

STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

JACQUES VAILLÉ

PHILIPPE PILIBOSSIAN

Une démonstration du calcul du déterminant en blocs

Statistique et analyse des données, tome 12, n° 1-2 (1987), p. 149-153

http://www.numdam.org/item?id=SAD_1987__12_1-2_149_0

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE DÉMONSTRATION DU CALCUL DU
DÉTERMINANT EN BLOCS

Jacques VAILLÉ et Philippe PILIBOSSIAN

L.S.T.A. - Université Paris VI
4, place Jussieu
75252 PARIS CEDEX 05

Résumé : *Nous donnons dans ce papier une démonstration simple d'une identité démontrée par G. DER MEGREDITCHIAN qui permet de calculer le déterminant d'une grande matrice à l'aide de déterminants d'ordre inférieur.*

Abstract : *We give in this paper a simple prove of a identity proved by G. DER MEGREDITCHIAN who permits to calculate a determinant of a large matrix using lower order determinants.*

Mots clefs : *calcul de déterminants*

Indices de classification : AMS 15 A 15 ; 62 J 99 ; STMA 00: 050 (07 : 000) ; Bull. Sign. A 03 D, G 03 D.

Pour simplifier les calculs dans certains problèmes en statistique mathématique (Selection ascendante et descendante des prédicteurs, Etude des corrélations partielles, Analyse de régression linéaire multiple, Calcul de l'auto-corrélation partielle dans les séries chronologiques stationnaires...), G. DER MEGREDITCHIAN [1] démontre une identité qui permet de calculer un déterminant à partir de cinq déterminants d'ordre inférieur.

Manuscrit reçu le 7.1.87, révisé le 4.12.87

Soit M une matrice carrée d'ordre $n+2$:

$$M = \begin{bmatrix} A & X & Y \\ C' & a & b \\ D' & c & d \end{bmatrix}, \text{ où}$$

A est une matrice régulière d'ordre n ; X, Y, C et D des vecteurs de \mathbb{R}^n ,
 C' et D' étant les transposées de C et D ; a, b, c et d des réels.

Notons $\det M$ ou $|M|$ le déterminant de la matrice M .

Alors on a l'identité de DER MEGREDITCHIAN [1] :

$$\det M = \begin{vmatrix} A & X & Y \\ C' & a & b \\ D' & c & d \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} |A & X| & |A & Y| \\ C' & a & C' & b \\ |A & X| & |A & Y| \\ D' & c & D' & d \end{vmatrix}.$$

Si l'on multiplie à droite la matrice M par la matrice

$$\begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}X & -A^{-1}Y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

I_n étant la matrice unité d'ordre n , on obtient :

$$\begin{bmatrix} A & X & Y \\ C' & a & b \\ D' & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}X & -A^{-1}Y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ C' & a-C' & A^{-1}X & b-C' & A^{-1}Y \\ D' & c-D' & A^{-1}X & d-D' & A^{-1}Y \end{bmatrix}.$$

Calculons leurs déterminants :

$$\det \begin{bmatrix} A & X & Y \\ C' & a & b \\ D' & c & d \end{bmatrix} \times 1 = \det \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ C' & a-C' & A^{-1}X & b-C' & A^{-1}Y \\ D' & c-D' & A^{-1}X & d-D' & A^{-1}Y \end{bmatrix} .$$

Cette dernière matrice est quasi-triangulaire et son déterminant est [2] :

$$\det A \times \det \begin{bmatrix} a-C' & A^{-1}X & b-C' & A^{-1}Y \\ c-D' & A^{-1}X & d-D' & A^{-1}Y \end{bmatrix} .$$

Or, d'après la règle du calcul des déterminants d'une matrice en blocs [2], on a :

$$\det \begin{bmatrix} A & X \\ C' & a \end{bmatrix} = \det A \times \det(a-C' \quad A^{-1}X) = \det A \times (a-C' \quad A^{-1}X) .$$

On a donc

$$a-C' \quad A^{-1}X = \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} A & X \\ C' & a \end{bmatrix}$$

et les relations correspondantes pour les trois autres termes.

Donc enfin

$$\det M = \det A \times \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{|A|} & \begin{array}{c|c} A & X \\ \hline C' & a \end{array} & \frac{1}{|A|} & \begin{array}{c|c} A & Y \\ \hline C' & b \end{array} \\ \hline \frac{1}{|A|} & \begin{array}{c|c} A & X \\ \hline D' & c \end{array} & \frac{1}{|A|} & \begin{array}{c|c} A & Y \\ \hline D' & d \end{array} \end{array} \right) =$$

$$= |A| \frac{1}{|A|^2} \begin{vmatrix} |A & X| & |A & X| \\ |C' & a| & |C' & b| \\ |A & X| & |A & Y| \\ |D' & c| & |D' & d| \end{vmatrix} .$$

Signalons que ce résultat, avec la même démonstration, peut être généraliser à des matrices d'ordre supérieur :

$$\det \begin{bmatrix} A & X_1 & X_2 & X_3 & \dots \\ C'_1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ C'_2 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ C'_3 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} |A & X_1| & |A & X_2| & |A & X_3| & \dots \\ |C'_1 & a_1| & |C'_1 & a_2| & |C'_1 & a_3| & \dots \\ |A & X_1| & |A & X_2| & |A & X_3| & \dots \\ |C'_2 & b_1| & |C'_2 & b_2| & |C'_2 & b_3| & \dots \\ |A & X_1| & |A & X_2| & |A & X_3| & \dots \\ |C'_3 & c_1| & |C'_3 & c_2| & |C'_3 & c_3| & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

où A est la même matrice, les X_i et C_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) sont des vecteurs de \mathbb{R}^n , les a_i , b_i et c_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) des réels.

Bibliographie

- [1] DER MEGREDITCHIAN G. - Une identité algébrique intéressante pour la statistique mathématique, la Météorologie, 1983, vol. 6, n° 32, pp. 5-14.
- [2] PILIBOSSIAN P. - Théorie et pratique de la régression, cours de D.E.A., 1985, Chap. 2, pp. 3-7.