotones croissantes. L'existence d'une limite à gauche en tout point  $t_0 > 0$  est donc assurée.

I.H. - Proposition.

Soit  $(\mu_0, t_0) \in M_b \times \mathbb{R}^{+*}$  vérifiant

$$\lim_{t \rightarrow t_0} Q(\mu_0, t) > Q(\mu_0, 0) . \quad (0)$$

Alors il existe  $\delta_0 > 0$  tel que, si  $\delta \leq \delta_0$ ,

$$\inf_{\substack{\mu \in M_b \\ \rho_p(\mu, \mu_0) \leq \delta}} Q(\mu, t_0) > Q(\mu_0, 0) .$$

Démonstration :

L'hypothèse (0) et le théorème I.E. entraînent l'existence de  $x_0 \in ]0, t_0[$  et de  $C_0 \in C_{t_0 - x_0}$  vérifiant

$$\mu_0(C_0) = Q(\mu_0, t_0 - x_0) > Q(\mu_0, 0) + x_0 . \quad (1)$$



L'application qui à  $y \in \mathbb{R}^+$  associe  $\lambda((C_0)^y)$  étant continue, il existe  $y_0 > 0$  tel que

$$\lambda((C_0)^{y_0}) = \tau_0 . \quad (2)$$

Soit

$$\delta = \frac{1}{2} \text{Min}(x_0, y_0) . \quad (3)$$

Alors, grâce à (1) et (3), pour tout  $\mu$  tel que  $\rho_p(\mu, \mu_0) \leq \delta$ ,

$$Q(\mu_0, 0) \leq Q(\mu_0, 0) + x_0 - 2\delta < \mu_0(C_0) - 2\delta \leq \mu((C_0)^{2\delta}) . \quad (4)$$

Or, grâce à (2) et (3),  $(C_0)^{2\delta}$  est inclus dans un élément de  $C_{\tau_0}$ . Ce qui, compte tenu de (4), entraîne

$$\inf_{\substack{\mu \in M_b \\ \rho_p(\mu, \mu_0) \leq \delta}} Q(\mu, \tau_0) \geq \inf_{\substack{\mu \in M_b \\ \rho_p(\mu, \mu_0) \leq \delta}} \mu((C_0)^{2\delta}) > Q(\mu_0, 0) . \blacksquare$$

I.I. - Proposition.

Sous les hypothèses de I.H., il existe  $(0, R, \delta) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$  tel que

$$C_{\tau_0, \eta}^{\delta, \mu_0} \subset \{C \in C_{\tau_0} / C \subset B(0, R)\}$$

où  $\eta$  vérifie :

$$\inf_{\substack{\mu \in M_b \\ \rho_p(\mu, \mu_0) \leq \delta}} Q(\mu, \tau_0) > \eta > Q(\mu_0, 0) . \quad (1)$$

N.B. - Grâce à (1), cette proposition entraîne, pour tout  $\mu \in M_b$  tel que  $\rho_p(\mu, \mu_0) \leq \delta$ ,

$$\sup_{\substack{C \in C_{t_0} \\ C \not\subset B(0, R)}} \mu(C) < Q(\mu, t_0) = \sup_{\substack{C \in C_{t_0} \\ C \subset B(0, R)}} \mu(C) .$$

Démonstration :

D'après la proposition I.H., il existe  $(\delta_0, \eta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$

tel que

$$\inf_{\mu \in M_b} Q(\mu, t_0) > \eta > Q(\mu_0, 0) . \quad (2)$$

$$\rho_p(\mu, \mu_0) \leq \delta_0$$

Soit  $(0, R_1) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{+*}$  tel que

$$\mu_0(B(0, R_1)) > \mu_0(\mathbb{R}^N) - \frac{\eta}{4} . \quad (3)$$

Soit  $\delta_1 > 0$  tel que, d'après la proposition I.G.,

$$d_0 = \sup_{\substack{C \in C_{t_0, \eta} \\ \delta_1, \mu_0}} \text{diam}(C) < +\infty \quad (4)$$

Enfin soit  $\delta = \text{Min}(\delta_0, \delta_1, \frac{\eta}{4})$ . Alors, grâce à (3), quel que soit  $\mu$  vérifiant  $\rho_p(\mu, \mu_0) \leq \delta$ ,

$$\mu(B(0, R_1 + \frac{\eta}{4})) > \mu(\mathbb{R}^N) - \frac{3\eta}{4} .$$

Ce qui, compte tenu de (2) et (4), entraîne

$$C_{t_0, \eta}^{\delta, \mu_0} \subset \{C \in C_{t_0} / C \subset B(0, R_1 + \frac{\eta}{4} + d_0)\} .$$

Et il suffit, pour conclure, de remarquer que (2) implique (1) et de poser

$$R = R_1 + \frac{\eta}{4} + d_0 .$$

## II - CONTINUITÉ.-

Ce paragraphe est consacré à la résolution de quelques problèmes de continuité soulevés par la définition de la fonction de concentration.

Deux résultats importants y seront démontrés : la continuité à droite de la fonction de concentration de toute mesure bornée et l'équivalence entre la continuité de  $Q$  en un point, en tant que fonction de deux variables, et sa continuité, en ce même point, par rapport à une de ses variables.

$\mathbb{R}^+$  est muni de sa topologie usuelle,  $M_b$  de la topologie de la convergence faible et  $M_b \times \mathbb{R}^+$  de la topologie produit.

### II.A. - Théorème.-

Soit  $\mu \in M_b$ .  $Q(\mu, \cdot)$  est continue à droite.

#### Démonstration :

1) Quel que soit  $t > 0$ , tout élément de  $C_t$  est contenu dans un élément de  $\beta_{\alpha(t)}$  où  $\alpha(t) = \text{Max}(2\sqrt{t}, N^{-1}\sqrt{t N!})$ . En effet, étant donné  $t > 0$ ,  $C \in C_t$  et  $d = \text{diam}(C)$ , si  $d > \sqrt{t}$ , d'après le lemme I.B.,  $C$  est contenu dans une bande de largeur  $N^{-1}\sqrt{t N!}$  et, si  $d \leq \sqrt{t}$ ,  $C$  est contenu dans une boule de rayon  $\sqrt{t}$ , donc dans une bande de largeur  $2\sqrt{t}$ .

Donc, quel que soit  $t > 0$ ,

$$Q(\mu, 0) \leq Q(\mu, t) \leq \sup_{B \in \beta_{\alpha(t)}} \mu(B) .$$

Ce qui, avec la proposition I.C., entraîne la continuité de  $Q(\mu, \cdot)$  en 0.

2) Soit  $t_0 > 0$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite décroissante de réels positifs convergeant vers  $t_0$ .

a) S'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $Q(\mu, 0) = Q(\mu, t_{n_0})$ , alors, quel que soit  $n \geq n_0$ , du fait de la non-décroissance de  $Q(\mu, \cdot)$ ,

$$Q(\mu, 0) = Q(\mu, t_0) = Q(\mu, t_n).$$

b) Dans le cas contraire, notons  $a \geq Q(\mu, t_0) \geq Q(\mu, 0)$  la limite de la suite décroissante et minorée  $(Q(\mu, t_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

$\alpha$ ) Si  $a = Q(\mu, 0)$ , alors  $a = Q(\mu, t_0)$ .

$\beta$ ) Si  $a > Q(\mu, 0)$ , nous pouvons grâce au théorème I.E. construire une suite  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifiant : quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$(1) \quad C_n \in C_{t_n},$$

$$(2) \quad \mu(C_n) = Q(\mu, t_n),$$

(3) et  $C_n$  est contenu dans un élément  $C'_n$  de  $C_{t_1}$  tel que  $\mu(C'_n) \geq a > Q(\mu, 0)$ .

D'après (3) et le théorème I.D., tous les termes de  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont contenus dans un même compact de  $\mathbb{R}^N$ .

Soit  $C_0$  la limite d'une sous-suite  $(C_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  de  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , au sens de  $d_H$ , telle que la suite  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ , obtenue en posant  $d_k = d_H(C_0, C_{n_k})$ , soit décroissante. Alors, d'après (2),

$$\mu(C_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(C_0^{2d_k}) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(C_{n_k}) = a .$$

Ce qui entraîne  $a = Q(\mu, t_0)$  puisque  $a \geq Q(\mu, t_0)$  et, d'après (1) et le lemme I.A.,  $C_0 \subset C_{t_0}$  . ■

La proposition suivante nous donne une majoration du "module de continuité" de la fonction de concentration d'une mesure quelconque. Pour tout  $\alpha > 0$  et tout borélien  $B$  , on pose

$$B^{-\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^N / d(x, B^c) \geq \alpha\} .$$

II.B. - Proposition. -

Soit  $\mu \in M_b$  ,  $t \geq 0$  et  $\delta > 0$  . Alors

$$0 \leq Q(\mu, t+\delta) - Q(\mu, t) \leq \sup_{C \in C_{t+\delta}} \mu(\partial_{N\sqrt{\delta}} C) .$$

Démonstration :

Soit  $C_0 \in C_{t+\delta}$  et  $\alpha > 0$  tel que le convexe fermé  $C_0^{-\alpha}$  soit de volume  $t$ . Soit  $x \in \partial C_0^{-\alpha}$  ; un hyperplan affine d'appui de  $C_0^{-\alpha}$  passe par  $x$  . Donc

$$\lambda((C_0^{-\alpha})^c \cap B(x, N\sqrt{\delta})) \geq \frac{1}{2} \lambda(B(x, N\sqrt{\delta})) \geq \delta .$$

D'où 
$$\lambda((C_0^{-\alpha})^{N\sqrt{\delta}} - C_0^{-\alpha}) \geq \delta .$$

Ce qui prouve que  $\alpha \leq N\sqrt{\delta}$  car, puisque  $(C_0^{-\alpha})^\alpha \subset C_0$  ,

$$\lambda((C_0^{-\alpha})^\alpha - C_0^{-\alpha}) \leq \delta .$$

Finalemnt :

$$\begin{aligned}
 Q(\mu, t+\delta) - Q(\mu, t) &= \sup_{C \in \mathcal{C}_{t+\delta}} (\mu(C) - Q(\mu, t)) \leq \sup_{C \in \mathcal{C}_{t+\delta}} (\mu(C) - \mu(C^{-\frac{N}{\sqrt{\delta}}})) \\
 &\leq \sup_{C \in \mathcal{C}_{t+\delta}} \mu(\partial_{\frac{N}{\sqrt{\delta}}} C) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Si  $\mu$  est absolument continue par rapport à  $\lambda$ , ou plus généralement si  $\mu$  ne charge pas les frontières des parties convexes de  $\mathbb{R}^N$ ,  $Q(\mu, \cdot)$  est donc continue (et même uniformément continue puisqu'elle est monotone et bornée). En effet [2] p. 1-16 indique que, dans ce cas

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{C \in \mathcal{C}} \mu(\partial_{\alpha} C) = 0 \quad .$$

La démonstration du deuxième résultat important de ce paragraphe se fait en trois étapes. Les deux premières montrent l'équivalence entre la continuité de  $Q(\mu_0, \cdot)$  en  $t_0$  et celle de  $Q(\cdot, t_0)$  en  $\mu_0$  et la troisième est un lemme qui prouve la continuité de toute fonction de deux variables ayant les propriétés de  $Q$  déjà démontrées.

### II.C. - Proposition.

Soit  $(\mu_0, t_0) \in M_b \times \mathbb{R}^{+*}$  tel que l'application  $Q(\mu_0, \cdot)$  soit continue en  $t_0$ .

Alors  $Q(\cdot, t_0)$  est continue en  $\mu_0$ .

Démonstration :

Soit  $\varepsilon > 0$ .

1) Soit  $x$  un réel vérifiant  $0 < x < \varepsilon/2$ ,  $x \leq t_0$  et

$$Q(\mu_o, t_o - x) \geq Q(\mu_o, t_o) - \epsilon/2 + x .$$

Soit  $C_x \in C_{t_o - x}$  tel que

$$\mu_o(C_x) \geq Q(\mu_o, t_o - x) - \epsilon/2 .$$

Soit  $y > 0$  tel que

$$\lambda(C_x^y) = t_o .$$

Enfin soit  $\delta_1 = \text{Min}(x, y)$ . Alors, si  $\rho_p(\mu, \mu_o) \leq \delta_1$ ,

$$Q(\mu, t_o) \geq \mu(C_x^{\delta_1}) \geq \mu_o(C_x) - \delta_1 \geq Q(\mu_o, t_o - x) - \delta_1 - \epsilon/2 \geq Q(\mu_o, t_o) - \epsilon .$$

2) Soit  $B_o$  une boule fermée de  $\mathbb{R}^N$  vérifiant :

$$\mu_o(\mathbb{R}^N - B_o) \leq \epsilon/6 ,$$

et  $B_1 = B_o^{\epsilon/6}$ .

Soit  $\mu$  vérifiant  $\rho_p(\mu, \mu_o) \leq \epsilon/6$ , alors

$$Q(\mu, t_o) \leq \sup_{C \in C_{t_o}} \mu(C \cap B_1) + \epsilon/2 , \tag{1}$$

car  $\mu(\mathbb{R}^N - B_1) \leq \epsilon/2$  et, quel que soit  $C \in C$ ,

$$\mu(C) \leq \mu(C \cap B_1) + \mu(\mathbb{R}^N - B_1) .$$

D'autre part, soit  $\lambda_o$  la restriction de  $\lambda$  à  $B_1^{\epsilon/6}$  et  $x > 0$  tel que :

$$Q(\mu_o, t_o + x) \leq Q(\mu_o, t_o) + \epsilon/3 . \tag{2}$$

Puisque  $\lambda_0$  est bornée et ne charge pas les frontières des parties convexes de  $\mathbb{R}^N$ , [2] p. 1-16 entraîne l'existence de  $\alpha > 0$  tel que :

$$\sup_{C \in \mathcal{C}_{t_0}} \lambda_0(C^\alpha) \leq t_0 + \alpha .$$

Soit  $\delta_2 = \text{Min}(\epsilon/6, \alpha)$ . Tous les convexes fermés  $(B_1 \cap C)^{\delta_2}$ , où  $C \in \mathcal{C}_{t_0}$ , sont de volume inférieur à  $t_0 + \alpha$ . En effet, si  $C \in \mathcal{C}_{t_0}$

$$\lambda((B_1 \cap C)^{\delta_2}) \leq \lambda(B_1^{\delta_2} \cap C^{\delta_2}) \leq \lambda_0(C^{\delta_2}) .$$

Donc, si  $\rho_p(\mu, \mu_0) \leq \delta_2$ , grâce à (1) et (2),

$$\begin{aligned} Q(\mu, t_0) &\leq \sup_{C \in \mathcal{C}_{t_0}} \mu(C \cap B_1) + \epsilon/2 \\ &\leq \sup_{C \in \mathcal{C}_{t_0}} \mu_0((C \cap B_1)^{\delta_2}) + \epsilon/2 + \delta_2 \\ &\leq Q(\mu_0, t_0 + \alpha) + \epsilon/2 + \delta_2 \\ &\leq Q(\mu_0, t_0) + \epsilon/3 + \epsilon/2 + \delta_2 \leq Q(\mu_0, t_0) + \epsilon . \blacksquare \end{aligned}$$

La proposition II.C. admet la réciproque suivante. La deuxième propriété qui y est énoncée montre de nouveau la continuité de la fonction de concentration de toute mesure bornée ne chargeant pas les frontières des parties convexes de  $\mathbb{R}^N$ .

II.D. - Proposition.

Soit  $(\mu_0, t_0) \in M_b \times \mathbb{R}^{+*}$  tel que l'application  $Q(\mu_0, \cdot)$  soit discontinue en  $t_0$ . Alors



1) L'application  $Q(., t_0)$  est discontinue en  $\mu_0$ .

2) Tout élément  $C_0$  de  $\mathcal{C}_{t_0}$  vérifiant  $\mu_0(C_0) = Q(\mu_0, t_0)$  a sa frontière chargée par  $\mu_0$ .

Démonstration :

1)  $\mu_0$  n'est pas la mesure nulle puisque  $Q(\mu_0, .)$  admet un point de discontinuité.

Soit  $P_0 = \mu_0(.)/\mu_0(\mathbb{R}^N)$  et  $X_0$  une variable aléatoire de loi  $P_0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $P_n$  la loi de  $X_n = \varepsilon_n \times X_0$  où  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en décroissant vers 1. Alors la suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , obtenue en posant  $\mu_n = \mu_0(\mathbb{R}^N) \times P_n$ , converge faiblement vers  $\mu_0$  et

$$Q(\mu_0, t_0) > \lim_{n \rightarrow +\infty} Q(\mu_n, t_0 / \varepsilon_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q(\mu_n, t_0),$$

car  $C \in \mathcal{C}_{t_0}$  équivaut à  $\frac{1}{\varepsilon_n} \times C \in \mathcal{C}_{t_0 / \varepsilon_n}$  et, quel que soit  $C \in \mathcal{C}_{t_0}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mu_n(C) = \mu_0(\mathbb{R}^N) \times \Pr(\varepsilon_n \times X_0 \in C) = \mu_0(\mathbb{R}^N) \times \Pr(X_0 \in \frac{1}{\varepsilon_n} \times C) = \mu_0(\frac{1}{\varepsilon_n} \times C).$$

2)  $Q(\mu_0, .)$  étant continue à droite, croissante et discontinue en  $t_0$ ,  $Q(\mu_0, t_0) > Q(\mu_0, 0)$ ; et, d'après le théorème I.E., il existe  $C_0 \in \mathcal{C}_{t_0}$  vérifiant  $\mu_0(C_0) = Q(\mu_0, t_0)$ .

Puisque  $C_0 = \bigcup_{\alpha < 0} \overset{\circ}{C}_0^\alpha$ ,  $\mu_0(\partial C_0) = 0$  entraîne

$$Q(\mu_0, t_0) = \mu_0(C_0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \mu_0(\overset{\circ}{C}_0^\alpha) \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \mu_0(C_0^\alpha) \leq \lim_{t \rightarrow t_0} Q(\mu_0, t).$$

Ce qui contredit la croissance et la discontinuité en  $t_0$  de  $Q(\mu_0, \cdot)$ . ■

II.E. - Lemme.-

Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $f$  une fonction de  $X \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :

- a) si  $f(x, \cdot)$  est continue en  $t$ ,  $f(\cdot, t)$  est continue en  $x$ .
- b) pour tout  $x \in X$ ,  $f(x, \cdot)$  est croissante.

Alors  $f$  est continue, pour la topologie produit, en tout point  $(x_0, t_0)$  vérifiant :

- c)  $f(x_0, \cdot)$  est continue en  $t_0$ .

Démonstration :

$f(x_0, \cdot)$  étant croissante, il existe deux de ses points de continuité  $t_1$  et  $t_2$  qui vérifient  $t_1 < t_0 < t_2$  et

$$0 \leq f(x_0, t_2) - f(x_0, t_1) \leq \varepsilon/2 .$$

Soit  $\eta \in ]0, t_2 - t_1[$  tel que  $d(x, x_0) \leq \eta$  entraîne

$$|f(x_0, t_i) - f(x, t_i)| \leq \varepsilon/2 \text{ pour } i = 0, i = 1 \text{ et } i = 2 .$$

Soit  $t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$  et  $x$  tel que  $d(x, x_0) \leq \eta$ .

Si  $f(x, t) > f(x_0, t_0)$ , alors

$$0 < f(x, t) - f(x_0, t_0) \leq f(x, t_2) - f(x_0, t_0) \leq |f(x, t_2) - f(x_0, t_2)| +$$

$$|f(x_0, t_2) - f(x_0, t_0)| \leq \varepsilon . \blacksquare$$

La fonction de concentration sur  $\mathbb{R}^N$ ,  $Q$ , vérifie, d'après le premier paragraphe et la proposition II.C. les conditions a) et b) de ce lemme. Nous pouvons donc énoncer, sans autre démonstration, le théorème suivant :

II.F. - Théorème.

Soit  $(\mu_0, t_0) \in M_b \times \mathbb{R}^{+*}$ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $Q(\mu_0, \cdot)$  est continue en  $t_0$ .
- b)  $Q(\cdot, t_0)$  est continue en  $\mu_0$ .
- c)  $Q$  est continue en  $(\mu_0, t_0)$ .

Notons que l'existence d'un élément de  $C_{t_0}$ , réalisant  $Q(\mu_0, t_0)$ , dont la frontière n'est pas chargée par  $\mu_0$  entraîne, grâce à II.D.2.) et II.F., la continuité de  $Q$  en  $(\mu_0, t_0)$  (1).

Le nombre 0 joue un rôle tout à fait particulier. En effet la fonction de concentration de toute mesure bornée est continue en 0 puisqu'elle est continue à droite et pourtant l'application  $Q(\cdot, 0)$  n'est pas continue comme le montre le contre-exemple suivant, où  $\delta_M$  désigne la mesure de Dirac au point  $M$  :

$N = 2$ . Soit  $\mu_0 = \delta_{(0,0)} + \delta_{(1,0)}$  et  
 $\mu_n = \frac{1}{2} \delta_{(0,0)} + \frac{1}{2} \delta_{(0,1/n)} + \delta_{(1,0)}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  
 $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge faiblement vers  $\mu_0$  et  $Q(\mu_0, 0) = 2$  alors que  
 $Q(\mu_n, 0) = 1,5$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . ■

Cependant  $Q(.,0)$  est continue en  $\mu_0$  si  $\mu_0$  ne charge pas les frontières des parties convexes de  $\mathbb{R}^N$ . En effet, si on pose  $\rho = \rho_p(\mu, \mu_0)$  et si on reprend les notations de la démonstration de II.A., quel que soit  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 \leq Q(\mu,0) \leq Q(\mu,t) &\leq \sup_{B \in \beta_\alpha(t)} \mu(B) \leq \sup_{B \in \beta_\alpha(t)} \mu_0(B^{2\beta}) + 2\rho \\ &\leq \sup_{B \in \beta_{\alpha(t)+4\rho}} \mu_0(B) + 2\rho . \end{aligned}$$

Et cette dernière quantité tend vers  $Q(\mu_0,0) = 0$  quand  $t$  et  $\rho$  tendent vers 0, d'après I.C.

Cette dernière propriété entraîne, grâce à (1), la continuité de  $Q$  en tout point  $(\mu_0, t_0)$  de  $M_b \times \mathbb{R}^+$  tel que  $\mu_0$  ne charge pas les frontières des parties convexes de  $\mathbb{R}^N$ .

Enfin, toujours dans le cas où  $\sup_{C \in \mathcal{C}} \mu_0(\partial C) = 0$ , si  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge faiblement vers  $\mu_0$ , la suite de fonctions  $(Q(\mu_n, .))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $Q(\mu_0, .)$  puisque, d'après [2] p. 1-16 ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{C \in \mathcal{C}} |\mu_n(C) - \mu_0(C)| = 0 \quad \blacksquare$$

Le théorème II.A. et la proposition II.C. pourraient laisser croire que, étant donné  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_b$  convergeant faiblement vers  $\mu_0$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  convergeant en décroissant vers  $t_0$ , la suite  $(Q(\mu_n, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $Q(\mu_0, t_0)$ . Le contre-exemple suivant montre que ce serait une erreur.

$N = 2$  . Soit  $\mu_0 = \delta_{(0,1)} + \delta_{(0,-1)} + \delta_{(1,0)}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ,  $\mu_n = \delta_{(0,1)} + \delta_{(0,-1)} + \delta_{(1+1/n,0)}$  . Alors  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $\mu_0$  ,  $(1 + \frac{1}{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en décroissant vers 1 et, pour tout,  $Q(\mu_0, 1) = 3$  alors que, quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ,

$$Q(\mu_n, 1 + 1/2n) = 2 \quad . \blacksquare$$

Cependant nous verrons dans le troisième paragraphe de cet article que, si  $P_0$  est une probabilité , si  $P_n^*$  désigne la loi empirique d'un échantillon de taille  $n$  de loi  $P_0$  et si  $t_n \rightarrow t_0$  , alors

$$\Pr\{\omega / \lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n^*, t_n) = Q(P_0, t_0)\} = 1 .$$

Pour conclure ce paragraphe nous allons donner le pendant pour les applications  $Q(\cdot, t)$  , de la proposition II.B. qui nous permettra, dans la suite de cet article, de préciser la vitesse de convergence des estimateurs qui y seront définis.

Etant donné  $\varepsilon > 0$  ,  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $(\mu_0, \mu_1) \in M_b \times M_b$  , si  $\rho_p(\mu_0, \mu_1) < \varepsilon$  , alors :

$$|Q(\mu_0, t) - Q(\mu_1, t)| \leq \sup_{C \in \mathcal{C}_t} |\mu_0(C) - \mu_1(C)| \leq \sup_{C \in \mathcal{C}_t} \mu_0(\partial_{2\varepsilon} C) + 3\varepsilon$$

En effet, quel que soit  $C \in \mathcal{C}_t$  ,

$$\mu_0(C) - \mu_1(C) \leq \mu_1(C^\varepsilon) + \varepsilon - \mu_0(C^{-\varepsilon}) + \varepsilon \leq \mu_0(C^{2\varepsilon}) - \mu_0(C^{-\varepsilon}) + 3\varepsilon$$

et

$$\mu_1(C) - \mu_0(C) \leq \mu_0(C^\varepsilon) + \varepsilon - \mu_1(C^{-\varepsilon}) + \varepsilon \leq \mu_0(C^\varepsilon) - \mu_0(C^{-2\varepsilon}) + 3\varepsilon ,$$

puisque  $(C^{-\varepsilon})^\varepsilon \subset C$  ,  $(C^{-2\varepsilon})^\varepsilon \subset C^{-\varepsilon}$  et  $(C^\varepsilon)^\varepsilon = C^{2\varepsilon}$  .

III - ESTIMATION.-

Ce paragraphe est consacré à l'estimation de la fonction de concentration d'une probabilité quelconque  $P_0$  sur  $\mathbb{R}^N$  et d'un convexe qui, à  $t$  fixé, réalise  $Q(P_0, t)$  ainsi qu'à l'étude de la vitesse de convergence des estimateurs utilisés.

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires, d'un espace probabilisé  $(\Omega, A, Pr)$  dans  $\mathbb{R}^N$  muni de sa tribu borélienne, indépendantes et de même loi  $P_0$ . La tribu  $A$  est supposée complète. Pour tout  $(n, \omega) \in \mathbb{N}^* \times \Omega$ , on pose

$$P_n^\omega = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \delta_{X_n}(\omega) .$$

Quel que soit  $(n, \omega) \in \mathbb{N}^* \times \Omega$ ,  $P_n^\omega$  est une mesure discrète ayant un nombre fini d'atomes. Une fois déterminés les volumes des enveloppes convexes de toutes les parties de l'ensemble des atomes de  $P_n^\omega$ , le calcul de  $Q(P_n^\omega, \cdot)$  et la mise en évidence d'un convexe réalisant, à  $t$  fixé,  $Q(P_n^\omega, t)$  se ramènent au calcul du maximum d'un nombre fini de réels, même pour les valeurs de  $t$  vérifiant  $Q(P_n^\omega, t) = Q(P_n^\omega, 0)$ .

Les arguments utilisés par P. Roger ([1] p. 46) prouvent que  $Q(P_n^\cdot, t)$  est une v.a.r. pour tout  $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^+$ .

Le théorème suivant montre que  $Q(P_n^\cdot, \cdot)$  est un estimateur convergent de  $Q(P_0, \cdot)$  au sens de la convergence simple. Aucune hypothèse n'est faite sur  $P_0$ ; ce n'est donc pas une simple conséquence des résultats figurant dans le deuxième paragraphe et de la convergence faible presque sûre de  $(P_n)$  vers  $P_0$ .

III.A. - Théorème.-

$$\Pr\{\omega / \forall t \in \mathbb{R}^+ , \lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n^\omega, t) = Q(P_0, t)\} = 1 .$$

Démonstration :

$Q(P_0, \cdot)$  est continue à droite et monotone ; l'ensemble de ses points de discontinuité est donc au plus dénombrable. On le note  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  en y incluant 0 à cause du rôle particulier que joue ce nombre dans les problèmes de continuité.

Le théorème I.E. indique l'existence, pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , d'un convexe fermé  $C_i$  de volume  $t_i$  vérifiant

$$P_0(C_i) = Q(P_0, t_i) .$$

Posons  $\Omega_0 = \{\omega / (P_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge faiblement vers } P_0\}$  et, pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\Omega_i = \{\omega / \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n^\omega(C_i) = P_0(C_i)\} .$$

Alors, grâce en particulier à la loi forte des grands nombres,

$$\Pr\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i\right) = 1 .$$

Soit  $\omega \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$ .

Quel que soit  $t \in \mathbb{R}^+ - \{t_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ , puisque  $\omega \in \Omega_0$ , le théorème II.F. entraîne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n^\omega, t) = Q(P_0, t) .$$

Soit  $t_j \in \{t_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  et  $\epsilon > 0$ . Il existe un point de continuité  $\tau > t_j$  de  $Q(P_o, \cdot)$  qui vérifie :

$$0 \leq Q(P_o, \tau) - Q(P_o, t_j) \leq \epsilon/2 \quad . \quad (1)$$

Soit  $n_o \in \mathbb{N}^*$  tel que, si  $n \geq n_o$ ,

$$|Q(P_n^\omega, \tau) - Q(P_o, \tau)| \leq \epsilon/2 \quad . \quad (2)$$

Puisque  $\omega \in \Omega_j$ , il existe  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  tel que, si  $n \geq n_1$ ,

$$|P_n^\omega(C_j) - P_o(C_j)| \leq \epsilon \quad . \quad (3)$$

Alors, si  $n \geq \text{Max}(n_o, n_1)$ , d'après (1) et (2),

$$Q(P_n^\omega, t_j) - Q(P_o, t_j) \leq Q(P_n^\omega, \tau) - Q(P_o, \tau) + Q(P_o, \tau) - Q(P_o, t_j) \leq \epsilon$$

et d'après (3),

$$Q(P_o, t_j) - Q(P_n^\omega, t_j) = P_o(C_j) - Q(P_n^\omega, t_j) \leq P_o(C_j) - P_n^\omega(C_j) \leq \epsilon \quad . \blacksquare$$

Si l'application  $Q(P_o, \cdot)$  est continue, en particulier si  $P_o$  ne charge pas les frontières des parties convexes de  $\mathbb{R}^N$ , la convergence simple de  $Q(P_n^\omega, \cdot)$  vers  $Q(P_o, \cdot)$  entraîne sa convergence uniforme. Dans ce cas, on obtient donc

$$\text{Pr}\{\omega / \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |Q(P_n^\omega, t) - Q(P_o, t)| = 0\} = 1 \quad .$$

La vitesse de convergence de  $Q(P_n^*, t)$  vers  $Q(P_o, t)$  à  $t$  fixé, et celle de la convergence uniforme de  $Q(P_n^*, \cdot)$  vers  $Q(P_o, \cdot)$  dans le cas où  $Q(P_o, \cdot)$  est continue découleront de la vitesse de



convergence de  $P_n^\bullet(B)$  vers  $P_0(B)$ , où  $B$  est un borélien quelconque de  $\mathbb{R}^N$ , et celle de la convergence de  $P_n^\bullet$  vers  $P_0$  au sens de  $\rho_p$ .

Pour la première, en appliquant l'inégalité de Bernstein-Fréchet ([12]) à la suite  $(1_B(X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre  $P_0(B)$ , on obtient, pour tout  $(n, \varepsilon) \in \mathbb{N}^* \times ]0, 1[$ ,

$$\Pr\{P_n^\bullet(B) \leq P_0(B) - \varepsilon\} \leq e^{-2n\varepsilon^2}$$

$$\text{et } \Pr\{P_0(B) \leq P_n^\bullet(B) - \varepsilon\} \leq e^{-2n\varepsilon^2} \quad (*)$$

J. Geffroy a obtenu la vitesse de convergence de  $P_n^\bullet$  vers  $P_0$ , au sens de  $\rho_p$ , dans le cas où  $P_0$  est la loi d'une mesure aléatoire à valeurs dans l'ensemble des mesures positives et finies à distance finie d'un espace métrique séparable. Mais il n'utilise pas le fait que les réalisations des variables aléatoires sont des mesures.

En voici une démonstration dans le cadre qui nous intéresse. Les notations sont celles de ce paragraphe, mais  $P_0$  désigne une probabilité sur la tribu borélienne  $\mathcal{B}_X$  d'un espace métrique séparable  $X$  quelconque.

III.B. - Lemme (dû à J. Geffroy).

Quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $K \geq 4$  tel que, quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\Pr\{\rho_p(P_n^\bullet, P_0) \geq \varepsilon\} \leq K e^{-2n(\varepsilon/K)^2}.$$

Démonstration :

Soit  $\varepsilon > 0$ .  $X$  étant séparable, il existe une partition  $\mathcal{D}$  de  $X$  à l'aide de boréliens de diamètre inférieur à  $\varepsilon$ .

Soit  $M$  le cardinal d'une partie finie  $\mathcal{D}_0$  de  $\mathcal{D}$  vérifiant

$$P_0\left(\bigcup_{\Delta \in \mathcal{D}_0} \Delta\right) \geq 1 - \varepsilon/4 \quad . \quad (1)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et

$$E_n = \bigcap_{\Delta \in \mathcal{D}_0} \{P_n^*(\Delta) \leq P_0(\Delta) - \varepsilon/2M\} \quad ,$$

$$E'_n = \bigcap_{\Delta \in \mathcal{D}_0} \{P_0(\Delta) \geq P_n^*(\Delta) - \varepsilon/2M\} \quad ,$$

et 
$$E''_n = \{P_n^*\left(\bigcup_{\Delta \in \mathcal{D} - \mathcal{D}_0} \Delta\right) \leq \varepsilon/2\} \quad .$$

Soit  $\omega \in E_n \cap E'_n \cap E''_n$ . Alors  $\rho_p(P_n^\omega, P_0) \leq \varepsilon$ . En effet, étant donné  $A \in \mathcal{B}_X$  et  $\mathcal{D}_A = \{\Delta \in \mathcal{D} / \Delta \cap A \neq \emptyset\}$ ,

$$A \subset \bigcup_{\Delta \in \mathcal{D}_A} \Delta \subset A^\varepsilon \quad .$$

D'où, d'après (1) et puisque  $\omega \in E_n$  et  $M = \text{Card } \mathcal{D}_0$ ,

$$\begin{aligned} P_0(A) &\leq P_0\left(\bigcup_{\Delta \in \mathcal{D}_A} \Delta\right) \leq P_0\left(\bigcup_{\Delta \in \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_0} \Delta\right) + \varepsilon/4 \leq \sum_{\Delta \in \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_0} (P_n^\omega(\Delta) + \varepsilon/2M) + \varepsilon/4 \\ &\leq P_n^\omega(A^\varepsilon) + 3\varepsilon/4 \end{aligned}$$

et, puisque  $\omega \in E'_n \cap E''_n$ ,

$$\begin{aligned} P_n^\omega(A) &\leq P_n^\omega\left(\bigcup_{\Delta \in \mathcal{D}_A} \Delta\right) \leq P_n^\omega\left(\bigcup_{\Delta \in \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_0} \Delta\right) + \varepsilon/2 \leq \sum_{\Delta \in \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_0} (P_0(\Delta) + \varepsilon/2M) + \varepsilon/2 \\ &\leq P_0(A^\varepsilon) + \varepsilon \quad . \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure en posant  $K = 2(M+1)$  car , d'après  
(\*) ,

$$\begin{aligned} 1 - \Pr(E_n \cap E'_n \cap E''_n) &\leq M \exp\left(-\frac{n\epsilon^2}{2M^2}\right) + M \exp\left(-\frac{n\epsilon^2}{2M^2}\right) + \exp\left(-\frac{n\epsilon^2}{8}\right) \\ &\leq 2M \exp\left(-\frac{n\epsilon^2}{2(M+1)^2}\right) + \exp\left(-\frac{n\epsilon^2}{2(M+1)^2}\right) \\ &\leq 2(M+1) \exp\left(-2n \frac{\epsilon^2}{(2(M+1))^2}\right) . \quad (2) \end{aligned}$$

### III.C. - Proposition.-

Quel que soit  $(n, t) \in ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$  , il existe deux réels positifs  $K$  et  $K'$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ,

$$\Pr\{|Q(P_n^*, t) - Q(P_0, t)| \geq \eta\} \leq K e^{-nK'}$$

#### Démonstration :

Soit  $(n, t) \in ]0, 1[ \times \mathbb{R}^+$  .

Si  $t$  est un point de continuité de  $Q(P_0, \cdot)$  , alors le théorème II.F. indique que  $P_0$  est un point de continuité de  $Q(\cdot, t)$  . Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme III.B. en posant  $K' = 2(\epsilon/K)^2$  .

Sinon considérons  $\tau > t$  , point de continuité de  $Q(P_0, \cdot)$  , vérifiant

$$0 \leq Q(P_0, \tau) - Q(P_0, t) \leq \eta/2$$

et  $C_0 \in C_L$  tel que

$$P_0(C_0) = Q(P_0, t) .$$

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ,

$$\{|Q(P_n^*, t) - Q(P_0, t)| \geq \eta\} \subset \{Q(P_n^*, t) \geq Q(P_0, t) + \eta\} \cup \{Q(P_n^*, t) \leq Q(P_0, t) - \eta\}$$

$$\subset \{Q(P_n^*, \tau) \geq Q(P_0, \tau) + \eta/2\} \cup \{\dot{P}_n(C_0) \leq P_0(C_0) - \eta\}.$$

Donc, grâce à (\*), au théorème II.F. et au lemme III.B., il existe deux réels positifs  $K_1$  et  $K'_1$  tels que

$$\Pr\{|Q(P_n^*, t) - Q(P_0, t)| \geq \eta\} \leq K_1 e^{-nK'_1} + e^{-2n\eta^2}.$$

Ce qui permet de conclure en posant  $K = K_1 + 1$  et  $K' = \text{Min}(K'_1, 2\eta^2)$ . ■

Dans le cas où  $Q(P_0, \cdot)$  est continue on obtient même  $\Pr\{\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |Q(P_n^*, t) - Q(P_0, t)| \geq \eta\} \leq K e^{-nK'}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , car on a vu que dans ce cas, si  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge faiblement vers  $P_0$ ,  $(Q(\pi_n, \cdot))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $Q(P_0, \cdot)$ .

La dernière propriété énoncée dans le deuxième paragraphe et l'inégalité (2) de la démonstration du lemme III.B. montrent que pour préciser les nombres  $K$  et  $K'$  il suffirait de connaître les nombres  $\sup_{C \in \mathcal{C}_t} P_0(\partial_{2\varepsilon} C)$ , pour  $\varepsilon > 0$ , et un borélien rassemblant la masse de  $P_0$  à  $\varepsilon$  près. Nous verrons dans le quatrième paragraphe de cet article qu'il est possible d'estimer un tel borélien de volume minimal.

Il a été annoncé, dans la conclusion du deuxième paragraphe, que l'ensemble des  $\omega$  tels que, pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  et toute suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de réels positifs convergeant vers  $t_0$  par valeurs supérieures,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n^\omega, t_n) = Q(P_o, t_o) \quad ;$$

est de probabilité 1. Cela vient du fait que cet ensemble contient

$\Omega'_o = \{(Q(P_n^\omega, \cdot))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge simplement vers } Q(P_o, \cdot)\}$ . En effet soit  $\omega \in \Omega'_o$ ,  $t_o \in \mathbb{R}^+$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergeant vers  $t_o$  par valeurs supérieures.  $Q(P_o, \cdot)$  étant continue à droite et croissante, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n^\omega, t_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n^\omega, t_o + \eta) = Q(P_o, t_o + \eta) \leq Q(P_o, t_o) + \varepsilon .$$

Donc 
$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n^\omega, t_n) \leq Q(P_o, t_o) \quad .$$

Ce qui permet de conclure puisque

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n^\omega, t_n) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n^\omega, t_o) = Q(P_o, t_o) \quad . \quad \blacksquare$$

Cependant cette propriété n'est plus vraie si la suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $t_o$  par valeurs inférieures, comme le prouve le contre-exemple suivant :

$$N = 2 \quad . \quad \text{Soit } P_o = \frac{1}{3} \delta_{(o,o)} + \frac{1}{3} \delta_{(1,o)} + \frac{1}{3} \delta_{(o,1)} \quad \text{et } t_o = 1/2 .$$

Alors si  $\omega$  est tel que  $(Q(P_n^\omega, \cdot))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers  $Q(P_o, \cdot)$ , et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que  $t_n \uparrow t_o$  et  $t_n \neq t_o$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n^\omega, t_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} ( \lim_{m \rightarrow +\infty} Q(P_n^\omega, t_m) )$$

du fait de la croissance des fonctions de concentration.

Mais  $Q(P_o, 1/2) = 1$  et, puisque les fonctions de concentration sont continues à droite et monotones,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ( \lim_{m \rightarrow +\infty} Q(P_n^\omega, t_m) ) = \lim_{t \rightarrow t_o} Q(P_o, t) = 2/3 .$$

L'estimation d'un élément de  $C_t$  réalisant  $Q(P_o, t)$  découle du théorème, plus général, III.E. qui se démontre à l'aide du petit lemme suivant.

III.D. - Lemme.

Soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F_b$  et  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_b$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_H(F_n, F_o) = 0$$

et 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_p(\mu_n, \mu_o) = 0 .$$

Alors 
$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(F_n) \leq \mu_o(F_o) .$$

Démonstration :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons

$$d_n = d_H(F_n, F_o)$$

et 
$$\rho_n = \rho_p(\mu_n, \mu_o) .$$

Alors, quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mu_n(F_n) \leq \mu_n(F_o^{2d_n}) \leq \mu_o(F_o^{2d_n + 2\rho_n}) + 2 \rho_n .$$

Ce qui permet de conclure puisque

$$F_o = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_o^{2d_n + 2\rho_n} . \blacksquare$$

On suppose, dans ce qui suit, que  $P_o$  n'est pas portée par un hyperplan affine, c'est-à-dire  $Q(P_o, \cdot) \neq 1$ . Le cas  $Q(P_o, t) = Q(P_o, 0)$  sera étudié à la fin de ce paragraphe. Quel que soit  $t \in \mathbb{R}^+$  vérifiant

$Q(P_o, t) > Q(P_o, 0)$  , on pose

$$\Gamma_t = \{C \in C_t / P_o(C) = Q(P_o, t)\}$$

et, pour tout  $(n, \omega) \in \mathbb{N}^* \times \Omega$  ,

$$\Gamma_{n, \omega, t} = \{C \in C_t / P_n^\omega(C) = Q(P_n^\omega, t)\} .$$

Tous ces ensembles sont non vides ; même si  $Q(P_n^\omega, t) = Q(P_n^\omega, 0)$  car, dans ce cas,  $P_n^\omega$  étant à support compact  $K$  , si on note  $H$  un hyperplan affine vérifiant  $P_n^\omega(H) = Q(P_n^\omega, 0)$  , il existe un dilaté de l'enveloppe convexe de  $K \cap H$  qui appartient à  $C_t$  .

Pour tout  $\epsilon > 0$  ,  $\Gamma_t^\epsilon$  désigne le dilaté d'ordre  $\epsilon$  de  $\Gamma_t$  dans l'ensemble des fermés bornés de  $\mathbb{R}^N$  muni de la distance de Hausdorff  $d_H$  ; c'est-à-dire  $\Gamma_t^\epsilon = \{C \in F_b / d_H(C, \Gamma_t) < \epsilon\}$ .

### III.E. - Théorème.-

L'ensemble des  $\omega$  vérifiant la propriété suivante est de probabilité 1.

Quel que soit  $t \in \mathbb{R}^+$  vérifiant  $Q(P_o, t) > Q(P_o, 0)$  et  
 Quel que soit  $\epsilon > 0$  , il existe  $n_o \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $n \geq n_o$  ,

$$\Gamma_{n, \omega, t} \subset \Gamma_t^\epsilon .$$

Démonstration :

Posons de nouveau

$$\Omega_0 = \{ \omega / (P_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge faiblement vers } P_0 \}$$

$$\text{et } \Omega'_0 = \{ \omega / (Q(P_n^\omega, .))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge simplement vers } Q(P_0, .) \} .$$

Alors  $\Pr(\Omega_0 \cap \Omega'_0) = 1$  .

$$\text{Soit } \omega \in \Omega_0 \cap \Omega'_0 .$$

$$\text{Soit } t_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } Q(P_0, t_0) > Q(P_0, 0) \text{ et } \varepsilon > 0 .$$

Un petit raisonnement par contraposée montre qu'il s'agit de prouver que toute suite  $(C_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*}$  obtenue en prenant, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , un élément quelconque de  $\Gamma_{n, \omega, t_0}$  est relativement compacte, pour  $d_H$ , et admet comme valeurs d'adhérence des éléments de  $\Gamma_{t_0}$  .

Soit  $(C_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une telle suite et  $a = Q(P_0, t_0) - Q(P_0, 0) > 0$ .  $(C_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est relativement compacte car tous ses termes sont inclus dans une même boule de  $\mathbb{R}^N$ . En effet, puisque  $\omega \in \Omega'_0$ , il existe  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  tel que, si  $n \geq n_1$ ,

$$P_n^\omega(C_n^\omega) = Q(P_n^\omega, t_0) > Q(P_0, t_0) - \frac{a}{4} = \eta > Q(P_0, 0) \quad . \quad (1)$$

Donc, si  $\lim_{t \rightarrow t_0} Q(P_0, t) > Q(P_0, 0)$ , il suffit d'appliquer la proposition I.I. car  $\omega \in \Omega_0$ . Et, dans le cas contraire, étant donné une boule  $B(0, R)$  vérifiant  $P_0(\partial B(0, R)) = 0$  et

$$P_0(B(0, R)) > 1 - (Q(P_0, 0) + \frac{a}{4}) ,$$

il existe  $n_2 \in \mathbb{N}^*$  tel que, si  $n \geq n_2$ ,

$$P_n^\omega(B(0, R)) > 1 - (Q(P_0, 0) + \frac{a}{2}) ; \quad (2)$$



et la proposition I.C. indique l'existence de  $\delta_0$  tel que

$$d = \sup_{C \in \mathcal{C}_{t_0, n}^{\delta_0, P_0}} \text{diam}(C) < +\infty ;$$

soit  $n_3$  tel que, si  $n \geq n_3$ ,  $\rho_p(P_n^\omega, P_0) < \delta_0$ ; alors, grâce à (1) et (2) si  $n \geq \text{Max}(n_1, n_2, n_3)$ ,

$$C_n^\omega \subset B(0, R+d) .$$

Soit  $C_0$  la limite d'une sous-suite convergente  $(C_{n_k}^\omega)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de  $(C_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Le lemme I.A. montre que  $C_0 \in \mathcal{C}_{t_0}$ . Ce qui permet de conclure car, d'après le lemme III.D. ,

$$Q(P_0, t_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n^\omega, t_0) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} Q(P_{n_k}^\omega, t_0) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} P_{n_k}^\omega(C_{n_k}^\omega) \leq P_0(C_0) .$$

Cette démonstration n'utilise que la convergence faible de  $(P_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers  $P_0$  et la convergence de  $Q(P_n^\omega, t_0)$  vers  $Q(P_0, t_0)$ . Il en résulte que, étant donné  $(\mu_0, t_0) \in M_b \times \mathbb{R}^+$  tel que  $Q(\mu_0, \cdot)$  soit continue en  $t_0$  et  $Q(\mu_0, t_0) > Q(\mu_0, 0)$  et  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergeant faiblement vers  $\mu_0$ , quel que soit  $\varepsilon > 0$  il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que, si  $n \geq n_0$ ,

$$\Gamma_{n, t_0} \subset \Gamma_{t_0}^\varepsilon ,$$

où  $\Gamma_{t_0} = \{C \in \mathcal{C}_{t_0} / \mu_0(C) = Q(\mu_0, t_0)\}$

et  $\Gamma_{n, t_0} = \{C \in \mathcal{C}_{t_0} / \mu_n(C) = Q(\mu_n, t_0)\}$  .

Le théorème précédent montre également que, si  $\Gamma_{t_0}$  est un singleton  $\{C_0\}$ , toute suite  $(C_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est un estimateur convergent de  $C_0$  au sens de  $d_H$ .

La vitesse de convergence de cet estimateur découle de la proposition plus générale III.G. qui se démontre à l'aide du lemme suivant.

Soit  $t_0 \in \mathbb{R}^{+*}$  vérifiant  $Q(P_0, t_0) > Q(P_0, 0)$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$  et toute probabilité  $P$  sur  $\mathbb{R}^N$ , on pose :

$$Q_\varepsilon(P, t_0) = \sup_{\substack{C \in C_{t_0} \\ C \notin \Gamma_{t_0}^c}} P(C) .$$

III.F. - Lemme.-

Soit  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de probabilités convergeant faiblement vers  $P_0$  et  $\varepsilon > 0$ . Alors

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} Q_\varepsilon(\pi_n, t_0) \leq Q_\varepsilon(P_0, t_0) .$$

Démonstration :

D'après le théorème I.E., il existe un hyperplan affine  $H_0$  vérifiant

$$P_0(H_0) = Q(P_0, 0) .$$

Soit  $O \in H_0$ . Alors

$$Q(P_o, 0) = P_o(H_o) = \lim_{R \rightarrow +\infty} P_o(H_o \cap B(0, R)) \quad (1)$$

Pour tout  $R > 0$ , il existe un dilaté fermé de  $H_o \cap B(0, R)$ , noté  $C_R$ , qui appartient à  $C_{t_o}$ .

Le théorème I.D. entraîne

$$\sup_{C \in \Gamma_{t_o}} \text{diam}(C) < +\infty.$$

$$\text{Donc } d_1 = \sup_{C \in \Gamma_{t_o}^E} \text{diam}(C) < +\infty.$$

Finalement, si  $R > d_1/2$ ,  $C_R \notin \Gamma_{t_o}^E$  et, d'après (1),

$$Q_\varepsilon(P_o, t_o) \geq Q(P_o, 0).$$

Supposons que

$$a = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} Q_\varepsilon(\Pi_n, t_o) > Q_\varepsilon(P_o, t_o) \geq Q(P_o, 0) = b \quad (2)$$

Soit  $(\Pi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  une sous-suite de  $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que, quel que soit  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$Q_\varepsilon(\Pi_{n_k}, t_o) > a - \frac{a-b}{2k}.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , notons  $C_k$  un élément de  $C_{t_o} \cap (\Gamma_{t_o}^E)^c$  vérifiant

$$\Pi_{n_k}(C_k) > a - \frac{a-b}{2k} \quad (3)$$

Les arguments utilisés dans la démonstration du théorème III.E. montrent que la suite  $(C_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est  $d_H$ -relativement compacte. Soit  $C_0$  la limite d'une sous-suite convergente  $(C_{k_i})_{i \in \mathbb{N}^*}$  de  $(C_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ; alors, d'après le lemme I.A.,  $C_0 \in C_{t_0}$  et, d'après (3),  $C_0 \notin \Gamma_{t_0}^\varepsilon$ .

Donc le lemme III.D. entraîne

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow +\infty} \Pi_{n, k_i}(C_{k_i}) \leq P_0(C_0) \leq Q_\varepsilon(P_0, t_0).$$

Ce qui contredit (2). ■

III.G. - Proposition.

Quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $(K, K') \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $B_n \in \mathcal{A}$  vérifiant

$$B_n \subset \{ \omega / \Gamma_{n, \omega, t_0} \subset \Gamma_{t_0}^\varepsilon \}$$

et  $\Pr(B_n) > 1 - K e^{-nK'}$ .

Démonstration :

Soit  $\varepsilon > 0$ .

1) Supposons  $Q_\varepsilon(P_0, t_0) = Q(P_0, t_0)$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $C_n$  un des éléments  $C$  de  $C_{t_0} \cap (\Gamma_{t_0}^\varepsilon)^c$  vérifiant

$$P_0(C) \geq Q_\varepsilon(P_0, t_0) - (Q(P_0, t_0) - Q(P_0, 0)) / 2n.$$

Grâce aux arguments déjà utilisés,  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est  $d_H$ -relativement compacte et la limite  $C_0$  d'une de ses sous-suites convergentes  $(C_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  vérifie

$$C_o \in C_{t_o}$$

et 
$$P_o(C_o) \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} P_o(C_{n_k}) = Q_r(P_o, t_o) = Q(P_o, t_o) .$$

Donc  $C_o \in \Gamma_{t_o}$ . Ce qui est absurde, puisque  $(C_{n_k}) \subset C_{t_o} \cap (\Gamma_{t_o}^c)^c$ .

Donc  $0 < a = Q(P_o, t_o) - Q_\epsilon(P_o, t_o) .$

Le lemme III.F. peut se traduire par : quel que soit  $\delta > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $(\rho_p(\pi, P_o) \leq \eta)$  implique  $(Q_\epsilon(\pi, t_o) \leq Q_\epsilon(P_o, t_o) + \delta)$ .

En prenant  $\delta = \frac{a}{2}$ , on obtient  $\eta > 0$  tel que, quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\{\omega / Q_\epsilon(P_n^\omega, t_o) \geq Q_\epsilon(P_o, t_o) + \frac{a}{2}\} \subset \{\omega / \rho_p(P_n^\omega, P_o) \geq \eta\} .$$

Or, si  $(n, \omega)$  vérifie  $|Q(P_n^\omega, t_o) - Q(P_o, t_o)| < a/2$  et  $\Gamma_{n, \omega, t_o} \notin \Gamma_{t_o}^c$ , alors

$$Q_\epsilon(P_n^\omega, t_o) = Q(P_n^\omega, t_o) > Q(P_o, t_o) - a/2 = Q_\epsilon(P_o, t_o) + a/2 .$$

Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \{\omega / \Gamma_{n, \omega, t_o} \notin \Gamma_{t_o}^c\} &= \{\omega / |Q(P_n^\omega, t_o) - Q(P_o, t_o)| < a/2\} \\ &\quad \cap \{\omega / \Gamma_{n, \omega, t_o} \notin \Gamma_{t_o}^c\} \\ &\subset \{\omega / |Q(P_n^\omega, t_o) - Q(P_o, t_o)| \geq a/2\} \\ &\quad \cap \{\omega / \Gamma_{n, \omega, t_o} \notin \Gamma_{t_o}^c\} \\ &\subset \{\omega / \rho_p(P_n^\omega, P_o) \geq \eta\} \cup \{\omega / |Q(P_n^\omega, t_o) - Q(P_o, t_o)| \geq a/2\} \end{aligned}$$

Or, si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose

$$B_n^c = \{\omega / \rho_p(P_n^\omega, P_o) \geq \eta\} \cup \{\omega / |Q(P_n^\omega, t_o) - Q(P_o, t_o)| \geq a/2\} ,$$

le lemme III.B. et la proposition III.C. entraînent l'existence de quatre réels strictement positifs  $K_1, K_2, K_3$  et  $K_4$  tels que, quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\Pr(B_n^c) \leq K_1 e^{-nK_2} + K_3 e^{-nK_4}.$$

Il ne reste plus qu'à poser  $K = K_1 + K_3$  et  $K' = \min(K_2, K_4)$ . ■

Si  $\Gamma_{t_0}$  est un singleton  $\{C_0\}$ , la proposition précédente entraîne : pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $(K, K') \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{++}$  tel que, quel que soit la suite  $(C_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\{\omega / d_H(C_n^\omega, C_0) > \epsilon\}$  contient  $B_n \in A$  tel que

$$\Pr(B_n) > 1 - K e^{-nK'}.$$

Nous allons maintenant étudier ce que devient le théorème III.E. lorsque  $t_0$  vérifie  $Q(P_0, t_0) = Q(P_0, 0) > 0$ .

Si  $P_0$  est à support compact,  $Q(P_0, 0)$  est atteint sur une partie compacte d'un hyperplan affine de  $\mathbb{R}^N$  et tout ce qui précède reste valable.

Dans le cas contraire il s'agit de mettre en évidence un hyperplan affine  $H_0$  vérifiant

$$P_0(H_0) = Q(P_0, 0) = Q(P_0, t_0).$$

On note  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_{n,\omega}$ , pour tout  $(n, \omega) \in \mathbb{N}^* \times \Omega$ , l'ensemble des hyperplans qui réalisent respectivement  $Q(P_0, 0)$  et  $Q(P_n^\omega, 0)$ .

Soit  $0$  un point de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $R_0 \in \mathbb{R}^{++}$  tel que

$$P_0(B(0, R_0)) > 1 - Q(P_0, 0) / 4 .$$

Soit  $\Omega_{R_0}$  l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  vérifiant

$(P_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge faiblement vers  $P_0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n^\omega(B(0, R_0)) = P_0(B(0, R_0))$$

et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n^\omega, 0) = Q(P_0, 0)$  .

Le théorème III.A. et la loi forte des grands nombres entraînent :

$$\Pr(\Omega_{R_0}) = 1 .$$

Soit  $\omega \in \Omega_{R_0}$  et  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que, si  $n \geq n_0$ ,

$$P_n^\omega(B(0, R_0)) > 1 - \frac{1}{2} Q(P_0, 0)$$

et  $Q(P_n^\omega, 0) > \frac{1}{2} Q(P_0, 0)$  .

Alors les ensembles

$$\Gamma_{0,R} = \{H \cap B(0, R) / H \in \Gamma_0\}$$

et  $\Gamma_{n,\omega,R} = \{H \cap B(0, R) / H \in \Gamma_{n,\omega}\}$  ,

pour tout  $n \geq n_0$  et tout  $R \geq R_0 + 1$ , sont non vides et ne contiennent que des parties d'hyperplans affines de diamètres supérieurs à 1.

Soit  $R \geq R_0 + 1$  .

Les arguments utilisés dans la démonstration de la première partie du théorème I.E. et dans celle du théorème III.E. montrent que toute suite  $(\Delta_n)_{n \geq n_0}$  obtenue en notant  $\Delta_n$ , pour tout  $n \geq n_0$ , l'un des éléments de  $\Gamma_{n,\omega,R}$  est  $d_H$ -relativement compacte et possède pour valeurs d'adhérence des parties compactes d'hyperplans affines contenus dans des éléments de  $\Gamma_0$ .

Ce qui permet d'estimer  $\Gamma_0$  si  $\Gamma_0$  est un singleton et, d'une manière plus générale, d'obtenir :

quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_1 \geq n_0$  tel que, si  $n \geq n_1$ ,

$$\Gamma_{n,\omega,R} \subset \Gamma_{0,R}^\varepsilon .$$



IV -  $\epsilon$ -SUPPORT. DEFINITION ET ESTIMATION.

Le support de la loi normale centrée et réduite  $\Pi$  est  $\mathbb{R}^N$  ; mais, si  $O$  est l'origine de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\Pi(B(0,3)^C)$  est très petit. Il peut être intéressant de connaître, s'il existe, un convexe compact  $C$ , de volume minimal, rassemblant la masse d'une probabilité  $P$  à  $\epsilon$  près, où  $\epsilon \in ]0,1[$  ; c'est-à-dire vérifiant  $P(C) = 1 - \epsilon$ . Un tel convexe existe si  $P$  est absolument continue par rapport à  $\lambda$ . Mais si  $P$  est quelconque, il est possible que, pour tout borélien  $B$ ,  $P(B) \neq 1 - \epsilon$ .

C'est pourquoi nous définissons l' $\epsilon$ -support d'une probabilité quelconque de la manière suivante.

Soit  $P_0$  une probabilité vérifiant  $Q(P_0,0) \neq 1$  ; autrement dit  $P_0$  n'est pas portée par un hyperplan affine. Soit  $\epsilon$  un réel tel que  $0 < \epsilon < 1 - Q(P_0,0)$ . Puisque  $Q(P_0, \cdot)$  est monotone et continue à droite, le nombre  $t_0 = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ / Q(P_0,t) \geq 1 - \epsilon\}$  existe et vérifie  $Q(P_0,t_0) \geq 1 - \epsilon > Q(P_0,0)$ . Alors l'ensemble  $S_\epsilon = \{C \in \mathcal{C}_{t_0} / P_0(C) \geq 1 - \epsilon\}$  est non vide puisqu'il contient  $\{C \in \mathcal{C}_{t_0} / P_0(C) = Q(P_0,t_0)\}$  qui, d'après le théorème I.E., est non vide.

On appelle  $\epsilon$ -support de  $P_0$  tout élément de  $S_\epsilon$ .

Tout  $\epsilon$ -support  $C_\epsilon$  de  $P_0$  vérifie : quel que soit  $C \in \mathcal{C}$  tel que  $\lambda(C) < \lambda(C_\epsilon)$ ,

$$P_0(C) < 1 - \epsilon.$$

$C_\epsilon$  est donc un des convexes fermés de  $\mathbb{R}^N$ , de volume minimal  $t_0$ , qui rassemblent la masse de  $P_0$  à  $\epsilon$  près.

Mais, comme le montre l'exemple suivant, cette définition ne permet pas d'estimer un  $\epsilon$ -support de  $P_0$  à l'aide d'un  $\epsilon$ -support de la loi empirique d'un échantillon de loi  $P_0$ .

$N = 2$ . On reprend les notations du troisième paragraphe.

Soit  $O$  l'origine de  $\mathbb{R}^2$  et  $A = (0, 100)$ . Si  $P_0$  a pour densité par rapport à  $\lambda$  la fonction  $1_{B(O, 1/\sqrt{2\pi})} + \frac{1}{2} 1_{B(A, 1/\sqrt{\pi})}$ , alors  $B(O, 1/\sqrt{2\pi})$  est l'unique  $\frac{1}{2}$ -support de  $P_0$  et  $\{\omega / \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que, si  $n \geq n_0$ ,  $B(O, 1/\sqrt{2\pi})$  est un  $\frac{1}{2}$ -support de  $P_n^\omega\}$  est contenu dans

$\{\omega / \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que, si  $n \geq n_0$ ,  $P_n^\omega(B(O, 1/\sqrt{2\pi})) \geq P_n^\omega(B(A, 1/\sqrt{\pi}))\}$

qui est de probabilité nulle ; en effet  $-1$ , par exemple, est un état récurrent de la chaîne de Markov  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par : quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$Y_n = 1_{B(O, 1/\sqrt{2\pi})}(X_n) - 1_{B(A, 1/\sqrt{\pi})}(X_n) \quad \text{et} \quad Z_n = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \quad . \blacksquare$$

Toutefois  $P_0(B(A, 1/\sqrt{\pi})) = 1 - \frac{1}{2}$  et, quel que soit  $C \in \mathcal{C}$  tel que  $\lambda(C) < \lambda(B(A, 1/\sqrt{\pi}))$ ,  $P_0(C) \leq 1 - \frac{1}{2}$  ; donc  $B(A, 1/\sqrt{\pi})$  a des propriétés proches de la définition d'un  $\frac{1}{2}$ -support de  $P_0$ . Nous dirons que c'est un pseudo  $\epsilon$ -support de  $P_0$ .

Plus généralement on appelle pseudo  $\epsilon$ -support d'une probabilité quelconque  $P_0$  tout convexe fermé compact  $\overset{\sim}{C}_\epsilon$  vérifiant :

$$P_0(\overset{\sim}{C}_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$$

et, quel que soit  $C \in \mathcal{C}$  tel que  $\lambda(C) < \lambda(\overset{\sim}{C}_\epsilon)$ ,

$$P_0(C) \leq 1 - \varepsilon .$$

Dans ce qui suit  $\tilde{S}_\varepsilon$  désigne l'ensemble des pseudo  $\varepsilon$ -supports de  $P_0$  et on pose :

$$A(\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R}^{+*} / Q(P_0, t) = 1 - \varepsilon\} .$$

S'il est clair que  $\tilde{S}_\varepsilon$  contient  $S_\varepsilon$ , il est des cas où ces deux ensembles coïncident. C'est l'objet de la proposition suivante.

IV.A. - Proposition.-

$\tilde{S}_\varepsilon = S_\varepsilon$  si et seulement si  $A(\varepsilon)$  est vide ou réduit à un point.

Démonstration :

a) Supposons que  $A(\varepsilon)$  soit vide ou réduit à un point. Alors, quel que soit  $t > t_0$ ,  $Q(P_0, t) > 1 - \varepsilon$  et, quel que soit  $t < t_0$ ,  $Q(P_0, t) < 1 - \varepsilon$ . Donc si  $\tilde{C}_\varepsilon \in \tilde{S}_\varepsilon$ , alors  $\lambda(\tilde{C}_\varepsilon) = t_0$  et, puisque  $P_0(\tilde{C}_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ ,  $\tilde{C}_\varepsilon \in S_\varepsilon$ .

b) Le dernier cas possible, compte tenu de la croissance et de la continuité à droite de  $Q(P_0, \cdot)$ , est  $A(\varepsilon) = [t_0, t_1[$  où  $t_1 > t_0$ .

Soit  $C_1 \in C_{t_1}$  tel que  $P_0(C_1) = Q(P_0, t_1)$ . Alors  $C_1 \in \tilde{S}_\varepsilon$  mais, puisque  $S_\varepsilon \subset C_{t_0}$ ,  $C_1 \notin S_\varepsilon$ .

Nous avons restreint notre étude au cas  $\varepsilon < 1 - Q(P_0, 0)$  afin d'être assuré de l'existence d'au moins un  $\varepsilon$ -support grâce au théorème I.E.. Mais si  $P$  est mesure discrète ayant un nombre fini d'atomes, nous avons déjà remarqué que, quel que soit  $t \in \mathbb{R}^+$ , il existe  $C \in C_t$

tel que  $P(C) = Q(P, t)$  même si  $Q(P, t) = Q(P, 0)$ . Nous pouvons donc étendre la définition de l' $\epsilon$ -support au cas où  $1 > \epsilon \geq 1 - Q(P_0, 0)$  et où  $P$  est la loi empirique d'un échantillon de loi  $P_0$ .

Cela va nous permettre d'envisager l'estimation d'au moins un  $\epsilon$ -support ou pseudo  $\epsilon$ -support de  $P_0$ .

Reprenons les notations du troisième paragraphe et, pour tout  $(n, \omega) \in \mathbb{N}^* \times \Omega$ , notons  $S_{\epsilon, n, \omega}$  l'ensemble des  $\epsilon$ -supports de  $P_n$ . Pour tout  $\eta > 0$ ,  $S_{\epsilon}^{\eta} (\hat{S}_{\epsilon}^{\eta})$  désigne le dilaté d'ordre  $\eta$  de  $S_{\epsilon} (\hat{S}_{\epsilon})$  dans  $(F_b, d_H)$ .

IV.B. - Théorème. -

L'ensemble des  $\omega$  vérifiant la propriété suivante est de probabilité 1 :

Quel que soit  $\eta > 0$ , il existe  $n_0$  tel que, si  $n \geq n_0$ ,

$$S_{\epsilon, n, \omega} \subset S_{\epsilon}^{\eta} \quad \text{si } A(\epsilon) \text{ est vide ou réduit à un point}$$

et

$$S_{\epsilon, n, \omega} \subset \hat{S}_{\epsilon}^{\eta} \quad \text{sinon .}$$

Démonstration :

Soit  $\Omega_1$  l'ensemble des  $\omega$  tels que  $(Q(P_n^{\omega}, \cdot))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers  $Q(P_0, \cdot)$  et  $(P_n^{\omega})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge faiblement vers  $P_0$ . Alors, grâce en particulier au théorème III.A. ,

$$\Pr(\Omega_1) = 1 .$$

Soit  $\omega \in \Omega_1$  et  $\eta > 0$ .

D'après la proposition IV.A., il s'agit de montrer que toute suite  $(C_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , obtenue en notant  $C_n$  un élément quelconque de  $S_{\varepsilon, n, \omega}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , est  $d_H$ -relativement compacte et possède pour valeurs d'adhérence des éléments de  $\overset{\vee}{S}_\varepsilon$ .

Soit  $(C_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une telle suite. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $t_n = \lambda(C_n)$ . Alors la suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée. En effet, puisque  $\varepsilon$  est strictement positif et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(P_0, t) = 1$ , il existe  $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$Q(P_0, \tau_0) > 1 - \varepsilon ;$$

et, puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n^\omega, \tau_0) = Q(P_0, \tau_0)$ , il existe  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  tel que, si  $n \geq n_1$ ,

$$Q(P_n^\omega, \tau_0) > 1 - \varepsilon .$$

Donc, si  $n \geq n_1$ ,

$$\lambda(C_n^\omega) \leq \tau_0 .$$

Soit  $\tau_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} t_n < +\infty$ .

Quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $C_n^\omega$  est contenu dans un élément  $C'_n$  de  $C_{\tau_1}$  qui vérifie :

$$P_n(C'_n) \geq 1 - \varepsilon > Q(P_0, 0) .$$

Les arguments utilisés dans la démonstration du théorème III.E. prouvent que tous les termes de  $(C'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont contenus dans une même

boule de  $\mathbb{R}^N$ . C'est donc aussi le cas des termes de  $(C_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Soit  $C_0$  la limite d'une sous-suite convergente, au sens de  $d_H$ ,  $(C_{n_k}^\omega)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de  $(C_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Le lemme III.D. implique

$$1 - \varepsilon \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} P_{n_k}^\omega(C_{n_k}^\omega) \leq P_0(C_0) \quad .$$

Si  $\lambda(C_0) = t_0$ ,  $C_0$  est un  $\varepsilon$ -support de  $P_0$ .

Sinon, d'après la définition de  $t_0$ ,  $\lambda(C_0) > t_0$ ; et  $C_0$  est un pseudo  $\varepsilon$ -support de  $P_0$ . En effet supposons qu'il existe un convexe fermé  $C_1$  vérifiant

$$t_1 = \lambda(C_1) < \lambda(C_0)$$

et  $P_0(C_1) > 1 - \varepsilon$ .

Alors il existe  $k_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que, si  $k \geq k_0$ ,

$$Q(P_{n_k}^\omega, t_1) > 1 - \varepsilon \quad .$$

D'où, si  $k \geq k_0$ ,

$$t_{n_k} \leq t_1 < \lambda(C_0) \quad .$$

Ce qui contredit le lemme I.A. qui indique

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda(C_{n_k}^\omega) = \lambda(C_0) \quad . \blacksquare$$

Si  $\mathfrak{S}_\varepsilon$  est un singleton, ce théorème permet son estimation.

Dans le cas contraire, toute suite  $(C_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*}$  permet d'estimer au moins un pseudo  $\varepsilon$ -support de  $P_0$ .

CONCLUSION.-

En l'état de ces travaux, rien ne prouve que tout convexe "réalisant"  $Q(P, \epsilon)$  soit, presque sûrement, une valeur d'adhérence des suites  $(C_n^\circ)$  définies dans le troisième paragraphe. Cela ouvre des perspectives de recherche intéressantes surtout si on s'aperçoit que tous ces convexes n'ont pas la même "probabilité" d'être une valeur d'adhérence.

Il reste, pour compléter le quatrième paragraphe, à étudier la vitesse de convergence des estimateurs de l' $\epsilon$ -support d'une probabilité sur  $\mathbb{R}^N$ . Les résultats obtenus dans le troisième paragraphe nous poussent à penser qu'elle est exponentielle.

Paul Lévy a démontré la décroissance en  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  vers 0 de la concentration, en  $t$  fixé, de la puissance  $n$ ième de convolution d'une probabilité sur  $\mathbb{R}$ . L'auteur de cet article ([1]) a pu établir que, si  $P$  est une probabilité sur  $\mathbb{R}^2$ , la concentration sur les convexes fermés décroît vers 0 en  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  alors que la concentration sur les boules fermées décroît vers 0 en  $\frac{1}{n}$ . Les arguments figurant dans [1] nous permettent d'augurer, dans le cas d'une probabilité sur  $\mathbb{R}^N$ , la décroissance vers 0 en  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  de la concentration sur les convexes fermés et en  $n^{-N/2}$  de la concentration sur les boules fermées.

B I B L I O G R A P H I E

-----

- [1] ROGER P. - Fonction de concentration et mesures aléatoires.  
Etude de quelques problèmes de continuité.  
Thèse de 3ème cycle 1982, Université de Lille I.
- [2] BILLINGSLEY-TOPSOE - Uniformity in weak convergence.  
Z. Wars. verw. Gebiete 7 p. 1-16 (1967).
- [3] TORTRAT - Calcul des probabilités et introduction aux  
processus aléatoires.  
Masson 1971.
- [4] PARTHASARETHY - Probability measures on metric spaces.  
Academics Press. 1967.
- [5] DELESALLE D. - Propriétés de limite centrale relatives  
aux mesures aléatoires.  
Thèse de 3ème cycle 1983, Université de Lille I.
- [6] LEVY P. - Théorie de l'addition des variations aléatoires.  
Gauthier-Villars 1937 (2ème édition 1954).
- [7] ESSEN C.G. - On the Kolmogorov-Rogozin inequality for  
the concentration function.  
Z. Wars. verw. Gebiete 5 p. 210-216 (1966).
- [8] ROGOZIN - On the increase of dispersion of sums of  
independent random variables.  
Theor. Prob. Appl. Vol. 6 p. 97-99 (1961).
- [9] SEVAST'YANOV - On multidimensional concentrations.  
Theor. Prob. Appl. Vol. 8 p. 116 (1963).
- [10] MASSÉ<sup>1</sup> - Concentration des mesures et problèmes  
statistiques associés.  
Thèse de 3ème cycle 1985, Université de Lille I.
- [11] MASSÉ<sup>1</sup> - Convolution et concentration  
Pub. IRMA, Lille, Vol. 2, n° 7, 1986.
- [12] Hoeffding - Probability inequalities for sums bounded  
random variables.  
J. Amer. Statist. Assoc. 58, 13-30 (1963).