STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

J. M. MONNEZ

Le processus d'approximation stochastique de Robbins-Monro : résultats théoriques ; estimation séquentielle d'une espérance conditionnelle

Statistique et analyse des données, tome 4, nº 2 (1979), p. 11-29

<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1979__4_2_11_0>

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Statistique et Analyse des Données
2 - 1979 pp. 11, 29

LE PROCESSUS D'APPROXIMATION STOCHASTIQUE DE ROBBINS-MONRO : RESULTATS THEORIQUES ; ESTIMATION SEQUENTIELLE D'UNE ESPERANCE CONDITIONNELLE

J.M. MONNEZ
Laboratoire de Statistique - Université de Nancy I
IUT Informatique - Université de Nancy II

Nous donnons dans la première partie de cet article une généralisation d'un théorème de Blum [2] sur la convergence presque sûre du processus de Robbins-Monro dans $\mathbb{R}^k$; le résultat obtenu a pour corollaire le théorème classique de Gladyshev [7] ; il est en fait appliquable à une généralisation du processus de Robbins-Monro [3]. La démonstration repose sur l'utilisation du lemme de Robbins et Siegmund [17], qui fait intervenir la théorie des martingales ; c'est donc une démonstration classique, par rapport aux techniques introduites récemment d'une part par Kushner [11], [12], d'autre part par Ljung [13], [14], pour des processus stochastiques récursifs généraux ; nous indiquons dans la suite la différence entre les hypothèses de ces auteurs et celles faites ici.

Nous donnons également un théorème de rapidité de convergence, qui a pour cas particuliers les résultats énoncés dans [15] pour le processus de Robbins-Monro.

Dans la deuxième partie de l'article, nous faisons une présentation générale de l'estimation séquentielle d'une espérance conditionnelle par utilisation d'un processus d'approximation stochastique faisant intervenir plusieurs observations à chaque étape. Des applications de cette technique ont été étudiées par différents auteurs, qui ne font intervenir, à notre connaissance, qu'une observation à chaque étape du processus. Nous donnons un résultat de convergence presque sûre par application du résultat de la première partie, et un résultat de normalité asymptotique, obtenu à partir d'un théorème établi par Fabian [5] pour un processus général d'approximation stochastique.

PARTIE A : RESULTATS THEORIQUES

A.1. INTRODUCTION

A.1.1. Présentation du processus de Robbins-Monro

Soit $\{Y(x), x \in \mathbb{R}\}$ une famille de variables aléatoires réelles observables pour toute valeur du paramètre réel x ; $Y(x)$ a pour moyenne $M(x)$, inconnue. On cherche à estimer la solu-

tion θ, supposée unique, de l'équation $M(x) = 0$.

Pour cela, Robbins et Monro [16] ont construit le processus stochastique (X_n) défini par $X_{n+1} = X_n - a_n Y_n$, où Y_n est pour n fixé une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité conditionnelle lorsque $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$, est la loi de $Y(x_n)$ (en pratique, la réalisation de Y_n est une observation de $Y(x_n)$), et (a_n) une suite de nombres réels positifs telle que $\sum_1^\infty a_n = \infty$, $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$. Sous certaines hypothèses portant sur la famille $\{Y(x),\ x \in \mathbb{R}\}$, le processus (X_n) converge presque sûrement vers θ.

Le problème a été étendu au cas où $x \in \mathbb{R}^k$, et où $Y(x)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, puis au cas où $x \in H$, espace de Hilbert réel séparable, et où $Y(x)$ est à valeurs dans H.

A.1.2. Théorème de Blum

Dans cet article, $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien usuel dans $\mathbb{R}^k$, et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Nous rappelons le théorème de convergence du processus de Robbins-Monro dans $\mathbb{R}^k$, établi par Blum dans [2].

Théorème 1.- Soit f une fonction réelle non négative définie dans $\mathbb{R}^k$, continûment différentiable jusqu'à l'ordre 2. Soit D le gradient, A la matrice des dérivées partielles d'ordre 2 de f.

On a, d'après la formule de Taylor : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^k$,

$$f(x - a\,Y(x)) = f(x) - a(D(x), Y(x)) + \frac{a^2}{2}\,(Y(x), A(x - \mu a Y(x))Y(x)),$$

avec $0 < \mu < 1$.

Soit $V_a(x) = \frac{1}{2} E[(Y(x), A(x - \mu a Y(x))Y(x))]$.

On suppose les fonctions M et V_a mesurables.

On fait les hypothèses :

1.1 $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \inf_{\|x-\theta\| > \varepsilon} |f(x) - f(\theta)| > 0$;

1.2 $\quad \exists V < \infty : \forall a, \forall x,\ V_a(x) \leqslant V$;

1.2' $\quad \exists \delta > 0,\ \exists V < \infty : \forall a,\ \sup_{\|x-\theta\| < \delta} V_a(x) \leqslant V$;

1.3 $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \inf_{\|x-\theta\| > \varepsilon} (D(x), M(x)) > 0$;

1.3' $\quad \exists \lambda > 0 : \forall \varepsilon > 0,\ \forall a,\ \inf_{\|x-\theta\| > \varepsilon} ((D(x), M(x)) - \lambda V_a^+(x)) > 0$;

1.4 $\quad a_n > 0$; $\sum_1^\infty a_n = \infty$; $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$;

1.4' $\quad \forall n \geqslant 1,\ a_n \leqslant 2\lambda$.

Sous les hypothèses 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, X_1 étant une variable aléatoire telle que $E[f(X_1)] < \infty$, la suite de variables aléatoires (X_n) converge presque sûrement vers θ.

Sous les hypothèses 1.1, 1.2', 1.3', 1.4, 1.4', X_1 étant une variable aléatoire telle que $E[f(X_1)] < \infty$, la suite de variables aléatoires (X_n) converge presque sûrement vers θ.

A.1.3. Théorème de Daubèze

Daubèze a généralisé dans [4] le théorème de Blum sous les hypothèses 1.1, 1.2', 1.3', 1.4,

1.4', en introduisant à la place de la fonction f une suite de fonctions (f_n) ; pour n fixé, la fonction f_n atteint son minimum en un point θ_n, et la suite (θ_n) converge vers θ. Sous certaines hypothèses concernant la suite de fonctions (f_n) et la famille de variables aléatoires $\{Y(x),\ x \in \mathbb{R}^k\}$, Daubèze démontre la convergence presque sûre du processus de Robbins-Monro vers θ.

A.1.4. Présentation du processus de Burkholder

Soit une famille de variables aléatoires réelles observables $\{Y_n(x),\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}\}$, et $E[Y_n(x)] = M_n(x)$. On suppose maintenant qu'il existe un nombre réel θ tel que :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon),\ (|x-\theta| > \varepsilon) \Rightarrow ((x-\theta)M_n(x) > 0)$.

Pour estimer θ, Burkholder [3] propose le processus (X_n) défini par $X_{n+1} = X_n - a_n Y_n$, Y_n étant pour n fixé une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité conditionnelle lorsque $X_1 = x_1,\ X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$, est la loi de $Y_n(x_n)$, et (a_n) une suite de nombres réels positifs. Ce processus a pour cas particuliers celui de Robbins-Monro et le processus d'optimisation stochastique de Kiefer-Wolfowitz [10]. Burkholder énonce le résultat suivant :

Théorème 2.- Soit $V_n(x) = Var[Y_n(x)]$. On suppose les fonctions M_n et V_n mesurables.

On fait les hypothèses :

2.1 $\quad \exists V < \infty : \forall n, \forall x,\ V_n(x) \leqslant V$;

2.2 $\quad \exists A < \infty : \forall n, \forall x,\ |M_n(x)| \leqslant A(1+|x|)$;

2.3 $\quad \forall 0 < \delta_1 < \delta_2 < \infty,\ \sum_1^\infty a_n \inf_{\delta_1 < |x-\theta| < \delta_2} |M_n(x)| = \infty$;

2.4 $\quad a_n > 0$; $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$.

Sous les hypothèses 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, X_1 étant une variable aléatoire réelle, la suite de variables aléatoires réelles (X_n) converge presque sûrement vers θ.

A.1.5. Présentation des résultats démontrés

Nous nous plaçons dans le cas où x appartient à $\mathbb{R}^k$ et où $Y_n(x)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^k$. Dans cette présentation, nous supposons que chaque fonction M_n a un zéro unique θ_n (en fait, nous verrons que l'hypothèse demandée, 3.3.i, est moins forte) et que la suite (θ_n) converge vers un élément θ de $\mathbb{R}^k$.

Nous donnons pour le processus (X_n) une généralisation du théorème de Blum sous les hypothèses 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, en introduisant à la place de la fonction f une suite de fonctions (f_n), comme dans [4].

Nous donnons un corollaire de ce théorème, pour un choix particulier de la suite de fonctions (f_n), puis un deuxième corollaire dans le cas particulier du processus de Robbins-Monro, qui est le théorème établi par Gladyshev [7].

Sous le même type d'hypothèses, nous donnons un théorème de rapidité de convergence, qui a pour cas particuliers les théorèmes de rapidité de convergence du processus de Robbins-Monro énoncés dans [15].

On peut écrire pour le processus étudié ici la relation de récurrence sous la forme $X_{n+1} = X_n - a_n(M_n(X_n)+Z_n)$, avec $Z_n = Y_n - M_n(X_n)$; il entre dans le cadre des processus récursifs généraux (X_n) étudiés par Kushner [11], [12] et Ljung [13], [14], soit $X_{n+1} = X_n - a_n Q_n(X_n,\xi_n)$, où a_n est un nombre positif, $Q_n(X_n,\xi_n)$ une fonction de X_n et de ξ_n, bruit aléatoire pouvant dépendre de X_n (ici, $\xi_n = Z_n$; on a $E[Z_n] = 0$). Cependant, ces auteurs font l'hypothèse que $E[Q_n(x,\xi_n)]$ converge vers $f(x)$, et étudient la convergence en probabilité et presque sûre du processus (X_n) vers l'ensemble des zéros de f, sous certaines hypothèses (en particulier sur f). Dans cet article, si l'on reste dans toute la généralité du problème, on ne suppose pas que $M_n(x)$ converge vers une fonction dont θ serait le zéro ; on fait seulement l'hypothèse que M_n a pour zéro θ_n, et que la suite (θ_n) converge vers θ.

A.2. THEOREMES

A.2.1. Théorème de convergence

Théorème 3.- Soit (δ_n) une suite de fonctions réelles non-négatives définies dans $\mathbb{R}^k$, continûment différentiables jusqu'à l'ordre 2. Soit A_n la matrice des dérivées partielles d'ordre 2 de δ_n.

On a, d'après la formule de Taylor, $\forall n$, $\forall x$,

$$\delta_n(x-a_nY_n(x)) = \delta_n(x)-a_n(\text{grad}\ \delta_n(x),Y_n(x))+\frac{a_n^2}{2}\left(Y_n(x),A_n(x-\mu_na_nY_n(x))Y_n(x)\right),\ \text{avec } 0<\mu_n<1.$$

Soit $D_n(x) = \text{grad}\ \delta_n(x)$, $V_n(x) = \frac{1}{2}E[(Y_n(x),A_n(x-\mu_na_nY_n(x))Y_n(x))]$.

On suppose les fonctions M_n et V_n mesurables.

Soit (θ_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^k$ qui converge vers θ.

On fait les hypothèses :

3.1 i $\forall\varepsilon > 0,\ \forall x,\ \exists\eta(\varepsilon,x) > 0 : (\|x-y\| < \eta(\varepsilon,x)) \Rightarrow (\forall n \geq 1, |\delta_n(x)-\delta_n(y)| \leq \varepsilon)$;

3.1 ii $\forall n \geq 1, |\delta_{n+1}(x)-\delta_n(x)| \leq \delta_n\delta_n(x)+\gamma_n$, *avec* $\delta_n \geq 0, \gamma_n \geq 0$, $\Sigma\delta_n < \infty, \Sigma\gamma_n < \infty$;

3.1 iii $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\nu(\varepsilon) > 0 : \forall n \geq 1,\ \inf_{\|x-\theta_n\|>\varepsilon}|\delta_n(x)-\delta_n(\theta_n)| \geq \nu(\varepsilon)$;

3.2 $\exists d > 0 : \forall n \geq 1,\ \forall x,\ V_n(x) \leq d(1+\delta_n(x))$;

3.3 i $\forall n \geq 1,\ (D_n(x),M_n(x)) \geq 0$;

3.3 ii $\forall 0 < \varepsilon < 1,\ \sum_1^\infty a_n \inf_{\{x:\varepsilon<|\delta_n(x)-\delta_n(\theta_n)|<\frac{1}{\varepsilon}\}} (D_n(x),M_n(x)) = \infty$;

3.4 $a_n > 0$; $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$.

Sous les hypothèses 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, X_1 étant une variable aléatoire telle que $E[\delta_1(X_1)] < \infty$, la suite de variables aléatoires (X_n) converge presque sûrement vers θ.

La suite de fonctions (f_n), telle que $f_n(x) = \|x-\theta_n\|^2$, satisfait à l'hypothèse 3.1, à condition que $\sum_{n=1}^\infty \|\theta_n-\theta_{n+1}\| < \infty$ (voir [4]).

Remarque : Les hypothèses 3.2 et $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$ ne sont pas strictement nécessaires. Il suffit que, pour tout n, $V_n(X_n)$ soit intégrable et que $\sum_1^\infty a_n^2(1+\delta_n)V_n(X_n) < \infty$ p.s.

A.2.2. Corollaires

En faisant $Y_n(x) = Y(x)$, $f_n = f$, pour tout n, on se trouve dans les conditions du théorème de Blum, dont les hypothèses 1.2 et 1.3 sont alors affaiblies.

En prenant $f_n(x) = \|x-\theta_n\|^2$, à condition que $\sum_{n=1}^{\infty} \|\theta_n-\theta_{n+1}\| < \infty$, on a le théorème suivant de convergence presque sûre du processus de Burkholder :

Corollaire 1.- On suppose les fonctions $M_n(x)$ et $E[\|Y_n(x)\|^2]$ mesurables.
Soit (θ_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^k$ qui converge vers θ.
On fait les hypothèses :

C1.1 $\exists d > 0 : \forall n, \forall x, E[\|Y_n(x)\|^2] \leqslant d(1+\|x-\theta_n\|^2)$;

C1.2 *i* $\forall n \geqslant 1, (x-\theta_n, M_n(x)) \geqslant 0$;

C1.2 *ii* $\forall 0 < \varepsilon < 1, \sum_1^{\infty} a_n \inf_{\varepsilon<\|x-\theta_n\|<\frac{1}{\varepsilon}} (x-\theta_n, M_n(x)) = \infty$;

C1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \|\theta_n-\theta_{n+1}\| < \infty$;

C1.4 $a_n > 0$; $\sum_1^{\infty} a_n^2 < \infty$.

Sous les hypothèses C1.1, C1.2, C1.3, C1.4, X_1 étant une variable aléatoire telle que $E[\|X_1\|^2] < \infty$, la suite de variables aléatoires (X_n) converge presque sûrement vers θ.

En faisant $Y_n(x) = Y(x)$, $f_n(x) = f(x) = \|x-\theta\|^2$ pour tout n, on obtient le théorème classique de convergence presque sûre du processus de Robbins-Monro, établi par Gladyshev [7] :

Corollaire 2.- On suppose les fonctions $M(x)$ et $E[\|Y(x)\|^2]$ mesurables.
On fait les hypothèses :

C2.1 $\exists d > 0 : \forall x, E[\|Y(x)\|^2] \leqslant d(1+\|x-\theta\|^2)$;

C2.2 $\forall 0 < \varepsilon < 1, \inf_{\varepsilon<\|x-\theta\|<\frac{1}{\varepsilon}} (x-\theta, M(x)) > 0$;

C2.3 $a_n > 0$; $\sum_1^{\infty} a_n = \infty$; $\sum_1^{\infty} a_n^2 < \infty$.

Sous les hypothèses C2.1, C2.2, C2.3, X_1 étant une variable aléatoire telle que $E[\|X_1\|^2] < \infty$, la suite de variables aléatoires (X_n) converge presque sûrement vers θ.

A.2.3. Théorème de rapidité de convergence

Théorème 4.- On reprend l'introduction et les notations du théorème 3. On fait l'hypothèse 3.1ii ; ceci entraîne l'existence d'une fonction f telle que, $\forall x$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Soit $1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \nu_n$,

$$\delta_n+\gamma_n+a_n^2(1+\delta_n)+a_n(1+\delta_n)\,|f(\theta)-f_n(\theta_n)| = c_n, \quad \frac{c_n}{c_{n+1}} - 1 = \varepsilon_n.$$

On fait les hypothèses :

4.1 $\forall n, \forall x, f_n(x) \geqslant f(\theta)$;

4.2 $\exists K > 0 : \forall n, \forall x, (D_n(x), M_n(x)) \geqslant 2K|\mathcal{G}_n(x)-\mathcal{G}_n(\theta_n)|$;

4.3 $E[\mathcal{G}_1(X_1)] < \infty$;

4.4 $a_n > 0$; $\sum_1^\infty a_n = \infty$; $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$;

4.5 *soit* $2Kn\, a_n = u_n$;

4.5 *i* $\varepsilon_n - \nu_n = \gamma a_n + o(a_n)$, *avec* $2K-\gamma > 0$; $\varepsilon_n \nu_n = o(a_n)$;

4.5 *ii* $u_n \to u > 0$; $\exists 0 < p \leqslant 1$, $\exists a > 0 : \forall n$, $c_n < \frac{a}{n^{1+p}}$;

4.5 *iii* $u_n \to u^+$ *ou* $\sum_1^\infty \frac{|u_j-u|}{j} < \infty$.

Sous les hypothèses 3.1ii, 3.2, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5i, on a

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} E[\mathcal{G}_n(X_n)-\mathcal{G}(\theta)] < \infty.$$

Sous les hypothèses 3.1ii, 3.2, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5ii, pour $u > p$, *on a*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} n^p E[\mathcal{G}_n(X_n)-\mathcal{G}(\theta)] < \infty .$$

Sous les hypothèses 3.1ii, 3.2, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5ii, 4.5iii, pour $u = p$, *on a*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n^p}{\mathrm{Log}\ n} E[\mathcal{G}_n(X_n)-\mathcal{G}(\theta)] < \infty, \text{ et pour } u < p$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} n^u E[\mathcal{G}_n(X_n)-\mathcal{G}(\theta)] < \infty.$$

En faisant $Y_n(x) = Y(x)$, $f_n(x) = f(x) = \|x-\theta\|^2$, pour tout n, ce théorème a pour cas particuliers les théorèmes de rapidité de convergence du processus de Robbins-Monro énoncés dans [15] : on obtient alors le comportement asymptotique de $E[\|X_n-\theta\|^2]$.

A.3. DEMONSTRATIONS

A.3.1. Lemmes

Lemme 1.- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* (F_n) *une suite croissante de sous-tribus de* $\mathcal{A}$. *Soit pour tout* n, z_n, β_n, ξ_n *et* ζ_n *des variables aléatoires réelles* F_n *- mesurables, intégrables, non-négatives, telles que* $E[z_{n+1}|F_n] \leqslant z_n(1+\beta_n)+\xi_n-\zeta_n$ *(nous appellerons le processus* (z_n) *une pseudo-sur-martingale) ; on suppose que* $\sum_1^\infty \beta_n < \infty$, $\sum_1^\infty \xi_n < \infty$, *p.s.. Alors, la suite de variables aléatoires* (z_n) *converge presque sûrement vers une variable aléatoire* z *presque sûrement finie, et l'on a* $\sum_1^\infty \zeta_n < \infty$ *p.s.* .

Ce résultat a été établi par Robbins et Siegmund dans [17].

Lemme 2.- Sous l'hypothèse 3.1ii, $\exists \mathcal{G} : \forall x$, $\lim_{n\to\infty} \mathcal{G}_n(x) = \mathcal{G}(x)$. *Si l'on fait en outre l'hypothèse 3.1i, alors,* $(\theta_n \to \theta) \Rightarrow (\mathcal{G}_n(\theta_n) \to \mathcal{G}(\theta))$.

Ce lemme est démontré dans [4].

A.3.2. Démonstration du théorème 3 de convergence

1) Soit $T_n = f_n(X_n)$. Nous allons appliquer le lemme 1 à la suite (T_n).

D'après 3.1ii, $T_{n+1} = f_{n+1}(X_{n+1}) \leqslant (1+\delta_n)f_n(X_{n+1})+\gamma_n =$

$$= (1+\delta_n)f_n(X_n-a_nY_n)+\gamma_n = (1+\delta_n)\Big(f_n(X_n)-a_n\Big(D_n(X_n),Y_n\Big)+\frac{a_n^2}{2}\Big(Y_n,A_n(X_n-\mu_na_nY_n)Y_n\Big)\Big)+\gamma_n.$$

Donc, $$E\Big[T_{n+1}|X_1,X_2,\ldots,X_n\Big] \leqslant (1+\delta_n)\Big(T_n-a_n\Big(D_n(X_n),M_n(X_n)\Big)+$$

$$+ a_n^2V_n(X_n)\Big)+\gamma_n \leqslant (1+\delta_n)\Big(T_n-a_n\Big(D_n(X_n),M_n(X_n)\Big)+$$

$$+ da_n^2(1+T_n)\Big)+\gamma_n \text{ (d'après 3.2) } = T_n(1+\delta_n+da_n^2+d\delta_na_n^2)-$$

$$- a_n(1+\delta_n)\Big(D_n(X_n),M_n(X_n)\Big)+\gamma_n+da_n^2+da_n^2\delta_n \text{ p.s. .}$$

D'après 3.1ii, 3.3i, 3.4, les hypothèses du lemme 1 sont vérifiées. Donc, $\exists T < \infty$ p.s. : $T_n \xrightarrow{p.s.} T$, et

$$\sum_1^\infty a_n(1+\delta_n)\Big(D_n(X_n),M_n(X_n)\Big) < \infty \text{ p.s. .}$$

Remarque : On a $E[T_{n+1}|X_1,X_2,\ldots,X_n] \leqslant (1+\delta_n)T_n+a_n^2(1+\delta_n)V_n(X_n)+\gamma_n-a_n(1+\delta_n)\Big(D_n(X_n),M_n(X_n)\Big)$.
On constate que, pour obtenir la conclusion $T_n \xrightarrow{p.s.} T$, il suffit que pour tout n, $V_n(X_n)$ soit intégrable et que $\sum_1^\infty a_n^2(1+\delta_n)V_n(X_n) < \infty$ p.s. ; les hypothèses 3.2 et $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$ ne sont pas strictement nécessaires ; ceci rejoint une préoccupation de L.Ljung [13], [14], qui affaiblit l'hypothèse $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$.

2) Nous allons montrer que $T = f(\theta)$ p.s. .

Soit $C = \{\omega : T_n(\omega) \to T(\omega)\}$; soit

$$C_1 = \{\omega : \sum_1^\infty a_n(1+\delta_n)\Big(D_n(X_n(\omega)),M_n(X_n(\omega))\Big) < \infty\} \text{ ; } P(C \cap C_1) = 1.$$

Soit $\omega \in C \cap C_1$; supposons $T(\omega) \neq f(\theta)$.

$$T_n(\omega) \to T(\omega) \text{ ; d'après le lemme 2, } f_n(\theta_n) \to f(\theta).$$

Donc, $$|T_n(\omega)-f_n(\theta_n)| \to |T(\omega)-f(\theta)| > 0 \text{ ; } \exists\varepsilon_1 > 0,$$

$$\exists N(\omega,\varepsilon_1) : \forall n > N(\omega,\varepsilon_1), \varepsilon_1 < |T_n(\omega)-f_n(\theta_n)| < \frac{1}{\varepsilon_1} .$$

On a, avec $N = N(\omega,\varepsilon_1)$,

$$\sum_{N+1}^{\infty} a_n(1+\delta_n)\Big(D_n(X_n(\omega)),M_n(X_n(\omega))\Big) \geqslant \sum_{N+1}^{\infty} a_n\Big(D_n(X_n(\omega)),M_n(X_n(\omega))\Big) = \infty, \text{ d'après 3.3.}$$

Or, $\omega \in C_1$; il y a donc contradiction ; $\forall\omega \in C \cap C_1$, $T(\omega) = f(\theta)$.

3) Nous allons montrer que $X_n-\theta_n \xrightarrow{p.s.} 0$.

Soit $\omega \in C \cap C_1$; supposons que $X_n(\omega)-\theta_n \not\longrightarrow 0$.

Alors, $\exists\varepsilon_2 > 0$, $\exists(n_\ell)$: $\forall\ell$, $\|X_{n_\ell}(\omega)-\theta_{n_\ell}\| > \varepsilon_2$.

D'après 3.1iii, $\forall\ell$, $|T_{n_\ell}(\omega)-f_{n_\ell}(\theta_{n_\ell})| \geqslant \nu(\varepsilon_2) > 0$.

Comme $f_{n_\ell}(\theta_{n_\ell}) \to f(\theta)$, $\exists\delta > 0$, $\exists L$: $\forall\ell > L$, $|T_{n_\ell}(\omega)-f(\theta)| > \delta$.

Or, $T_{n_\ell}(\omega) \to f(\theta)$; il y a contradiction.

Donc, $\forall\omega \in C \cap C_1$, $X_n(\omega)-\theta_n \to 0$; comme $\theta_n \to \theta$, on en déduit que $X_n-\theta \xrightarrow{p.s.} 0$.

A.3.3. Démonstration du théorème 4 de rapidité de convergence

Nous citons simplement ici les étapes de la démonstration, qui est parallèle à celles données dans [15].

Soit $T_n = f_n(X_n)$. En utilisant 3.1ii, 3.2, 4.2, on montre que

$$E[T_{n+1}-f(\theta)] \leqslant E[T_n-f(\theta)](1-2K\,a_n-2K\,a_n\delta_n+da_n^2(1+\delta_n))+$$

$$+\delta_n E[T_n]+ 2K\,a_n(1+\delta_n)|f_n(\theta_n)-f(\theta)|+d(1+f(\theta))(1+\delta_n)a_n^2+\gamma_n.$$

En utilisant 3.1ii, 3.2, 4.3, 4.4, on montre que :

$\exists A$: $\forall n, E[T_n] < A$. On en déduit que : $\exists F > 0$:

$$E[T_{n+1}-f(\theta)] \leqslant E[T_n-f(\theta)](1-2K\,a_n)+F(\delta_n+\gamma_n+a_n^2(1+\delta_n)+a_n(1+\delta_n)|f_n(\theta_n)-f(\theta)|).$$

Pour obtenir les conclusions du théorème, on utilise les lemmes III-2 et III-3 de [15], dus respectivement à Schmetterer [18] et Venter [19].

PARTIE B : ESTIMATION SEQUENTIELLE D'UNE ESPERANCE CONDITIONNELLE

B.1. INTRODUCTION

B.1.1. Présentation de la méthode

Soit une variable aléatoire réelle observable Y. Soit une variable aléatoire observable X, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Soit $\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^p$ p fonctions réelles de m variables réelles, mesurables, connues.

On pose le problème suivant : trouver une combinaison linéaire des variables aléatoires réelles $\varphi^1(X),\varphi^2(X),\ldots,\varphi^p(X),\theta^1\varphi^1(X)+\theta^2\varphi^2(X)+\ldots+\theta^p\varphi^p(X)$, qui approche $E[Y/X]$ au sens des moindres carrés.

Soit θ et φ deux matrices-colonnes, avec $\theta' = (\theta^1,\theta^2,\ldots,\theta^p)$, $\varphi' = (\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^p)$. On cherche θ qui rende minimal $E[(E[Y/X]-\theta'\varphi(X))^2]$, ou de façon équivalente $E[(Y-\theta'\varphi(X))^2]$. Comme $\text{grad}_\theta\, E[(Y-\theta'\varphi(X))^2] = -2E[(Y-\theta'\varphi(X))\varphi(X)]$, on est conduit à introduire la famille de variables aléatoires $Z(\theta) = (Y-\theta'\varphi(X))\varphi(X)$. Le problème posé revient à résoudre l'équation $E[Z(\theta)] = 0$, dont on suppose la solution θ_o unique.

Pour estimer θ_o, on construit le processus de Burkholder (Θ_n),

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n - a_n \frac{1}{m_n} \sum_{j=1}^{m_n} \varphi(X_{nj})(\varphi'(X_{nj})\Theta_n - Y_{nj}),$$

où les (X_{nj},Y_{nj}), $n = 1,2,\ldots,j = 1,2,\ldots,m_n$, constituent un échantillon de (X,Y) obtenu à l'aide d'expériences indépendantes ; à l'étape n, on fait donc m_n observations indépendantes de la variable aléatoire (X,Y).

B.1.2. Présentation des résultats démontrés

Nous donnons un théorème de convergence presque sûre de ce processus, et un théorème de normalité asymptotique ; dans ce dernier résultat, si l'on prend a_n du type $\frac{c}{n}$, il apparaît que la matrice de covariances asymptotique est en $\frac{1}{nm_n}$; dans le cas où m_n ne dépend pas de n, elle dépend donc du nombre total d'individus observés au cours des n étapes, et non pas du nombre n d'étapes ; ceci justifie que l'on fasse plusieurs observations de la variable (X,Y) à chaque étape.

B.1.3. Quelques applications

1) Régression linéaire

Y est la variable expliquée ; les m variables aléatoires réelles explicatives $X^1,X^2,\ldots,X^m$ constituent la variable X. On peut approcher l'espérance conditionnelle $E[Y/X^1,X^2,\ldots,X^m]$ par une combinaison linéaire des p variables $\varphi^i(X^1,X^2,\ldots,X^m)$, $i = 1,2,\ldots,p$, en utilisant cette méthode séquentielle.

2) Détermination d'une fonction discriminante bayesienne

On dispose de r classes d'individus $C_1,C_2,\ldots,C_r$; pour classer un nouvel individu, on mesure m variables $X^1,X^2,\ldots,X^m$.

Soit, pour $i = 1,2,\ldots,r$, Z_i la variable indicatrice de la classe C_i. Soit $P(C_i/X)$ la probabilité a posteriori de la classe C_i lorsque l'on observe $X = (X^1,X^2,\ldots,X^m)$; on a $P(C_i/X) = E[Z_i/X]$. Pour approcher $P(C_i/X)$, pour $i = 1,2,\ldots,r$, et obtenir ainsi des estimations des fonctions discriminantes bayesiennes, on peut utiliser cette méthode séquentielle, avec $Y = Z_i$ et $X = (X^1,X^2,\ldots,X^m)$.

3) Estimation d'une fonction

Soit h une fonction réelle de m variables réelles. Soit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^m$; on suppose que l'on peut observer la variable aléatoire $h(X)$.

On peut approcher $h(X)$ par une combinaison linéaire des $\varphi^i(X)$, $i = 1,2,\ldots,p$, et estimer ainsi la fonction h, en utilisant cette méthode séquentielle avec $Y = h(X)$.

4) Estimation d'une fonction $h(x) = E[Z(x)]$

Soit une famille de variables aléatoires réelles $\{Z(x),\ x \in \mathbb{R}^m\}$; soit $E[Z(x)] = h(x)$. Soit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^m$; on suppose que l'on peut observer la variable aléatoire $Z(X)$. Pour estimer la fonction h, on procède comme en 3, en prenant $Y = Z(X)$.

Ceci peut s'appliquer en particulier à l'estimation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, en prenant pour $Z(x)$ la fonction de répartition empirique.

Le problème 1, dans le cas d'une variable explicative, est étudié dans [7] ; le problème 2, dans le cas de deux classes, les problèmes 3 et 4, ainsi que d'autres applications, sont étudiés dans [9] et [1] ; les auteurs y ont utilisé un processus de Robbins-Monro avec une observation à chaque étape. Nous faisons ici une présentation de ces applications dans le cadre général de l'estimation d'une espérance conditionnelle, en utilisant un processus faisant intervenir plusieurs observations à chaque étape.

B.2. THEOREMES

B.2.1. Théorème de convergence

Théorème 5.- On fait les hypothèses :

5.1 *il n'existe pas de relation linéaire entre* $\varphi^1(X),\varphi^2(X),\ldots,\varphi^p(X)$;

5.2 *les moments d'ordre 4 de la variable aléatoire* $(\varphi^1(X),\varphi^2(X),\ldots,\varphi^p(X),Y)$ *existent ;*

5.3. $a_n > 0$; $\sum_1^\infty a_n = \infty$; $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$.

Sous les hypothèses 5.1, 5.2, 5.3, Θ_1 *étant une variable aléatoire telle que* $E[\|\Theta_1\|^2] < \infty$, *la suite de variables aléatoires* (Θ_n) *converge presque sûrement vers* θ_0.

B.2.2. Théorème de normalité asymptotique

On considère dans ce théorème des suites (a_n) particulières, qui vérifient l'hypothèse 5.3.

Théorème 6.- Soit $Z(\theta) = \varphi(X)(\varphi'(X)\theta - Y)$, $M(\theta) = E[Z(\theta)]$.

Soit $E[\varphi(X)\varphi'(X)] = B$; *soit* Λ *la réduite diagonale de* B, P *la matrice orthogonale de passage :* $\Lambda = P'BP$; *soit* λ *la plus petite valeur propre de* B.

On fait les hypothèses :

6.1 *il existe* $r > 0$ *tel que la variable aléatoire* $(\varphi^1(X),\varphi^2(X),\ldots,\varphi^p(X),Y)$ *admette des moments d'ordre* $4+r$;

6.2 $\exists \pi : \lim_{\theta\to\theta_0} E[(Z(\theta)-M(\theta))(Z(\theta)-M(\theta))'] = \pi$;

6.3 $\exists m : \lim_{n\to\infty} m_n = m$;

6.4 $\exists \frac{1}{2} < \beta \leqslant 1,\ \exists c > 0 : n^{\beta} a_n \to c$;

pour $\beta = 1,\ c > \frac{1}{2\lambda}$.

On définit la matrice $M = c^2\left(\dfrac{(P'\pi P)_{ij}}{c\Lambda_{ii}+c\Lambda_{jj}-\gamma^+}\right)$,

avec $\gamma^+ = \begin{cases} 1 & \text{pour } \beta = 1 \\ 0 & \text{pour } \beta \neq 1. \end{cases}$

Sous les hypothèses 5.1, 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, on a :

$$\sqrt{m_n}\, n^{\frac{\beta}{2}} (\Theta_n-\theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,PMP').$$

B.3. DEMONSTRATIONS

B.3.1. Lemmes

Lemme 3.- Soit $\alpha \geqslant 1$. *Soit* $X_1,X_2,\ldots,X_n$ n *variables aléatoires dans* $\mathbb{R}^p$, *définies sur un même espace probabilisé, telles que* $E[\|X_i\|^{\alpha}]$ *existe, pour* $i = 1,2,\ldots,n$. *Alors,*

$$E\left[\left\|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right\|^{\alpha}\right] \leqslant \frac{1}{n}\left(E[\|X_1\|^{\alpha}]+\ldots+E[\|X_n\|^{\alpha}]\right).$$

Lemme 4.- On considère le processus de Burkholder dans $\mathbb{R}^p$. *On reprend les notations définies en A.1.4. et A.1.5..Soit* $Y_n(x)-M_n(x) = Z_n(x)$, $Y_n-M_n(X_n) = Z_n$. *On suppose les fonctions* $M_n(x)$ *et* $E[\|Y_n(x)\|^2]$ *mesurables. Soit* (θ_n) *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^p$ *qui converge vers* θ.

On fait les hypothèses :

L4.1 $\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_n\sup_{\|x-\theta\|<\varepsilon}\displaystyle\int_{\{\|Z_n(x)\| \geqslant R\}} \|Z_n(x)\|^2 dP = 0$;

L4.2 $\sup_n\sup_x E[\|Z_n(x)\|^2] < \infty$.

Sous les hypothèses L4.1, L4.2, C1.1, C1.2, C1.3, C1.4, on a :

$$\lim_{R\to\infty}\sup_n \int_{\{\|Z_n\| \geqslant R\}} \|Z_n\|^2 dP = 0.$$

Ce lemme est une extension au cas du processus de Burkholder du lemme II.2 de [15] pour le processus de Robbins-Monro ; nous n'en reprendrons pas la démonstration.

Lemme 5.- Soit une famille de variables aléatoires dans $\mathbb{R}^p$, $\{Z_n(x),\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^p\}$. *On fait l'hypothèse :*

L5.1 $\quad \exists\theta,\ \exists\varepsilon_0 > 0,\ \exists\nu > 0 : \sup_n \sup_{\|x-\theta\|<\varepsilon_0} E[\|Z_n(x)\|^{2+\nu}] < \infty.$

Sous l'hypothèse L5.1, on a :

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_n \sup_{\|x-\theta\|<\varepsilon} \int_{\{\|Z_n(x)\| \geqslant R\}} \|Z_n(x)\|^2 dP = 0.$$

La démonstration de ce lemme ne présente pas de difficulté.

B.3.2. Théorème de Fabian

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé ; toutes les variables aléatoires intervenant dans la suite sont définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Soit (V_n) et (T_n) deux suites de variables aléatoires dans $\mathbb{R}^p$, (Γ_n) et (Φ_n) deux suites de variables aléatoires dans $\mathbb{R}^{p\times p}$. Soit β et γ deux nombres réels. Fabian définit dans [5] le processus (U_n) dans $\mathbb{R}^p$ par :

$$U_{n+1} = \left(I - \frac{\Gamma_n}{n^\beta}\right)U_n + \frac{1}{n^{(\beta+\gamma)/2}}\ \Phi_n V_n + \frac{1}{n^{\beta+\gamma/2}}\ T_n.$$

Théorème 7.- Soit $(\mathcal{F}_n)$ *une suite non-décroissante de sous-tribus de* $\mathcal{A}$. *On fait les hypothèses :*

7.1 $\quad \forall n \geqslant 2,\ \Gamma_n,\ \Phi_{n-1},\ V_{n-1}$ *sont* $\mathcal{F}_n$*-mesurables ;*

7.2 $\quad \exists\Gamma$ *définie positive* $\in \mathbb{R}^{p\times p} : \Gamma_n \xrightarrow{p.s.} \Gamma$ *; soit* Λ *la réduite diagonale de* Γ, P *la matrice orthogonale de passage :* $\Lambda = P'\Gamma P$ *; soit* λ *la plus petite des valeurs propres de* Γ *;*

7.3 $\quad \exists\Phi \in \mathbb{R}^{p\times p} : \Phi_n \xrightarrow{p.s.} \Phi$;

7.4 $\quad \exists T \in \mathbb{R}^p : T_n \xrightarrow{p.s.} T$ *ou* $E[\|T_n - T\|] \to 0$;

7.5 $\quad \forall n,\ E[V_n \mid \mathcal{F}_n] = 0$;

7.6 $\quad \exists\Sigma \in \mathbb{R}^{p\times p} : \|E[V_n V_n' \mid \mathcal{F}_n] - \Sigma\| \xrightarrow{p.s.} 0$;

7.7 $\quad \exists C > 0 : \forall n,\ \|E[V_n V_n' \mid \mathcal{F}_n] - \Sigma\| < C$ p.s. ;

7.8 $\quad \forall r > 0,\ \lim_{j\to\infty} \int_{\{\|V_j\|^2 \geqslant rj^\beta\}} \|V_j\|^2 dP = 0$

ou $\beta = 1,\ \forall r > 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\|V_j\|^2 \geqslant rj\}} \|V_j\|^2 dP = 0$;

7.9 $\quad 0 < \beta \leqslant 1$;

7.10 $\quad \gamma \geqslant 0$;
soit $\gamma^+ = \gamma$ *pour* $\beta = 1$, $\gamma^+ = 0$ *pour* $\beta \neq 1$; $\gamma^+ < 2\lambda$;

Sous les hypothèses 7.1 à 7.10, on a :

$$n^{\gamma/2}u_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left((\Gamma-\frac{\gamma^+}{2}I)^{-1}T,\ PMP'\right),\ \text{avec}\ M=\left(\frac{(P'\Phi\Sigma\Phi'P)_{ij}}{\Lambda_{ii}+\Lambda_{jj}-\gamma^+}\right).$$

B.3.3. Démonstration du théorème de convergence

1) Soit, pour tout n, $\left((X_{nj},Y_{nj}),\ j=1,2,\dots,m_n\right)$ un échantillon formé de variables indépendantes de la variable aléatoire (X,Y). On définit la famille de variables aléatoires

$$\{\bar{Z}_n(\theta),\ n\in\mathbb{N},\ \theta\in\mathbb{R}^p\},\ \text{telle que}\ \bar{Z}_n(\theta)=\frac{1}{m_n}\sum_{j=1}^{m_n}\varphi(X_{nj})\left(\varphi'(X_{nj})\theta-Y_{nj}\right).$$

On a $E[\bar{Z}_n(\theta)]=M(\theta)=E[\varphi(X)\varphi'(X)]\theta-E[\varphi(X)Y]$. D'après 5.1, la matrice $E[\varphi(X)\varphi'(X)]$ est définie positive ; l'équation $M(\theta)=0$ admet pour solution unique $\theta_o=\left(E[\varphi(X)\varphi'(X)]\right)^{-1}E[\varphi(X)Y]$, et on a $M(\theta)=E[\varphi(X)\varphi'(X)](\theta-\theta_o)$.

Pour montrer la convergence presque sûre du processus (Θ_n) vers θ_o, nous allons vérifier les hypothèses du corollaire 1. On a ici : $\forall n,\theta_n=\theta_o$; l'hypothèse C1.3 est vérifiée ; d'après 5.3, l'hypothèse C1.4 est vérifiée.

2) Montrons que : $\exists d>0 : \forall n,\ \forall\theta,\ E[\|\bar{Z}_n(\theta)\|^2]\leqslant d(1+\|\theta-\theta_o\|^2)$.

D'après le lemme 3, on a

$$E[\|\bar{Z}_n(\theta)\|^2]\leqslant E[\|\varphi(X)(\varphi'(X)\theta-Y)\|^2]=\theta'E[(\varphi(X)\varphi'(X))^2]\theta-$$

$$-2E[Y\varphi'(X)\varphi(X)\varphi'(X)]\theta+E[\varphi'(X)\varphi(X)Y^2]\ ;$$

d'après 5.2, les matrices introduites existent. Donc,

$$E[\|\bar{Z}_n(\theta)\|^2]\leqslant\|E[(\varphi(X)\varphi'(X))^2]\|\ \|\theta\|^2+$$

$$+2\|E[Y\varphi'(X)\varphi(X)\varphi'(X)]\|\ \|\theta\|+\|E[\varphi'(X)\varphi(X)Y^2]\|\ ;$$

on en déduit la proposition. L'hypothèse C1.1 est vérifiée.

3) Montrons que : $\forall\varepsilon>0,\ \inf_{\varepsilon<\|\theta-\theta_o\|<\frac{1}{\varepsilon}}(\theta-\theta_o,M(\theta))>0$.

Soit λ la plus petite valeur propre de la matrice définie positive $E[\varphi(X)\varphi'(X)]$.

On a $(\theta-\theta_o,M(\theta))=(\theta-\theta_o,E[\varphi(X)\varphi'(X)](\theta-\theta_o))\geqslant\lambda\|\theta-\theta_o\|^2$.

On en déduit la proposition.

L'hypothèse C1.2i est vérifiée ; comme $\sum_1^\infty a_n=\infty$, l'hypothèse C1.2ii est également vérifiée.

B.3.4. Démonstration du théorème de normalité asymptotique

1) Le processus s'écrit : $\Theta_{n+1} = \Theta_n - a_n \bar{Z}_n$, avec

$$\bar{Z}_n = \frac{1}{m_n} \sum_{j=1}^{m_n} \varphi(X_{nj})\Big(\varphi'(X_{nj})\Theta_n - Y_{nj}\Big).$$

On a : $E[\bar{Z}_n | \Theta_n] = M(\Theta_n) = B(\Theta_n - \theta_o)$.

Soit $W(\theta) = Z(\theta) - M(\theta) = \varphi(X)\Big(\varphi'(X)\theta - Y\Big) - M(\theta)$,

$$W_{nj}(\theta) = \varphi(X_{nj})\Big(\varphi'(X_{nj})\theta - Y_{nj}\Big) - M(\theta),$$

$$\bar{W}_n(\theta) = \frac{1}{m_n} \sum_{j=1}^{m_n} W_{nj}(\theta),\ W_{nj} = W_{nj}(\Theta_n),$$

$$\bar{W}_n = \bar{W}_n(\Theta_n) = \bar{Z}_n - M(\Theta_n).$$

On peut écrire le processus sous la forme :

$$\Theta_{n+1} - \theta_o = (I - a_n B)(\Theta_n - \theta_o) - a_n \bar{W}_n.$$

Nous allons vérifier pour ce processus les hypothèses du théorème de Fabian, en posant $\Theta_n - \theta_o = U_n$, $n^{\beta} a_n B = \Gamma_n$, $\gamma = \beta$, $-n^{(\beta+\gamma)/2} a_n I = \Phi_n$, $\bar{W}_n = V_n$, $T_n = 0$, et en prenant pour $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$.

2) Les hypothèses 7.1 à 7.5 sont vérifiées, avec $\Gamma = cB$, $\Phi = -cI$ (d'après 6.4), $T = 0$.

3) Montrons que : $\exists \Sigma \in \mathbb{R}^{p \times p}$: $\|E[\bar{W}_n \bar{W}'_n | \mathcal{F}_n] - \Sigma\| \xrightarrow{p.s.} 0$.

$$E[\bar{W}_n \bar{W}'_n | \mathcal{F}_n] = \frac{1}{(m_n)^2} \sum_i \sum_j E[W_{ni} W'_{nj} | \mathcal{F}_n] = \frac{1}{(m_n)^2} \sum_i E[W_{ni} W'_{ni} | \mathcal{F}_n],$$

car pour $i \neq j$, les variables $W_{ni}(\theta)$ et $W_{nj}(\theta)$ sont indépendantes et $E[W_{ni}(\theta)] = 0$.

Sous les hypothèses 5.1, 6.1 et 6.4, $\Theta_n \xrightarrow{p.s.} \theta_o$; d'après 6.2, $E[W_{ni} W'_{ni} | \mathcal{F}_n] \xrightarrow{p.s.} \pi$. D'après 6.3, $\exists m_o$: $m_n < m_o$; donc,

$$\Big\|\frac{1}{(m_n)^2} \sum_{i=1}^{m_n} \Big(E[W_{ni} W'_{ni} | \mathcal{F}_n] - \pi\Big)\Big\| \leqslant \frac{1}{(m_n)^2} \sum_{i=1}^{m_o} \|E[W_{ni} W'_{ni} | \mathcal{F}_n] - \pi\| \xrightarrow{p.s.} 0 ;$$

comme $m_n \to m$, $E[\bar{W}_n \bar{W}'_n | \mathcal{F}_n] \xrightarrow{p.s.} \frac{\pi}{m}$.

L'hypothèse 7.6 est vérifiée avec $\Sigma = \frac{\pi}{m}$.

4) Nous supposons provisoirement (voir la fin de la démonstration) que $\sup_\theta \|E[W(\theta)W'(\theta)] - \pi\| < \infty$ (1). En faisant des majorations, on en déduit facilement que $\exists C > 0 : \forall n, \|E[\bar{W}_n \bar{W}'_n | \mathcal{F}_n] - \frac{\pi}{m}\| < C$. L'hypothèse 7.7 est vérifiée.

5) Pour vérifier que, $\forall r > 0$, $\lim_{j\to\infty} \int_{\{\|\bar{W}_j\|^2 \geqslant r\, j^\beta\}} \|\bar{W}_j\|^2 dP = 0$,

on utilise le lemme 4. D'après 5.1, 6.1, 6.4, les hypothèses C1.1, C1.2, C1.3, C1.4 sont vérifiées.

Vérifions l'hypothèse L4.2. Supposons provisoirement (voir la fin de la démonstration) que $\sup_\theta E[\|W(\theta)\|^2] < \infty$ (2). Alors, d'après le lemme 3, $\forall n$, $\forall \theta$, $E[\|\bar{W}_n(\theta)\|^2] \leqslant E[\|W(\theta)\|^2] \leqslant$ $\leqslant \sup_\theta E[\|W(\theta)\|^2] < \infty$.

Vérifions l'hypothèse L4.1. Pour cela, nous appliquons le lemme 5 et vérifions que : $\exists \varepsilon_o > 0$, $\exists v > 0$:

$$\sup_n \sup_{\|\theta-\theta_o\|<\varepsilon_o} E[\|\bar{W}_n(\theta)\|^{2+v}] < \infty.$$

D'après le lemme 3, on a

$$E[\|\bar{W}_n(\theta)\|^{2+v}] \leqslant E[\|W(\theta)\|^{2+v}].$$

On a $\quad W(\theta) = \varphi(X)\Big(\varphi'(X)\theta - Y\Big) - B(\theta-\theta_o)$; donc, pour $\|\theta-\theta_o\| < \varepsilon_o$,

$$E[\|W(\theta)\|^{2+v}] \leqslant E\Big[\Big(\|\varphi(X)\varphi'(X)\|(\|\theta_o\|+\varepsilon_o)+\|\varphi(X)Y\|+\|B\|\varepsilon_o\Big)^{2+v}\Big] < \infty$$

pour un $v > 0$ d'après 6.1.

Toutes les hypothèses du lemme 4 sont vérifiées. On a donc

$$\lim_{R\to\infty} \sup_n \int_{\{\|\bar{W}_n\| \geqslant R\}} \|\bar{W}_n\|^2 dP = 0. \text{ Comme}$$

$$\int_{\{\|\bar{W}_j\|^2 \geqslant r\, j^\beta\}} \|\bar{W}_j\|^2 dP \leqslant \sup_n \int_{\{\|\bar{W}_n\|^2 \geqslant r\, j^\beta\}} \|\bar{W}_n\|^2 dP,$$

on en déduit la proposition cherchée.

6) Vérifions que, pour $\beta = 1$, $\forall r > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\|\bar{W}_j\|^2 \geqslant r\, j\}} \|\bar{W}_j\|^2 dP = 0.$$

D'après le résultat de 5,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_o : \forall j > n_o,\ \int_{\{\|\bar{W}_j\|^2 \geqslant r\, j\}} \|\bar{W}_j\|^2 dP < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

D'autre part, $\sup_n \sup_\theta E[\|\bar{W}_n(\theta)\|^2] < \infty$, d'après l'hypothèse (2), $\sup_\theta E[\|W(\theta)\|^2] < \infty$, et d'après le lemme 3 ; donc, $\sup_j E[\|\bar{W}_j\|^2] < \infty$; par conséquent,

$$\exists n_1 : \forall n > n_1, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n_o} \int_{\{\|\bar{W}_j\|^2 \geqslant r\, j\}} \|\bar{W}_j\|^2 dP < \frac{\varepsilon}{2} .$$

$$\text{Donc, } \forall n > \sup(n_o, n_1), \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\|\bar{W}_j\|^2 \geqslant r\, j\}} \|\bar{W}_j\|^2 dP < \varepsilon ;$$

la proposition est vérifiée.

7) Nous allons montrer dans cette partie que l'on peut supprimer les hypothèses (1) et (2) :

$$(1) : \sup_\theta \|E[W(\theta)W'(\theta)]-\pi\| < \infty ;$$

$$(2) : \sup_\theta E[\|W(\theta)\|^2] < \infty.$$

Pour cela, nous allons appliquer la méthode de troncature introduite par Hodges et Lehmann [8].

On déduit les hypothèses 5.1, 6.1 et 6.2 qu'il existe un voisinage de θ_o, défini par $\|\theta-\theta_o\| < A$, dans lequel (1) et (2) sont vérifiées ; si elles ne le sont pas pour tout θ, définissons la famille de variables aléatoires $\{Z^1(\theta), \theta \in \mathbb{R}^p\}$, telle que $Z^1(\theta) = Z(\theta)$ pour $\|\theta-\theta_o\| < A$ et telle que $Z^1(\theta)$ soit une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(B(\theta-\theta_o),I)$ pour $\|\theta-\theta_o\| \geqslant A$; (1) et (2) sont vérifiées quel que soit θ pour cette famille.

Le processus (Θ_n) converge presque sûrement vers θ_o. Donc, $\forall 0 < \varepsilon < 1$, $\exists N(\varepsilon)$: $P(\bigcap_{n>N(\varepsilon)} \{\|\Theta_n-\theta_o\| < A\}) > 1-\varepsilon$(3). Définissons alors le processus (Θ_n^1), dépendant de ε, par

$$\Theta_1^1 = \Theta_{N(\varepsilon)+1}, \quad \Theta_{n+1}^1 = \Theta_n^1 - a_{N(\varepsilon)+n} \bar{Z}^1_{N(\varepsilon)+n},$$

construit à partir de la famille $\{Z^1(\theta)\}$ comme (Θ_n) l'est à partir de la famille $\{Z(\theta)\}$. En reprenant la démonstration, on constate que toutes les hypothèses du théorème de Fabian sont vérifiées pour ce processus (nous aurions pu l'introduire au début de la démonstration ; nous ne l'avons pas fait pour ne pas alourdir les notations). On conclut donc, d'après Fabian, que $\sqrt{m}\, n^{\beta/2}(\Theta_n^1-\theta_o) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,PMP')$, M étant défini dans l'énoncé du présent théorème.

Pour $\|\theta-\theta_o\| < A$, $Z^1(\theta) = Z(\theta)$; donc d'après (3), on a

$$P\Big(\forall n \geqslant 1, \Theta_n = \Theta_{N(\varepsilon)+n}\Big) > 1-\varepsilon.$$

Notons $F_X(t) = P(X < t)$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ; on a

$$\forall n,\ \forall\theta,\ \left|F_{\Theta_{N(\varepsilon)+n}}(\theta)-F_{\Theta_n^1}(\theta)\right| = \left|P\left(\Theta_{N(\varepsilon)+n} < \theta\right)-P\left(\Theta_n^1 < \theta\right)\right|$$

$$\leqslant \left|P\left(\Theta_{N(\varepsilon)+n} < \theta \,\middle|\, \forall n \geqslant 1,\ \Theta_n^1 = \Theta_{N(\varepsilon)+n}\right)-\right.$$

$$\left.-P\left(\Theta_n^1 < \theta \,\middle|\, \forall n \geqslant 1,\ \Theta_n^1 = \Theta_{N(\varepsilon)+n}\right)\right| P\left(\forall n \geqslant 1,\ \Theta_n^1 = \Theta_{N(\varepsilon)+n}\right) +$$

$$+P\left(\exists n : \Theta_n^1 \neq \Theta_{N(\varepsilon)+n}\right) < 0 + \varepsilon.$$

Donc, $\forall 0 < \varepsilon < 1,\ \exists N(\varepsilon) : \forall n,\ \forall\theta, \left|F_{\Theta_{N(\varepsilon)+n}}(\theta)-F_{\Theta_n^1}(\theta)\right| < \varepsilon$;

d'autre part, $\forall 0 < \varepsilon < 1,\ \sqrt{m}\, n^{\frac{\beta}{2}}(\Theta_n^1-\theta_o) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,PMP')$; on en déduit que

$$\sqrt{m}\, n^{\frac{\beta}{2}}\,(\Theta_n-\theta_o) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,PMP').$$

Comme $m_n \to m$, on peut aussi écrire

$$\sqrt{m_n}\, n^{\frac{\beta}{2}}\,(\Theta_n-\theta_o) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,PMP').$$

BIBLIOGRAPHIE

1 - C.C. BLAYDON, R.L. KASHYAP, K.S. FU
Applications of the stochastic approximation methods.
Adaptive, learning and pattern recognition systems ; theory and applications, edited by J.M. Mendel, K.S. Fu, Academic Press 1970, 357-392.

2 - J.R. BLUM
Multidimensional stochastic approximation methods.
Ann. Math. Stat., 1954, Vol. 25, 737-744.

3 - D.L. BURKHOLDER
On a class of stochastic approximation processes.
Ann. Math. Stat., 1956, Vol. 27, 1044-1059.

4 - P. DAUBEZE
Une extension d'un théorème de C. MACCHI.
Annales Scientifiques de l'Université de Clermont, 1975, Mathématiques, 12ème fascicule, 64-93.

5 - V. FABIAN
On asymptotic normality in stochastic approximation.
Ann. Math. Stat., 1968, Vol. 39, 1327-1332.

6 - B. FICHET
Sur l'approximation et l'optimisation stochastiques.
Thèse de docteur-ingénieur, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1970.

7 - E.G. GLADYSHEV
On stochastic approximation.
Theory of Probability and its applications, 1965, Vol. 10, 275-278.

8 - J.L. HODGES, E.L. LEHMANN
Two approximations to the Robbins-Monro process.
Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, 1956, Vol. 1, 95-104.

9 - R.L. KASHYAP, C.C. BLAYDON, K.S. FU
Stochastic approximation.
Adaptive, learning and pattern recognition systems ; theory and applications, edited by J.M. Mendel, K.S. Fu, Academic Press, 1970, 329-355.

10 - J. KIEFER, J. WOLFOWITZ
Stochastic estimation of the maximum of a regression function.
Ann. Math. Stat., 1952, Vol. 23, 462-466.

11 - H.J. KUSHNER
General convergence results for stochastic approximations via weak convergence theory.
Journ. Math. Anal. and applic., 1977, 61, 490-503.

12 - H.J. KUSHNER
Convergence of recursive adaptive and identification procedures via weak convergence theory.
IEEE Trans. Autom. Contr., dec. 1977, Vol. AC-22, N° 6, 921-930.

13 - L. LJUNG
Analysis of recursive stochastic algorithms.
IEEE Trans. Autom. Contr., aug. 1977, Vol. AC-22, N° 4, 551-575.

14 - L.LJUNG
Strong convergence of a stochastic approximation algorithm.
Ann. Stat., 1978, Vol. 6, N° 3, 680-696.

15 - J.M. MONNEZ

Approximation stochastique : le processus de Robbins-Monro ; mise à jour des résultats et quelques compléments.
Thèse de 3ème cycle, Université de Nancy I, 1975.

16 - H. ROBBINS, S. MONRO

A stochastic approximation method.
Ann. Math. Stat., 1951, Vol. 22, 400-407.

17 - H. ROBBINS, D. SIEGMUND

A convergence theorem for non-negative almost supermartingales and some applications.
Optimizing methods in Statistics, J.S. Rustagi ed., Academic Press, 1971, 233-257.

18 - L. SCHMETTERER

Multidimensional stochastic approximation.
Multivariate Analysis, II, Proc. 2nd Int. Symp., Dayton, Ohio, Academic Press, 1969, 443-460.

19 - J.H. VENTER

On Dvoretzky stochastic approximation theorems.
Ann. Math. Stat., 1966, Vol. 37, 1534-1544.