

SÉMINAIRE SAMUEL.

ALGÈBRE COMMUTATIVE

DANIEL FERRAND

Monomorphismes de schémas noethériens

Séminaire Samuel. Algèbre commutative, tome 2 (1967-1968), exp. n° 7, p. 1-25

http://www.numdam.org/item?id=SAC_1967-1968__2__A7_0

© Séminaire Samuel. Algèbre commutative
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Samuel. Algèbre commutative » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MONOMORPHISMES DE SCHEMAS NOETHERIENS

par Daniel FERRAND

Table des matières

	Pages
1. Généralités.	1
2. Epimorphismes d'anneaux locaux noethériens.	5
3. Monomorphismes de schémas.	8
4. Critères de platitude.	14
5. Critères de finitude.	19
Bibliographie.	25

-:-:-:-

Tout ce qui suit peut être considéré comme un procédé pour déduire certaines propriétés d'un morphisme de schémas d'hypothèses faites sur son morphisme diagonal.

1. Généralités.

1.1. - Sont regroupés ici plusieurs résultats techniques constamment utilisés dans la suite ; un lecteur pressé est tout invité à sauter ces préliminaires ; qu'il en retienne cependant l'idée essentielle, d'ailleurs bien connue : soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas ; supposons que le morphisme diagonal $\Delta_f : X \rightarrow X \times_Y X$ vérifie une certaine propriété ($\underline{P}$) ; pour prouver que f lui-même vérifie ($\underline{P}$), on construira un morphisme $g : Z \rightarrow X$ tel que $f \circ g$ vérifie ($\underline{P}$) ; d'après le lemme qui suit, g vérifiera ($\underline{P}$) et cela suffira, en général, pour pouvoir conclure que f lui aussi vérifie ($\underline{P}$) (le cas le plus simple, et de loin le plus utilisé, est celui où ($\underline{P}$) est la propriété d'être un isomorphisme).

LEMME 1.2. - Soit ($\underline{P}$) une propriété portant sur les morphismes de schémas, stable par composition et changement de base, et telle que tout isomorphisme vérifie ($\underline{P}$).
Soient, d'autre part, $g : Z \rightarrow Y$ et $f : Y \rightarrow X$ deux morphismes de schémas.
Alors :

(i) Si $f \circ g$ et Δ_f vérifient ($\underline{P}$), g vérifie ($\underline{P}$) ;

- (ii) Si Δ_f et Δ_g vérifient $(\underline{P})$, $\Delta_{f \circ g}$ vérifie $(\underline{P})$;
 (iii) Si $\Delta_{f \circ g}$ vérifie $(\underline{P})$, Δ_g vérifie $(\underline{P})$.

(i) g se factorise en $Z \xrightarrow{u} Z \times_X Y \xrightarrow{v} Y$; il suffit donc de montrer que u et v vérifient $(\underline{P})$. Or, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{u} & Z \times_X Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Delta_f} & Y \times_X Y \end{array}$$

est cartésien, et par hypothèse, Δ_f vérifie $(\underline{P})$; il en est donc de même de u . D'autre part, $v : Z \times_X Y \rightarrow Y$ s'identifie au morphisme déduit de $f \circ g$ par le changement de base $Y \rightarrow X$; il vérifie donc $(\underline{P})$.

(ii) Le morphisme diagonal $\Delta_{f \circ g} : Z \rightarrow Z \times_X Z$ se factorise en

$$Z \xrightarrow{\Delta_g} Z \times_Y Z \xrightarrow{w} Z \times_X Z ;$$

comme Δ_g vérifie $(\underline{P})$ par hypothèse, il suffit de montrer qu'il en est de même de w ; or cela se déduit du fait que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y Z & \xrightarrow{w} & Z \times_X Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Delta_f} & Y \times_X Y \end{array}$$

est cartésien et de l'hypothèse que Δ_f vérifie $(\underline{P})$.

(iii) Gardons les notations de (ii) ; comme Δ_f est une immersion ([2], EGA I, 5.3.9), c'est en particulier un monomorphisme ; il en est donc de même de w ; Δ_w est donc un isomorphisme, et par suite vérifie $(\underline{P})$; comme $w \circ \Delta_g = \Delta_{f \circ g}$ vérifie par hypothèse $(\underline{P})$, il en est de même de Δ_g , d'après (i).

1.3. - Soient A un anneau, et B une A -algèbre ; nous désignerons par $\mathfrak{J}_{B/A}$ l'idéal de $B \otimes_A B$, noyau de l'homomorphisme surjectif $B \otimes_A B \rightarrow B$ défini par $b \otimes c \rightarrow bc$. Rappelons qu'un système générateur de $\mathfrak{J}_{B/A}$ est formé des éléments $x \otimes 1 - 1 \otimes x$, où x parcourt un système générateur de la A -algèbre B ; on en déduit immédiatement le résultat suivant ([2], EGA IV, 1.4.3.1) :

LEMME 1.4. - Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini ; alors, le morphisme diagonal $\Delta_f : X \rightarrow X \times_Y X$ est localement de présentation finie.

Nous utiliserons un résultat plus précis :

LEMME 1.5. - Soient S un schéma quasi-compact et quasi-séparé, et $f : X \rightarrow S$ un morphisme quasi-compact et séparé. Supposons que f se factorise en

$$X \xrightarrow{h} T \xrightarrow{g} S ,$$

où h est un monomorphisme et g un morphisme affine. Alors, pour que le morphisme diagonal $\Delta_f : X \rightarrow X \times_S X$ soit une immersion fermée de présentation finie, il faut et il suffit que g se factorise en

$$T \xrightarrow{h'} T' \xrightarrow{g'} S ,$$

où g' est affine de type fini et le composé $h' \circ h : X \rightarrow T'$ un monomorphisme.

L'hypothèse faite sur f est, en particulier, vérifiée si f est quasi-affine.

Utilisant le lemme 1.2 (ii), avec la propriété d'être de présentation finie, et le lemme 1.4, on voit que la condition est nécessaire.

Montrons qu'elle est suffisante : comme g est affine, $\mathcal{B} = g_*(\mathcal{O}_T)$ est une $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente, et $T = \text{Spec}(\mathcal{B})$; d'après [2] (EGA I, 9.6.6, et IV, 1.7.9), $\mathcal{B}$ est limite inductive de ses sous- $\mathcal{O}_S$ -Algèbres quasi-cohérentes de type fini $\mathcal{B}_\lambda$; T est donc limite projective des S -schémas affines de type fini $T_\lambda = \text{Spec}(\mathcal{B}_\lambda)$, et, pour tout λ , l'immersion fermée $u : X \times_T X \rightarrow X \times_S X$ se factorise en

$$X \times_T X \xrightarrow{v_\lambda} X \times_{T_\lambda} X \xrightarrow{u_\lambda} X \times_S X ,$$

où u_λ et v_λ sont des immersions fermées ; enfin, les v_λ font de $X \times_T X$ une limite projective du système des $X \times_{T_\lambda} X$. Notons que les hypothèses faites sur S et f impliquent que $X \times_S X$ est quasi-compact ; d'autre part, Δ_f se factorise en

$$X \xrightarrow{\Delta_h} X \times_T X \xrightarrow{u} X \times_S X ,$$

et, par hypothèse, Δ_h est un isomorphisme ; u est donc une immersion fermée de présentation finie ; enfin, l'assertion sera prouvée si l'on montre qu'il existe un indice λ tel que v_λ soit un isomorphisme ; on est donc ramené au lemme suivant :

LEMME 1.6. - Soient Z_0 un schéma quasi-compact, et Z_λ une famille filtrante de sous-schémas fermés dont l'intersection (i. e. la limite projective) est Z ; si l'immersion $Z \rightarrow Z_0$ est de présentation finie, il existe un indice μ tel que $Z = Z_\lambda$ pour $\lambda \geq \mu$.

Comme Z_0 est quasi-compact, on est ramené au cas affine ; il suffit alors de constater l'évidence suivante : si un idéal $\mathfrak{a}$ de type fini d'un anneau A est réunion d'une famille filtrante d'idéaux $\mathfrak{a}_\lambda$, il existe μ tel que pour $\lambda \geq \mu$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\lambda$.

LEMME 1.7. - Soient $u : Z \rightarrow Y$ une immersion fermée, et $v : Y \rightarrow X$ un monomorphisme plat quasi-compact. Si l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_X \rightarrow (v \circ u)_* (\mathcal{O}_Z)$ est injectif, u est un isomorphisme.

En faisant le changement de base $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow X$ où $x \in v(Y)$, on se ramène au cas où v est un monomorphisme quasi-compact fidèlement plat, donc un isomorphisme ; comme $v \circ u$ est quasi-compact et séparé, "la formation de l'image directe commute aux changements de base plats", on a donc encore une injection $\mathcal{O}_X \rightarrow (v \circ u)_* (\mathcal{O}_Z)$; mais comme v est un isomorphisme, $v \circ u$ est une immersion fermée ; en vertu de l'injection précédente, l'Idéal qui la définit est nul ; c'est donc un isomorphisme.

LEMME 1.8. - Soient $g : Z \rightarrow Y$ et $f : Y \rightarrow X$ deux morphismes de schémas. Supposons que :

- (a) f est séparé ;
- (b) $f \circ g$ est un monomorphisme plat quasi-compact ;
- (c) $\mathcal{O}_Y \rightarrow g_* (\mathcal{O}_Z)$ est injectif.

Alors :

- (i) g est un monomorphisme plat quasi-compact ;
- (ii) Pour que f soit un monomorphisme, il faut et il suffit que la projection $p_1 : Y \times_X Y \rightarrow Y$ soit un morphisme plat.

En effet, g se factorise en $Z \xrightarrow{u} Z \times_X Y \xrightarrow{v} Y$; montrons que u est un isomorphisme : comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{u} & Z \times_X Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Delta_f} & Y \times_X Y \end{array}$$

est cartésien, on déduit de (a) que u est une immersion fermée ; comme v se déduit de $f \circ g$ par le changement de base $Y \rightarrow X$, v est un monomorphisme plat quasi-compact, d'après (b) ; utilisant le lemme 1.7 et l'hypothèse (c), on voit que u est un isomorphisme. Cela prouve (i).

Montrons (ii) : il est clair que la condition est nécessaire puisque, si f est

un monomorphisme, p_1 est même un isomorphisme. Réciproquement, supposons que le morphisme $p_1 : Y \times_X Y \rightarrow Y$ soit plat. Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z \times_X Y & \xrightarrow{h} & Y \times_X Y \\ \downarrow & & \downarrow p_1 \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

est cartésien, h vérifie la même propriété (c) que g . Posons $Z' = Z \times_X Y$ et $Y' = Y \times_X Y$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & Y \\ u \downarrow & & \downarrow \Delta_f \\ Z' & \xrightarrow{h} & Y' \end{array}$$

Comme, d'après ce qu'on a vu au début, u est un isomorphisme, $\mathcal{O}_{Y'} \rightarrow (h \circ u)_*(\mathcal{O}_Z)$ est injectif ; comme $h \circ u = \Delta_f \circ g$, $\mathcal{O}_{Y'} \rightarrow (\Delta_f \circ g)_*(\mathcal{O}_Z)$ est injectif, donc aussi $\mathcal{O}_{Y'} \rightarrow (\Delta_f)_*(\mathcal{O}_Y)$; mais, comme f est séparé, Δ_f est une immersion fermée ; c'est donc un isomorphisme, ce qui veut bien dire que f est un monomorphisme.

2. Epimorphismes d'anneaux locaux noethériens.

LEMME 2.1. - Soit $f : A \rightarrow B$ un épimorphisme local d'anneaux locaux. Si A est un anneau local noethérien complet, f est surjectif.

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A ; comme $A/\mathfrak{m}$ est un corps, l'épimorphisme $A/\mathfrak{m} \rightarrow B/\mathfrak{m}B$ est un isomorphisme ([4], 1.2) ; pour montrer que f est surjectif, il suffit donc de montrer que B est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$ -adique ([1], chap. III, § 2 et 9, corollaire 3 de la proposition 11). Posons $J = \bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n B$ et $I = f^{-1}(J)$; comme B/J est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$ -adique, l'homomorphisme composé $A/I \rightarrow B/IB \rightarrow B/J$ est un isomorphisme ; comme $A/I \rightarrow B/IB$ est un épimorphisme, on déduit du lemme 1.2 (i) que $B/IB \rightarrow B/J$ est un isomorphisme, donc aussi $A/I \rightarrow B/IB$; mais cela implique que $A/I^2 \rightarrow B/(I^2 B)$ est surjectif, donc que $B/(I^2 B)$ est noethérien et, par suite, séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$ -adique ; donc $J = IB = I^2 B$; mais IB est un idéal de type fini puisque A est noethérien, donc $IB = 0$ puisque B est local (lemme de Nakayama) ; donc B est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$ -adique.

Tous les résultats qui suivent sont des conséquences plus ou moins directes de ce lemme.

THÉOREME 2.2. - Soient A un anneau local noethérien, B un anneau local, et $f : A \rightarrow B$ un épimorphisme local. Alors, B est A -isomorphe à un localisé d'une A -algèbre finie.

Désignons par $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A , par A' le complété de A pour sa topologie $\mathfrak{m}$ -adique, et par $f' : A' \rightarrow B' = A' \otimes_A B$ l'épimorphisme déduit de f par changement de base. Utilisant ([4], 1.2), on voit que $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B$ est l'idéal maximal de B , et que $\mathfrak{n}' = \mathfrak{m}B'$ est l'unique idéal premier de B' tel que $f'^{-1}(\mathfrak{n}') = \mathfrak{m}A'$. L'homomorphisme $B' \rightarrow B'_n$, étant un épimorphisme, l'homomorphisme composé $A' \rightarrow B' \rightarrow B'_n$, est un épimorphisme local ; comme A' est complet, c'est une surjection (lemme 2.1) ; soit I son noyau ; comme $A'/I \rightarrow B'/IB'$ est un épimorphisme et que le composé $A'/I \rightarrow B'/IB' \rightarrow B'_n$, est un isomorphisme, $B'/IB' \rightarrow B'_n$ est un isomorphisme (lemme 1.2 (i)). Mais I est un idéal de type fini et $IB'_n = 0$, il existe donc $t' \in B' - \mathfrak{n}'$ tel que $IB'_{t'} = 0$, donc tel que $B'_{t'} \rightarrow B'_n$ soit injectif, et par suite bijectif puisque le composé $B' \rightarrow B'_{t'} \rightarrow B'_n$ est surjectif. L'élément t' de $B' = A' \otimes_A B$ peut s'écrire sous la forme $\sum_i a'_i \otimes t_i$, où $t_i \in B$ et $a'_i \in A'$; soit C la sous- A -algèbre de type fini de B engendrée par les t_i ; comme $A \rightarrow A'$ est plat, l'homomorphisme $C' = A' \otimes_A C \rightarrow B'$ est injectif ; de plus, il est clair que $t' \in C'$. Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & C & \longrightarrow & B & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 A' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & B' \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & C'_{t'} & \longrightarrow & B'_{t'} \xrightarrow{\sim} B'_n
 \end{array}$$

Comme $A' \rightarrow B'_{t'}$ est surjectif, $C'_{t'} \rightarrow B'_{t'}$ est surjectif, donc bijectif, d'après ce qui précède. Comme $C \rightarrow C'_{t'}$ est plat et $B \rightarrow B'_n$ fidèlement plat, $B \rightarrow C$ est plat ([1], chap. I, § 3, prop. 7) ; mais $A \rightarrow B$ est un épimorphisme, $C \rightarrow B$ est donc un épimorphisme plat (lemme 1.2 (iii)) ; on en déduit que, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{n} \cap C$, $C_{\mathfrak{p}} \rightarrow B$ est un isomorphisme ([4], 2.4) ; on a donc montré que B est isomorphe au localisé $C_{\mathfrak{p}}$ d'une A -algèbre de type fini C .

Comme $A \rightarrow C_{\mathfrak{p}}$ est un épimorphisme, $\text{Spec}(C_{\mathfrak{p}}) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est injective ; en particulier, l'idéal premier $\mathfrak{p}$ est minimal parmi ceux qui contiennent $\mathfrak{m}C$; d'autre part, comme le composé $A/\mathfrak{m} \rightarrow C/\mathfrak{p} \rightarrow B/\mathfrak{n}$ est un isomorphisme, l'injection $C/\mathfrak{p} \rightarrow B/\mathfrak{n}$ est en fait un isomorphisme, donc $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de C , et

par suite est "isolé dans sa fibre" C/mC ; le théorème principal de Zariski ([2], EGA III, 4.4.7, ou [5]) montre qu'il existe une sous- A -algèbre finie $D \subset C$ telle que, si $q = p \cap D$, $D_q \rightarrow C_p$ soit un isomorphisme ; donc $D_q \rightarrow B$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque 2.3. - En raisonnant comme dans [2] (EGA IV, 18.4.6), on montrerait que B est isomorphe au localisé d'une A -algèbre finie monogène, et aussi au quotient d'une A -algèbre strictement essentiellement étale (loc. cit. 18.6.2).

COROLLAIRE 2.4. - Soient A un anneau local noethérien, B un anneau local, et $f : A \rightarrow B$ un épimorphisme local. Alors :

- (i) B est noethérien, et $\dim(B) \leq \dim(A)$;
- (ii) Si f est injectif et A universellement caténaire ([2], EGA IV, 5.6.2), $\dim(B) = \dim(A)$;
- (iii) Si A est hensélien ([2], EGA IV, 18.5.8), f est surjectif.

(i) et (iii) sont des conséquences immédiates du théorème 2.2.

Démontrons (ii) : soit p un idéal premier minimal de A tel que

$$\dim(A/p) = \dim(A) ;$$

comme f est injectif, $p = f^{-1}(q)$ pour un idéal premier minimal q de B ;
comme $\dim(B) \geq \dim(B/q)$, il suffit, en vertu de (i), de montrer que

$$\dim(B/q) = \dim(A/p) ;$$

on est donc ramené au cas intègre, et c'est alors une conséquence du théorème 2.2 et de [2] (EGA IV, 5.6.10).

PROPOSITION 2.5. - Soient A un anneau local noethérien, B un anneau local, et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme local. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) B est une A -algèbre essentiellement de type fini (i. e. est isomorphe à un localisé d'une A -algèbre de type fini) ;
- (ii) $B \otimes_A B$ est un anneau noethérien ;
- (iii) L'idéal $\mathfrak{J}_{B/A}$ (1.3) est de type fini.

Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont claires.

Montrons que (iii) $\Rightarrow$ (i) : utilisant le lemme 1.5 avec $X = T = \text{Spec}(B)$ et $S = \text{Spec}(A)$, on voit qu'il existe une A -algèbre de type fini C , et un épimorphisme de A -algèbres $C \rightarrow B$; soient n l'idéal maximal de B , et p sa trace sur C ; $C_p \rightarrow B$ est un épimorphisme local, et C_p est noethérien. D'après le

théorème 2.2, B est isomorphe au localisé d'une C_p -algèbre finie ; on en déduit immédiatement que B est isomorphe à un localisé d'une A -algèbre de type fini.

PROPOSITION 2.6. - Soient A un anneau local noethérien d'idéal maximal m , B un anneau local, et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme local. Pour que B soit isomorphe à un localisé d'une A -algèbre finie, il faut et il suffit que $\mathfrak{J}_{B/A}$ soit un idéal de type fini et que B/mB soit une A/m -algèbre finie.

Les conditions sont évidemment nécessaires.

Montrons qu'elles sont suffisantes : d'après la proposition 2.5, il existe une A -algèbre de type fini C et un idéal premier p de C tels que B soit A -isomorphe à C_p ; comme, par hypothèse, $(C/mC)_p = B/mB$ est une A/m -algèbre finie, l'idéal premier p de C est isolé dans sa fibre C/mC : il est d'abord clair que p/mC est un idéal premier minimal de C/mC ; pour voir qu'il est maximal, il suffit de remarquer que le corps des fractions $k(p)$ de C/p étant de rang fini sur A/m , est en particulier entier sur A/m ; l'anneau intègre C/p est donc entier sur le corps A/m ; c'est donc un corps. D'après le théorème principal de Zariski ([2], EGA III, 4.4.7, ou [5]), il existe une A -algèbre finie $D \subset C$ telle que, si $q = p \cap D$, $D_q \rightarrow C_p$ soit un isomorphisme ; d'où le résultat.

Remarque 2.7. - Ce résultat est à rapprocher de la forme locale du théorème principal de Zariski ; il est plus précis que ce dernier dans la mesure où les conditions sont nécessaires et suffisantes, mais il a le défaut majeur de n'être valable que sous des hypothèses noethériennes, alors que le théorème de Zariski est maintenant démontré sous des hypothèses tout-à-fait générales (cf. [2], EGA IV, 18.12.13, ou [5]).

3. Monomorphismes de schémas.

Les résultats présentés ici sont des "globalisations" de ceux du paragraphe précédent ; c'est surtout le critère (2.6) qui servira dans les démonstrations.

3.1. - Rappelons d'abord quelques définitions : soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme quasi-compact et séparé ; on sait ([2], EGA I, 9.2.2) que $f_*(\mathcal{O}_X)$ est une $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente ; par suite ([2], EGA II, 6.3.4), la fermeture intégrale $\mathcal{A}$ de $\mathcal{O}_S$ dans $f_*(\mathcal{O}_X)$ est aussi une $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente, et, pour tout ouvert affine U de S , $\Gamma(U, \mathcal{A})$ est la fermeture intégrale de $\Gamma(U, \mathcal{O}_S)$ dans $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$; le S -schéma entier $S' = \text{Spec}(\mathcal{A})$ s'appelle la fermeture intégrale de S dans X , et f se factorise en $X \rightarrow S' \rightarrow S$.

Rappelons aussi qu'un morphisme $f : X \rightarrow S$ est dit plat en un point $x \in X$, si l'homomorphisme $\mathcal{O}_{S,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est plat ; f est dit plat, s'il l'est en tout point.

THÉOREME 3.2. - Soient S un schéma localement noethérien, et $f : X \rightarrow S$ un morphisme quasi-compact satisfaisant les deux propriétés suivantes :

- (i) Pour tout $s \in S$, le morphisme fibre $X_s = X \times_S \text{Spec}(k(s)) \rightarrow \text{Spec}(k(s))$ est entier ;
- (ii) Le morphisme diagonal $\Delta_f : X \rightarrow X \times_S X$ est une immersion fermée de présentation finie.

Alors, si S' désigne la fermeture intégrale de S dans X , le morphisme canonique $j : X \rightarrow S'$ est un monomorphisme plat quasi-compact.

De plus, les conditions (i) et (ii) imposées à f sont vérifiées dans les trois cas suivants :

- (a) f est un monomorphisme ;
- (b) La (première) projection $p_1 : X \times_S X \rightarrow X$ est un morphisme fini ;
- (c) Le morphisme diagonal $\Delta_f : X \rightarrow X \times_S X$ est une immersion à la fois ouverte et fermée.

3.3. - Démontrons d'abord la dernière assertion : il est clair qu'un monomorphisme vérifie (i) et (ii).

Soit maintenant un morphisme quasi-compact $f : X \rightarrow S$ tel que sa première projection p_1 soit un morphisme fini. Pour prouver (i), on est ramené au cas où $S = \text{Spec}(k(s))$, et il suffit de montrer que f est fini ; mais, comme on est sur un corps, f est alors fidèlement plat et quasi-compact, et cela est conséquence de [2] (EGA IV, 2.7.1 (xv)). Montrons (ii) : le morphisme composé $p_1 \circ \Delta_f$ est l'identité ; de plus, comme p_1 est fini, Δ_{p_1} est une immersion fermée de présentation finie (lemme 1.4) ; il suffit alors d'appliquer le lemme 1.2 (i) en prenant, pour $(\underline{P})$, la propriété d'être une immersion fermée de présentation finie.

La démonstration du fait que (c) implique (i) et (ii) est un peu plus subtile et est laissée au lecteur.

LEMME 3.4. - Sous les hypothèses du théorème, f vérifie la propriété :

- (i) bis Pour tout $s \in S$, le morphisme fibre $X_s \rightarrow \text{Spec}(k(s))$ est fini.

On peut supposer que $S = \text{Spec}(k(s))$, et il faut montrer que f est fini. Or, d'après (i), X est affine, et son anneau $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est une k -algèbre

entière (ici $k = k(s)$). D'après l'hypothèse (ii) et le lemme 1.5 avec $X = T$, il existe une k -algèbre finie A' et un épimorphisme de k -algèbres $A' \rightarrow A$; mais A' est un anneau artinien, donc $A' \rightarrow A$ est surjectif ([7], prop. 7).

LEMME 3.5. - Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme quasi-compact et séparé, s un point de S , $T = \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$, $p : T \rightarrow S$ le morphisme canonique, et

$$g = f_{(T)} : Y = X \times_S T \rightarrow T$$

le morphisme déduit de f par changement de base. Alors, si S' désigne la fermeture intégrale de S dans X , $S' \times_S T$ s'identifie à la fermeture intégrale de T dans Y .

On peut se ramener au cas où f est affine : en effet, comme f est quasi-compact et séparé, $f_*(\mathcal{O}_X)$ est une $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente, donc, si $X' = \text{Spec}(f_*(\mathcal{O}_X))$, le morphisme canonique $f' : X' \rightarrow S$ est affine ; comme p est plat, $X' \times_S T$ s'identifie à $\text{Spec}(g_*(\mathcal{O}_Y))$ ([2], EGA IV, 21.12.3) ; enfin, par définition (3.1), la fermeture intégrale de S dans X (resp. de T dans Y) est la fermeture intégrale de S dans X' (resp. de T dans $X' \times_S T$) ; on peut donc supposer que $X = X'$, i. e. que f est affine.

On peut supposer de plus que S est affine : en effet, soit U un ouvert affine de S contenant s ; p se factorise en $T \rightarrow U \rightarrow S$, et il suffit d'appliquer [2] (EGA II, 6.3.4). Dans le cas affine, ce n'est autre que [1] (chap. V, § 1, prop. 16).

Pour démontrer le théorème 3.2, on va d'abord se ramener au cas où $S = \text{Spec}(A)$, où A est un anneau local noethérien hensélien.

Comme f est quasi-compact et $S' \rightarrow S$ entier, donc en particulier séparé, $j : X \rightarrow S'$ est quasi-compact ; il reste donc à montrer que c'est un monomorphisme plat ; il suffit, pour cela, de montrer que, pour tout $x \in X$,

(a) $\mathcal{O}_{S',j(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est un isomorphisme, et

(b) $j^{-1}(j(x)) = \{x\}$ ([6], 1.1).

En vertu du lemme 3.5, on peut supposer que S est un schéma local de point fermé $s = f(x)$.

Posons $A = \mathcal{O}_{S,s}$, et soit $T = \text{Spec}({}^h A)$ le spectre du hensélisé de A . La $\mathcal{O}_S$ -Algèbre $f_*(\mathcal{O}_X)$ est quasi-cohérente, donc de la forme $\tilde{B}$ où B est une A -algèbre ; soit C la fermeture intégrale de A dans B , de sorte que $S' = \text{Spec}(C)$.

Comme $A \rightarrow {}^h A$ est plat, si on désigne par $g : Y = X \times_S T \rightarrow T$ le morphisme déduit de f par changement de base, $g_*(\mathcal{O}_Y)$ est isomorphe au faisceau de ${}^h A$ -Algèbre associé à $B \otimes_A {}^h A$; en outre, comme le morphisme $T \rightarrow S$ est normal ([2], EGA IV, 18.6.9 (ii)), $C \otimes_A {}^h A$ s'identifie à la fermeture intégrale de ${}^h A$ dans $B \otimes_A {}^h A$ ([2], EGA IV, 6.14.4). On est donc ramené à prouver ceci : soient $S = \text{Spec}(A)$ le spectre d'un anneau local noethérien hensélien A , $f : X \rightarrow S$ un morphisme quasi-compact satisfaisant les propriétés (i) et (ii) du théorème 3.2, $j : X \rightarrow S'$ le morphisme canonique de X dans la fermeture intégrale S' de S dans X , et x un point de X tel que $f(x)$ soit le point fermé de S . Alors, $\mathcal{O}_{S', j(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ est un isomorphisme, et $j^{-1}(j(x)) = \{x\}$.

Posons $Y = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, x})$; on va montrer que le morphisme $Y \rightarrow X$ est un isomorphisme de Y sur une partie ouverte et fermée de X : comme $Y \rightarrow X$ est un monomorphisme, le morphisme composé $Y \rightarrow X \rightarrow S$ satisfait les propriétés (i) et (ii) du théorème 3.2 ; d'après le lemme 3.4 et la proposition 2.6, $\mathcal{O}_{X, x}$ est isomorphe au localisé d'une A -algèbre finie ; mais comme A est hensélien, une A -algèbre finie est un produit d'anneaux locaux ; $Y \rightarrow S$ est donc un morphisme fini. Comme S est noethérien, $Y \rightarrow S$ est de présentation finie ; comme, par hypothèse, Δ_f est de présentation finie, on déduit du lemme 1.2 (i) que $Y \rightarrow X$ est lui aussi de présentation finie ; comme c'est évidemment un monomorphisme plat, on déduit de [2] (EGA IV, 2.4.6) que c'est une immersion ouverte ; il reste donc à montrer que $Y \rightarrow X$ est un morphisme fermé ; or, comme $Y \rightarrow S$ est un morphisme fini, c'est en particulier un morphisme universellement fermé (COHEN-SEIDENBERG) ; comme, par hypothèse, Δ_f est une immersion fermée, c'est aussi un morphisme universellement fermé ; utilisant encore le lemme 1.2 (i), on en conclut que $Y \rightarrow X$ est fermé ; comme Y est affine, on a donc montré que $Y \rightarrow X$ identifie Y à une partie ouverte, fermée et affine de X .

Posons $B = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et $Z = \text{Spec}(B)$; comme Y est ouvert et fermé dans X , B est isomorphe au produit d'anneaux $\Gamma(Y, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(X - Y, \mathcal{O}_X)$; comme de plus Y est affine, $Y = \text{Spec}(\Gamma(Y, \mathcal{O}_X))$; on voit donc que le morphisme composé $Y \rightarrow X \rightarrow Z$ est un isomorphisme de Y sur une partie ouverte et fermée de Z ; il existe donc un idempotent $t \in B$ tel que $B_t \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ soit un isomorphisme. Comme $t^2 = t$, t est entier sur A ; donc t est dans la fermeture intégrale C de A dans B ; d'après [1] (chap. V, § 1, prop. 16), C_t est intégralement fermé dans B_t ; considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & B \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & C_t & \longrightarrow & B_t \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X, x} \end{array}$$

On a vu que $A \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est un homomorphisme fini ; il en est donc de même de $C_t \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$; mais $B_t \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est un isomorphisme, et C_t est intégralement fermé dans B_t ; donc $C_t \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est un isomorphisme. Par définition, $S' = \text{Spec}(C)$, désignons par V l'ouvert (et fermé) $\text{Spec}(C_t)$ de S' ; d'après ce qu'on a vu plus haut, $j^{-1}(V)$ n'est autre que la partie ouverte et fermée Y de X ; on en déduit, en particulier, que $j^{-1}(j(x)) = \{x\}$; cela achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE 3.6. - Soient X et S deux schémas intègres, et $f : X \rightarrow S$ un morphisme quasi-compact birationnel ; supposons que S soit localement noethérien et normal. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est plat et séparé ;
- (ii) f est un monomorphisme ;
- (iii) La première projection $p_1 : X \times_S X \rightarrow X$ est un morphisme plat, et f est séparé ;
- (iv) La première projection $p_1 : X \times_S X \rightarrow X$ est un morphisme fini ;
- (v) Le morphisme diagonal $\Delta_f : X \rightarrow X \times_S X$ est une immersion fermée de présentation finie, et, pour tout $s \in S$, le morphisme $X_s \rightarrow \text{Spec}(k(s))$ est entier.

D'après le théorème 3.2, (ii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) et (v) $\Rightarrow$ (i), puisque S est normal ; d'autre part, il est évident que (i) implique (iii) ; il suffit donc de montrer que (iii) implique (ii), mais cela a été fait en 1.8.

COROLLAIRE 3.7. - Soient S un schéma noethérien, et $f : X \rightarrow S$ un morphisme quasi-compact universellement fermé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est fini ;
- (ii) La première projection $p_1 : X \times_S X \rightarrow X$ est un morphisme fini ;
- (iii) Le morphisme diagonal est une immersion fermée de présentation finie, et, pour tout $s \in S$, $X_s = X \times_S \text{Spec}(k(s))$ est affine.

Il est clair que (i) implique (ii) et (iii). Réciproquement, les hypothèses (ii) ou (iii) permettent d'appliquer le théorème 3.2 : cela a déjà été vu pour (ii) ; pour (iii), il suffit de montrer que les morphismes fibres $X_s \rightarrow \text{Spec}(k(s))$ sont entiers ; or, ils sont affines et universellement fermés, ils sont donc entiers d'après [2] (EGA IV, 18.12.8). Utilisant le théorème 3.2, on voit que f se factorise en

$$X \xrightarrow{j} S' \xrightarrow{u} S ,$$

où j est un monomorphisme plat et u un morphisme entier, et, en particulier,

affine. D'après le lemme 1.5, u se factorise donc en $S' \xrightarrow{j'} T \xrightarrow{v} S$, où v est fini et $j' \circ j : X \rightarrow T$ un monomorphisme ; comme v est en particulier séparé, Δ_v est universellement fermé ; comme par hypothèse, f est universellement fermé, on voit, en utilisant le lemme 1.2 (i) avec, pour $(\underline{P})$, la propriété d'être universellement fermé, que $X \rightarrow T$ est un monomorphisme universellement fermé ; la conclusion résulte donc de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.8. - Soient S un schéma localement noethérien, et $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas.

(i) Pour que f soit une immersion fermée, il faut et il suffit que f soit un monomorphisme universellement fermé ;

(ii) Si, de plus, S est réduit, pour que f soit une immersion ouverte, il faut et il suffit que f soit un monomorphisme universellement ouvert.

Il est clair que les conditions sont nécessaires. Pour montrer qu'elles sont suffisantes, on utilisera le lemme élémentaire suivant :

LEMME 3.8.1. - Soient S un schéma local, et $f : X \rightarrow S$ un morphisme injectif. Supposons que f est, soit fermé, soit ouvert et surjectif. Alors X est un schéma local.

Dans les deux cas, il existe un point (et un seul) $x_0 \in X$ tel que $s_0 = f(x_0)$ soit le point fermé de S . Soient x un point de X , et $Y = \{\bar{x}\}$ son adhérence ; on va montrer que $x_0 \in Y$: si f est fermé, $f(Y)$ est fermé dans S , donc $s_0 \in f(Y)$, et cela résulte de l'injectivité de f ; si f est ouvert, $f(X - Y)$ est un ouvert de S , distinct de S puisque f est injectif, donc $s_0 \notin f(X - Y)$, donc $x_0 \notin X - Y$. Autrement dit, x_0 est adhérent à tout point de X ; on en déduit d'abord que tout ouvert affine de X contenant x_0 est égal à X , donc que X est affine ; comme tout point de X est une générisation de x_0 , X est même local de point fermé x_0 .

Dans les deux cas envisagés, comme f est injectif, f établit un homéomorphisme de X sur le sous-espace $f(X)$ de S , qui est respectivement fermé ou ouvert. En vertu de [2] (EGA I, 4.2.2), il suffit de montrer que, pour tout $x \in X$, si $s = f(x)$, $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif dans le cas (i) et bijectif dans le cas (ii). Or, soient $S' = \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$, et $f' : X' = X \times_S S' \rightarrow S'$ le monomorphisme déduit de f par changement de base ; d'après le lemme 3.8.1, X' est un schéma local, et par suite s'identifie à $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$; de plus, dans le cas (ii), f' est surjectif ; comme $\mathcal{O}_{S,s}$ est réduit, on en déduit que $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif ; il suffit donc de montrer que dans les deux cas f' est une immersion fermée.

Or, soit S'' le spectre du hensélisé de $\mathcal{O}_{S,s}$; par le changement de base $S'' \rightarrow S'$, on obtient un monomorphisme $f'' : X'' = X \times_S S'' \rightarrow S''$; comme $S'' \rightarrow S'$ est fidèlement plat, il suffit de montrer que f'' est une immersion fermée ; mais, d'après le lemme 3.8.1, X'' est un schéma local ; c'est donc une conséquence du corollaire 2.4 (iii).

COROLLAIRE 3.9. - Un monomorphisme quasi-compact $f : X \rightarrow S$ est quasi-affine dans les cas suivants :

- (i) f est plat ;
- (ii) f est de type fini ;
- (iii) S est localement noethérien.

Si f est plat, cela a été démontré dans [6] (prop. 1.5) ; si f est de type fini, cela est une conséquence immédiate de [2] (EGA IV, 18.12.12) ; enfin, si S est localement noethérien, c'est une conséquence de (i) et du théorème 3.2.

Nous ignorons si un monomorphisme quasi-compact est toujours quasi-affine.

4. Critères de platitude.

Indiquons d'abord, sans démonstration, un critère de platitude trop particulier pour être utilisable.

PROPOSITION 4.1. - Soient S un schéma réduit localement noethérien et universellement caténaire, et $f : X \rightarrow S$ un monomorphisme affine. Pour que f soit plat, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :

- (a) $f(X)$ est stable par générisation dans S ;
- (b) L'image par f de tout point maximal de X est un point maximal de S ;
- (c) f est plat en tout point $x \in X$ tel que $\dim(\mathcal{O}_{S,f(x)}) \leq 1$.

On peut montrer qu'aucune des hypothèses de cette proposition ne peut être supprimée ; le point faible de ce critère est la condition (c) ; il faut la remplacer par la condition analogue portant sur les localisés de profondeur ≤ 1 .

PROPOSITION 4.2. - Soient S un schéma localement noethérien, et $f : X \rightarrow S$ un monomorphisme. Pour que f soit plat, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) L'image par f de tout point maximal de X est un point maximal de S ;
- (ii) f est plat en tout point $x \in X$ tel que $\text{prof}(\mathcal{O}_{S,f(x)}) \leq 1$.

Il est clair qu'un morphisme plat vérifie les conditions (i) et (ii). Réciproquement, on peut supposer que S est un schéma local dont le point fermé est dans $f(X)$, et il faut montrer qu'alors f est un isomorphisme ; soit S' le spectre du hensélisé de l'anneau local $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$; comme $S' \rightarrow S$ est fidèlement plat, il suffit de montrer que $f' : X' = X \times_S S' \rightarrow S'$ est un isomorphisme ; soit X'' le spectre de l'anneau local de X' en l'unique point de X' dont l'image est le point fermé de S' ; d'après le lemme 1.2 (i), il suffit même de prouver que le morphisme composé $f'' : X'' \rightarrow X' \rightarrow S'$ est un isomorphisme ; mais, en vertu du corollaire 2.4 (iii), f'' est une immersion fermée et, en utilisant [2] (EGA IV, 2.3.7 et 6.3.1), on voit que f'' vérifie les propriétés (i) et (ii) de l'énoncé ; on est donc ramené à démontrer ceci :

LEMME 4.2.1. - Soient A un anneau local noethérien, et α un idéal de A contenu dans un idéal premier minimal de A ; si $\alpha_p = 0$ pour tout idéal premier $p \supset \alpha$ tel que $\text{prof}(A_p) \leq 1$, alors $\alpha = 0$.

Posons $b = \text{Ann}_A(\alpha)$; il faut montrer que $b = A$. Comme tout idéal premier minimal a un annulateur non nul, $b \neq 0$. Si $b \neq A$, $\alpha + b \neq A$, puisque A est local ; soit p un idéal premier de A minimal parmi ceux qui contiennent $\alpha + b$; comme $\alpha \cdot b = 0$, on déduit du théorème de Hartshorne ([3], et [2], EGA IV, 5.10.7, appliqué à $X = \text{Spec}(A_p)$ et $Y = \{pA_p\}$) que $\text{prof}(A_p) \leq 1$; d'après l'hypothèse, on a donc $\alpha_p = 0$, i. e. $p \not\subset b$, ce qui est contraire au choix de p ; donc $b = A$ et $\alpha = 0$.

COROLLAIRE 4.3. - Soient S un schéma intègre localement noethérien, X un schéma intègre, et $f : X \rightarrow S$ un monomorphisme birationnel. Désignons par T l'ensemble des $t \in S$ tels que le morphisme

$$X \times_S \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,t}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{S,t})$$

soit plat. Alors, pour que T soit ouvert, il faut et il suffit que T contienne un ouvert non vide.

Comme T contient toujours le point générique de S , il est non vide ; la condition est donc nécessaire.

Pour montrer qu'elle est suffisante, on peut supposer que S est affine d'anneau A ; si T contient un ouvert, il contient en particulier un ouvert de la forme $D(a)$ où a est un élément non nul de A ; comme A est intègre, a est A -régulier ; soit F le fermé de S , adhérence de l'ensemble fini $\text{Ass}(A/aA) \cap (S - T)$. On va montrer que $F = S - T$, ce qui montrera bien que T est ouvert ; il est

d'abord clair que $F \cap T = \emptyset$, puisque T est visiblement stable par génératisation; soit U le schéma induit par S sur l'ouvert $S - F$; il faut montrer que le monomorphisme $f^{-1}(U) \rightarrow U$ induit par f est plat; en vertu de la proposition 4.2, il suffit de montrer que tous les points $s \in U$ tels que $\text{prof}(\mathcal{O}_{S,s}) \leq 1$ sont dans T ; or, c'est évident si $s \in D(a)$ et si $s \in V(a)$, l'idéal premier p de A correspondant à s contient a et est tel que $\text{prof}(A_p) = 1$; donc

$$p \in \text{Ass}(A/aA) ;$$

comme, par hypothèse, $p \in U$, cela implique que p est dans T .

Nous ignorons si, sous les hypothèses de ce corollaire, l'ensemble T est toujours ouvert; comme cette propriété jouera un rôle capital au paragraphe suivant, il nous faut exhiber des conditions sur S pour qu'il en soit ainsi.

DÉFINITION 4.4. - Soient A un anneau local, A' son hensélisé, A'' son hensélisé strict ([2], EGA IV, 18.6 et 18.8), et m' et m'' les idéaux maximaux de A' et A'' .

On dira que A est quasi-unibranche, si $\text{Spec}(A') - \{m'\}$ est connexe. On dira que A est géométriquement quasi-unibranche, si $\text{Spec}(A'') - \{m''\}$ est connexe.

On dira qu'un schéma S est quasi-unibranche (resp. géométriquement quasi-unibranche) si, pour tout $s \in S$, l'anneau local $\mathcal{O}_{S,s}$ est quasi-unibranche (resp. géométriquement quasi-unibranche).

Il est clair que S est quasi-unibranche (resp. géométriquement quasi-unibranche), si, et seulement si, S_{red} l'est. Si S est réduit à un point, il est quasi-unibranche, puisque l'ensemble vide est connexe. Si un anneau local A est unibranche ([2], EGA 0_{IV}, 23.2.1), il est quasi-unibranche (resp. géométriquement quasi-unibranche) en vertu de [2] (EGA IV, 18.6.12).

Un anneau local noethérien A de dimension 1 est unibranche, si, et seulement si, il est quasi-unibranche, puisque le complémentaire du point fermé de $\text{Spec}(A')$ est un ensemble fini discret.

Soit A un anneau local noethérien tel que $\text{prof}(A) \geq 2$; alors A est géométriquement quasi-unibranche. En effet, comme $A \rightarrow A''$ est plat, $\text{prof}(A'') \geq 2$, et il suffit d'appliquer le théorème de Hartshorne ([2], EGA IV, 5.10.7).

Le résultat suivant justifie partiellement l'introduction de ces notions dans l'étude des monomorphismes.

PROPOSITION 4.5. - Soit S un schéma localement noethérien réduit et quasi-unibranche. Alors, pour qu'un monomorphisme $f : X \rightarrow S$ soit plat, (il faut et)

il suffit que l'image par f de tout point maximal de X soit un point maximal de S .

Remarque 4.6. - Il est possible que la réciproque soit vraie ; pour la démontrer, il faudrait pouvoir résoudre la question suivante : si A est un anneau local noethérien et A' son hensélisé, quels sont les épimorphismes $A' \rightarrow B'$ qui "proviennent" d'un épimorphisme local $A \rightarrow B$? Nous ignorons même si l'assertion suivante est vraie : soit A un anneau local noethérien intègre de dimension 1 tel que tout épimorphisme local injectif $A \rightarrow B$ soit un isomorphisme. Alors A est unibranche.

Démonstration de la proposition 4.5. - On peut supposer que S est un schéma local dont le point fermé est dans $f(X)$, et que f est plat en tout point de $X - f^{-1}(s)$; passant au hensélisé, on peut même supposer que S est le spectre d'un anneau local hensélien, et il faut montrer que f est alors un isomorphisme ; en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 4.2, on est ramené à prouver ceci : soit A un anneau local noethérien tel que l'ouvert U complémentaire du point fermé de $\text{Spec}(A)$ soit connexe ; si α est un idéal de A tel que $V(\alpha) \cap U \neq \emptyset$ et tel que $\alpha_p = 0$ pour $p \in V(\alpha) \cap U$, alors $\alpha = 0$.

Il suffit de montrer que $U' = V(\alpha) \cap U$ est ouvert dans U , puisque U est connexe. Or, soit $b = \text{Ann}_A(\alpha)$, et $U'' = V(b) \cap U$; comme $\alpha.b = 0$, $U = U' \cup U''$; d'autre part, si $p \in U'$, $\alpha_p = 0$, donc $p \notin U''$; on en déduit que $U' \cap U'' = \emptyset$, donc que $U' = U - U''$ est ouvert.

PROPOSITION 4.7. - Soient A, B deux anneaux locaux noethériens tels que $\dim(A) \geq 1$, et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme local tel que le morphisme correspondant $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ soit réduit. Alors :

- (i) Pour que A soit géométriquement quasi-unibranche, il faut et il suffit que B le soit ;
- (ii) Supposons que le corps résiduel de B soit une extension primaire de celui de A ; alors A est quasi-unibranche si, et seulement si, B l'est.

L'hypothèse " $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est réduit" signifie que f est plat et que, pour tout idéal premier p de A et toute extension k de $k(p)$, l'anneau $B \otimes_A k$ est réduit ([2], EGA, 4.6 et 6.8). D'autre part, une extension $k \rightarrow k'$ est dite primaire, si k est la plus grande extension algébrique séparable contenue dans k' .

Nous ne démontrons pas cette proposition ; c'est une conséquence assez facile d'un délicat théorème démontré dans [2] (EGA IV, 18.9.7).

COROLLAIRE 4.8. - Soit A un anneau noethérien tel que $\text{Spec}(A)$ soit quasi-unibranche (resp. géométriquement quasi-unibranche). Alors, $\text{Spec}(A[T])$ est quasi-unibranche (resp. géométriquement quasi-unibranche).

L'assertion respée se déduit immédiatement de la proposition 4.7 (i). Pour démontrer l'autre, il faut remarquer qu'on peut supposer que A est local réduit et qu'il suffit de montrer que les localisés B de $A[T]$, tels que $A \rightarrow B$ soit un homomorphisme local et que $\text{prof}(B) \leq 1$, sont quasi-unibranches ; or, soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A , et $k = A/\mathfrak{m}$ son corps résiduel ; on sait que

$$\text{prof}(B) = \text{prof}(A) + \text{prof}(B/\mathfrak{m}B) ;$$

donc, si $\text{prof}(B/\mathfrak{m}B) = 1$, $\text{prof}(A) = 0$, donc A est un corps puisque A est réduit ; mais alors B est un localisé d'un anneau de polynômes sur un corps, donc un anneau intégralement clos et, en particulier, un anneau quasi-unibranche. Si $\text{prof}(B/\mathfrak{m}B) = 0$, $B/\mathfrak{m}B$, qui est un localisé de $k[T]$, est un corps, donc est isomorphe à $k(T)$; comme c'est une extension primaire de k , on peut appliquer la proposition 4.7 (ii).

PROPOSITION 4.9. - Pour un anneau noethérien intègre A , soit $(\underline{U}(A))$ la propriété suivante : " $\text{Spec}(A)$ possède un ouvert non vide qui est un schéma géométriquement quasi-unibranche".

(i) Soit A un anneau intègre noethérien vérifiant $(\underline{U}(A))$; alors il en est de même de tout anneau de fractions $S^{-1}A$ et de toute A -algèbre de type fini B intègre et contenant A .

(ii) Soit A un anneau intègre noethérien de corps des fractions K , tel qu'il existe une A -algèbre finie $B \subset K$ telle que $\text{Spec}(B)$ soit géométriquement unibranche. Alors A vérifie $(\underline{U}(A))$. En particulier, un anneau local noethérien intègre et un anneau japonais vérifient $(\underline{U})$.

Démontrons (i) : soit B une A -algèbre de type fini intègre et contenant A ; quitte à se restreindre à un ouvert de $\text{Spec}(A)$, on peut supposer que $\text{Spec}(A)$ est géométriquement quasi-unibranche, et qu'il existe des éléments $t_i \in B$, algébriquement indépendants sur A , tels que B soit une $A[t_1, \dots, t_n]$ -algèbre finie ([1], chap. V, § 3, corollaire 1 du théorème 1) ; utilisant le corollaire 4.8, on est donc ramené à prouver l'assertion lorsque de plus B est finie sur A . Soient K le corps des fractions de A , L celui de B , K' la fermeture séparable de K dans L , et $\Lambda' = B \cap K'$. Montrons d'abord que Λ' vérifie $(\underline{U})$; comme K' est une extension finie séparable de K , on peut, en se restreignant à un ouvert convenable de $\text{Spec}(A)$, supposer que Λ' est un revêtement étale de A ;

il suffit alors d'appliquer la proposition 4.7 (i). Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A')$ est un morphisme fini radiciel et surjectif, donc un homéomorphisme universel.

L'assertion générale de (ii) est à peu près triviale ; celle qui concerne un anneau local noethérien intègre est une conséquence immédiate de [2] (EGA 0_{IV}, 23.2.5).

Remarque 4.10. - Compte tenu de la proposition 4.5, si A est un anneau noethérien intègre vérifiant $(\underline{U})$, et si $f : A \rightarrow B$ est un épimorphisme injectif où B est intègre, alors f est "génériquement" plat ; cette propriété simplifie beaucoup le critère de finitude du paragraphe suivant. Nous ne connaissons pas d'anneaux noethériens intègres qui ne vérifient pas $(\underline{U})$; le contre-exemple le plus simple serait celui d'un anneau noethérien intègre A tel que $\dim(A) = 1$, possédant une infinité d'idéaux premiers $\mathfrak{m}$ tels que $A_{\mathfrak{m}}$ ne soit pas géométriquement unibranche.

5. Critères de finitude.

THÉOREME 5.1. - Soient S un schéma noethérien, $f : X \rightarrow S$ un morphisme quasi-compact, $(X_i)_{i \in I}$ la famille des composantes irréductibles de X . Pour tout i , désignons par S_i le sous-schéma fermé intègre de S , image fermée de X_i par f , et par $f_i : X_i \rightarrow S_i$ le morphisme déduit de f .

Pour que f se factorise en

$$X \xrightarrow{j} T \xrightarrow{u} S ,$$

où j est un monomorphisme plat quasi-compact et u un morphisme fini, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) Pour tout $s \in S$, le morphisme fibre $X_s = X \times_S \text{Spec}(k(s)) \rightarrow \text{Spec}(k(s))$ est entier ;

(ii) Le morphisme diagonal $\Delta_f : X \rightarrow X \times_S X$ est une immersion fermée de présentation finie ;

(iii) Les composantes irréductibles X_i sont en nombre fini ;

(iv) Pour tout i , il existe un ouvert non vide U_i de S_i tel que la restriction de f_i à $f_i^{-1}(U_i)$ soit un morphisme plat.

De plus, la condition (iv) est conséquence de (i) et (ii) si, pour tout i , S_i possède un ouvert non vide sur lequel il induit un schéma quasi-unibranche (définition 4.4).

Démontrons d'abord la dernière assertion : on peut supposer que X et S sont intègres et f dominant ; si f vérifie (i) et (ii), d'après le théorème 3.2 et le lemme 1.5, f se factorise en $X \rightarrow T \rightarrow S$, où $X \rightarrow T$ est un monomorphisme et $T \rightarrow S$ un morphisme fini qu'on peut supposer dominant ; d'après la proposition 4.9 (i), en se restreignant à un ouvert assez petit de S , on peut supposer que T est géométriquement quasi-unibranch et que $T \rightarrow S$ est plat ; mais, d'après la proposition 4.5, le monomorphisme $X \rightarrow T$ est alors plat ; d'où le résultat.

Démontrons que les conditions sont nécessaires : si f se factorise par un monomorphisme plat et un morphisme fini, ses fibres sont des morphismes finis, et en particulier entiers, d'où (i) ; la condition (ii) est conséquence du lemme 1.5. Comme u est fini et S noethérien, T est noethérien ; en particulier, T n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles ; comme j est un monomorphisme plat, on en déduit que X a un nombre fini de composantes irréductibles, d'où (iii). Pour tout i , soit T_i l'image fermée de X_i par j ; comme j est un monomorphisme plat quasi-compact, X_i est isomorphe à $X \times_T T_i$ (lemme 1.7), donc $X_i \rightarrow T_i$ est plat ; comme f_i se factorise en $X_i \rightarrow T_i \rightarrow S_i$, où $T_i \rightarrow S_i$ est fini dominant, il est clair qu'au voisinage du point générique de S_i , $T_i \rightarrow S_i$ est plat, donc aussi f_i .

5.2. - Pour démontrer que les conditions sont suffisantes, on procèdera par étapes. Fixons d'abord les notations.

D'après le théorème 3.2, les hypothèses (i) et (ii) impliquent que f se factorise en

$$X \rightarrow S' \rightarrow S,$$

où $j : X \rightarrow S'$ est un monomorphisme plat quasi-compact et $v : S' \rightarrow S$ un morphisme entier. La $\mathcal{O}_S$ -Algèbre $v_*(\mathcal{O}_{S'})$ est donc quasi-cohérente et entière ; en particulier, elle est réunion de la famille filtrante croissante de ses sous- $\mathcal{O}_S$ -Algèbres quasi-cohérentes de type fini $\mathcal{S}_\lambda$; si $S_\lambda = \text{Spec}(\mathcal{S}_\lambda)$, v se factorise en $S' \rightarrow S_\lambda \rightarrow S$, où $u_\lambda : S_\lambda \rightarrow S$ est fini, et les morphismes entiers surjectifs $v_\lambda : S' \rightarrow S_\lambda$ font de S' une limite projective du système des S_λ . On va montrer qu'il existe un indice λ tel que le morphisme composé

$$j_\lambda = v_\lambda \circ j : X \rightarrow S' \rightarrow S_\lambda$$

soit un monomorphisme plat quasi-compact.

1° Réduction au cas où f est un monomorphisme : D'après le lemme 1.5, il existe un indice λ tel que j_λ soit un monomorphisme ; il suffit donc de prouver que j_λ vérifie (iv) ; c'est une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME 5.2.1. - Soient X, Y , et Z trois schémas intègres, $j : X \rightarrow Y$ un monomorphisme dominant, et $u : Y \rightarrow Z$ un morphisme fini surjectif. Supposons que Z soit noethérien et que le composé $f = u \circ j : X \rightarrow Z$ soit plat. Alors il existe un ouvert non vide W de Z tel que le monomorphisme $f^{-1}(W) \rightarrow u^{-1}(W)$ déduit de j soit plat.

Comme u est fini et que la question est locale sur Z , on peut supposer que Y et Z sont affines, soit $Z = \text{Spec}(A)$ et $Y = \text{Spec}(B)$; A est donc un anneau intègre noethérien, et B une A -algèbre finie intègre contenant A ; soient K et L les corps des fractions de A et B respectivement, K' la clôture séparable de K dans L , et $A' = B \cap K'$. Comme A est noethérien, le schéma $Z' = \text{Spec}(A')$ est fini sur A , et u se factorise en $Y \rightarrow Z' \rightarrow Z$. Comme K' est une extension séparable de K , on peut, en se restreignant à un ouvert W de Z , supposer que $Z' \rightarrow Z$ est non ramifié; par suite, le morphisme diagonal de $Z' \rightarrow Z$ est une immersion ouverte ([2], EGA IV, 17.4.2), donc un morphisme plat; en appliquant le lemme 1.2 (i) aux morphismes $X \rightarrow Z'$ et $Z' \rightarrow Z$, on voit que $X \rightarrow Z'$ est plat. D'autre part, on vérifie tout-de-suite que $Y \rightarrow Z'$ est radiciel. Quitte à remplacer Z par Z' , on peut donc supposer que $u : Y \rightarrow Z$ est un morphisme fini radiciel et surjectif, donc un homéomorphisme universel. Montrons qu'alors $X \rightarrow Y$ est plat. Par un changement de base appropriée, on peut supposer que Z est le spectre d'un anneau local noethérien hensélien dont le point fermé est l'image d'un point $x \in X$. Comme $Y \rightarrow Z$ est un homéomorphisme fini, Y est un schéma local dont l'anneau est lui aussi hensélien. D'autre part, comme $X \rightarrow Y$ est un monomorphisme, il suffit de montrer que le monomorphisme composé

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow X \rightarrow Y$$

est un isomorphisme. Bref, on peut se ramener au cas où X, Y et Z sont des schémas locaux. Notons qu'alors le composé $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ est même fidèlement plat, donc surjectif; comme $Y \rightarrow Z$ est bijectif, $X \rightarrow Y$ est surjectif; mais, comme Y est le spectre d'un anneau local hensélien noethérien et $X \rightarrow Y$ un monomorphisme, $X \rightarrow Y$ est une immersion fermée (corollaire 2.4 (iii)) surjective; comme Y est réduit, c'est un isomorphisme; d'où le résultat.

2° Réduction au cas où les S_i sont les composantes irréductibles de S : Remarquons d'abord que $j : X \rightarrow S'$ établit une bijection entre les points maximaux de X et ceux de S' ; comme j est plat, il transforme point maximal en point maximal, comme c'est un monomorphisme, c'est une injection; enfin, comme par définition de S' , $\mathcal{O}_{S'} \rightarrow j_*(\mathcal{O}_X)$ est injectif, tout point maximal de S' est dans $j(X)$ (localiser en ce point maximal, et utiliser le fait que la formation de

l'image directe commute aux changements de base plats).

Il suffit donc de montrer que, pour un λ assez grand, $v_\lambda : S' \rightarrow S_\lambda$ établit une bijection entre les points maximaux de S' et ceux de S_λ ; or, comme S est quasi-compact, on peut supposer que S est affine, et il reste à prouver ceci :

LEMME 5.2.2. - Soient A un anneau, et B une A -algèbre n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux. Il existe une A -algèbre de type fini $C \subset B$ telle que l'application $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(C)$ établisse une bijection entre les idéaux premiers minimaux de B et ceux de C .

Comme les idéaux premiers minimaux q_i de B sont en nombre fini, il existe, d'après le lemme d'évitement, une famille finie (t_i) d'éléments de B tels que $t_i \in q_i$ et $t_i \notin q_j$ pour $j \neq i$; il suffit de prendre pour C la sous- A -algèbre de B engendrée par les t_i ; en effet, comme $C \subset B$, tout idéal premier minimal de C se relève à B ; d'autre part, pour tout i , $C \cap q_i$ est un idéal premier minimal, sinon il contiendrait un idéal premier minimal, donc un $C \cap q_j$ pour un $j \neq i$, ce qui s'oppose au choix des t_i .

3° Démonstration dans le cas où X est intègre : Remarquons qu'on n'utilise pas ici le fait que S' est la fermeture intégrale de S dans X , mais seulement les deux propriétés suivantes : $j : X \rightarrow S'$ est un monomorphisme plat quasi-compact, et $S' \rightarrow S$ est entier.

D'après le 1° et le 2°, on peut supposer que f est un monomorphisme et que S est intègre. Pour tout λ , soit U_λ l'ensemble des points $t \in S_\lambda$ tels que le morphisme

$$X \times_{S_\lambda} \text{Spec}(\mathcal{O}_{S_\lambda, t}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{S_\lambda, t})$$

déduit de $j_\lambda : X \rightarrow S_\lambda$ par changement de base soit plat. Comme, d'après le lemme 5.2.1, le monomorphisme j_λ vérifie (iv), on déduit du corollaire 4.3 que U_λ est ouvert dans S_λ . Comme $u_\lambda : S_\lambda \rightarrow S$ est fini, c'est en particulier un morphisme fermé, donc $F_\lambda = u_\lambda(S_\lambda - U_\lambda)$ est un fermé de S pour tout λ . D'autre part, pour $\mu \geq \lambda$, le morphisme composé $X \times_{S_\lambda} U_\lambda \rightarrow S_\mu \times_{S_\lambda} U_\lambda \rightarrow U_\lambda$ est plat ; en utilisant le lemme 1.8 (i), on en déduit que $F_\mu \subset F_\lambda$, donc que la famille (F_λ) est filtrante décroissante. Montrons que $\bigcap_\lambda F_\lambda = \emptyset$: soient $s \in S$, $A = \mathcal{O}_{S, s}$ et $T = \text{Spec}(A)$; $S' \times_S T$ est un schéma affine dont l'anneau est une A -algèbre entière contenue dans le corps des fractions de A . En utilisant [2] (EGA 0_{IV}, 23.2.5), on voit que, pour λ assez grand, le morphisme $S' \times_S T \rightarrow S_\lambda \times_S T$ est radiciel. Or, on a le lemme suivant :

LEMME 5.2.3. - Soient X, Y et Z trois schémas intègres, Z étant noethérien, $j : X \rightarrow Y$ un monomorphisme plat, et $v : Y \rightarrow Z$ un morphisme entier bijectif, tels que le composé $v \circ j : X \rightarrow Z$ soit un monomorphisme. Alors $v \circ j$ est plat.

On se ramène comme d'habitude au cas où Z est un schéma local dont le point fermé est dans $v \circ j(X)$, et il faut voir qu'alors $v \circ j$ est un isomorphisme. Mais, comme v est injectif et entier, Y est alors lui aussi un schéma local, et son point fermé se trouve dans $j(X)$; comme j est plat, il est fidèlement plat, et comme c'est un monomorphisme, c'est un isomorphisme. $v \circ j$ est donc un monomorphisme entier, donc un isomorphisme (proposition 3.8).

Appliquant ce lemme au morphisme composé $X \times_S T \rightarrow S' \times_S T \rightarrow S_\lambda \times_S T$, on voit que c'est un monomorphisme plat; en particulier, $u_\lambda^{-1}(s) \subset U_\lambda$, donc $s \notin F_\lambda$, ce qui prouve bien que l'intersection des F_λ est vide. Comme S est quasi-compact, il existe λ tel que $F_\lambda = \emptyset$, ce qui veut dire que $U_\lambda = S_\lambda$, donc que j_λ est plat.

4° Réduction au cas où, pour tout i , $f_i : X_i \rightarrow S_i$ est plat : Pour tout i , soient S'_i et $(S_\lambda)_i$ les images fermées de X_i par j et j_λ respectivement. Il est clair que S'_i est limite projective du système des S_i -schémas finis $(S_\lambda)_i$; comme $j : X \rightarrow S'$ est un monomorphisme plat quasi-compact, $X_i \rightarrow S'_i \times_S X$ est un isomorphisme (lemme 1.7); donc $X_i \rightarrow S'_i$ est un monomorphisme plat quasi-compact; enfin, $S'_i \rightarrow S_i$ est évidemment entier; utilisant le 3° et le fait que les X_i sont en nombre fini, on voit donc qu'il existe λ tel que, pour tout i , $X_i \rightarrow (S_\lambda)_i$ soit plat; il suffit de remplacer S par S_λ .

Remarquons que cela implique, en particulier, que les X_i sont noethériens ([6], 1.2), donc que l'espace topologique X , réunion d'un nombre fini d'espaces noethériens, est noethérien.

5° Fin de la démonstration : Supposons effectuées toutes les réductions précédentes : $f : X \rightarrow S$ est donc un monomorphisme quasi-compact tel que, pour tout i , $f_i : X_i \rightarrow S_i$ soit plat, et les S_i sont exactement les composantes irréductibles de S ; enfin, $\mathcal{O}_S \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ est injectif.

Montrons qu'on peut se ramener au cas où, pour tout i , l'immersion fermée $w_i : X_i \rightarrow X \times_S S_i$ est un isomorphisme.

Il suffit de montrer que w_i est de présentation finie; en effet, supposons ce point acquis; w_i se factorise en

$$X_i \rightarrow X \times_S S'_i \rightarrow X \times_{S_\lambda} (S_\lambda)_i \rightarrow X \times_S S_i,$$

où la première flèche est un isomorphisme puisque $X \rightarrow S'$ est un monomorphisme plat quasi-compact (lemme 1.7), et les deux autres des immersions fermées ; il suffit alors d'appliquer le lemme 1.6.

Pour prouver que w_i est de présentation finie, on va montrer que c'est une immersion ouverte quasi-compacte ([2], EGA IV, 1.6.2). La quasi-compactité provient de ce que c'est une immersion fermée. D'autre part, w_i est plat, puisque le composé $X_i \rightarrow X \times_S S_i \rightarrow S_i$ est plat par hypothèse et que $X \times_S S_i \rightarrow S_i$ est un monomorphisme (lemme 1.2 (i)) ; $w_i(X_i)$ est donc un fermé stable par génératisation de $X \times_S S_i$; mais cet espace est noethérien, puisqu'il s'identifie à un fermé de X ; donc $w_i(X_i)$ est ouvert dans $X \times_S S_i$ (regarder les composantes irréductibles qui ne rencontrent pas $w_i(X_i)$). Enfin, un monomorphisme plat quasi-compact dont l'image est un ouvert est une immersion ouverte ; d'où le résultat.

On peut donc supposer que, pour tout i , $X \times_S S_i \rightarrow S_i$ est plat ; il ne reste plus qu'à démontrer le lemme suivant :

LEMME 5.2.4. - Soient S un schéma noethérien, et $f : X \rightarrow S$ un monomorphisme quasi-compact tel que $\mathcal{O}_S \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ soit injectif. Supposons que, en désignant par S_i les schémas intègres induits par S sur ses composantes irréductibles, les morphismes $X \times_S S_i \rightarrow S_i$ soient plats. Alors f est plat.

On se ramène immédiatement au cas où S est un schéma local dont le point fermé se trouve dans $f(X)$; montrons que l'application f est fermée ; soit Y un sous-schéma fermé de X ; pour montrer que $f(Y)$ est fermé, il suffit de montrer que, pour tout i , $f(Y) \cap S_i$ est fermé ; cet ensemble est l'image du morphisme composé $Y \times_S S_i \rightarrow X \times_S S_i \rightarrow S_i$; or, la première flèche est une immersion fermée, et $X \times_S S_i \rightarrow S_i$ est un isomorphisme puisque c'est un monomorphisme quasi-compact fidèlement plat. D'où ce qu'on veut. En vertu du lemme 3.8.1, X est un schéma local ; soient B son anneau, et A celui de S . Il faut montrer ceci : soient A un anneau noethérien, p_i ses idéaux premiers minimaux, et $g : A \rightarrow B$ un homomorphisme injectif ; si, pour tout i , $A/p_i \rightarrow B/(p_i B)$ est un isomorphisme, alors g est un isomorphisme. Il suffit de montrer que g est surjectif ; désignons par M le A -module B/A ; d'après l'hypothèse, $M = p_i M$ pour tout i ; donc $M = p_1 p_2 \dots p_n M$. Mais, dans un anneau noethérien, le produit des idéaux premiers minimaux est un idéal nilpotent ; donc $M = 0$, et g est surjectif.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. I à VI. - Paris, Hermann, 1961-1964 (Act. scient. et ind., 1290, 1293, 1308 ; Bourbaki, 27, 28, 30).
 - [2] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - [EGA] Eléments de géométrie algébrique, Chap. I à IV. - Paris, Presses Universitaires de France, 1960-1967 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32).
 - [3] HARTSHORNE (Robin). - Complete intersections and connectedness, Amer. J. of Math., t. 84, 1962, p. 497-508.
 - [4] LAZARD (Daniel). - Epimorphismes plats, Séminaire P. Samuel : Algèbre commutative, 1967/68, n° 4, 12 p.
 - [5] PESKINE (Christian). - Une généralisation du "Main theorem" de Zariski, Bull. Sc. math., 2e série, t. 90, 1966, p. 119-127.
 - [6] RAYNAUD (Michel). - Un critère d'effectivité de descente, Séminaire P. Samuel: Algèbre commutative, 1967/68, n° 5, 22 p.
 - [7] ROBY (Norbert). - Diverses caractérisations des épimorphismes, Séminaire P. Samuel : Algèbre commutative, 1967/68, n° 3, 12 p.
-