

Représentations Cristallines et F -Cristaux : le Cas d'un Corps Résiduel Imparfait.

OLIVIER BRINON (*) - FABIEN TRIHAN (**)

1. Introduction

Soit K un corps de valuation discrète complet, de caractéristique 0, à corps résiduel k de caractéristique p . On note \mathcal{O}_K l'anneau de ses entiers. Soient ϖ une uniformisante de K , \bar{K} une clôture algébrique de K et $\mathcal{G}_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$.

Supposons k parfait. Soient $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k , σ l'endomorphisme de Frobenius sur W et $\mathfrak{S} = W[[u]]$. On prolonge σ à \mathfrak{S} en posant $\sigma(u) = u^p$. On note $E(u) \in W[u]$ le polynôme minimal de ϖ sur $K_0 = W[p^{-1}]$, et $\mathbf{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi)$ la catégorie dont les objets sont les \mathfrak{S} -modules libres de rang fini \mathfrak{M} munis d'un opérateur de Frobenius $\sigma^*\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ de conoyau tué par une puissance de $E(u)$, et dont les morphismes sont les applications \mathfrak{S} -linéaires compatibles aux Frobenius.

À la suite des travaux de Breuil (cf [4], [5]), Kisin prouve (entre autres) les résultats suivants.

THÉORÈME 1.1 ([15, Theorem 0.1]). *Il existe un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des représentations cristallines de \mathcal{G}_K à poids de Hodge-Tate positifs dans la catégorie $\mathbf{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$.*

Il donne en outre une caractérisation de l'image essentielle.

(*) Indirizzo dell'A.: Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue J.B. Clément 93430 Villetaneuse, France

E-mail: brinon@math.univ-paris13.fr

(**) Indirizzo dell'A.: School of Mathematical Sciences, University of Nottingham, University Park, Nottingham, NG7 2RD, United Kingdom

E-mail: fabien.trihan@nottingham.ac.uk

THÉORÈME 1.2 ([15, Theorem 0.3]). *Toute représentation cristalline à poids de Hodge-Tate dans $\{0, 1\}$ provient d'un groupe p -divisible sur \mathcal{O}_K .*

Il donne aussi une classification des groupes p -divisibles à isogénies près et des schémas en groupes finis et plats sur \mathcal{O}_K en termes \mathfrak{S} -modules munis d'une structure de Frobenius.

Signalons au passage la conséquence suivante du théorème 1.2 :

COROLLAIRE 1.3 (cf [6, Corollaire 5.3.4]). *Soient A une variété abélienne définie sur K et $V_p(A)$ son module de Tate tensorisé par \mathbf{Q}_p . Alors A a bonne réduction sur \mathcal{O}_K si et seulement si $V_p(A)$ est une représentation cristalline.*

Le but de cette note est d'expliquer comment on peut déduire des résultats de Kisin des énoncés analogues lorsque le corps résiduel k est seulement supposé avoir une p -base finie. La théorie des représentations cristallines a été décrite dans [7], et fait l'objet de rappels dans la section 3. On construit des anneaux et des foncteurs analogues à ceux de Kisin. Dans la plupart des cas, les propriétés de ces derniers peuvent se prouver en plongeant simplement K dans un corps \mathbb{K} de même uniformisante, mais de corps résiduel parfait. Cela est possible grâce au fait qu'il n'y a pas d'hypothèse sur le corps résiduel dans les travaux de Kedlaya (cf [13], [14]), qui sont utilisés par Kisin, ainsi que par le fait que la théorie de Dieudonné sur un corps admettant une p -base finie «marche» aussi bien que dans le cas parfait en vertu d'un résultat de de Jong (cf [8, Theorem 4.1.1]). Les théorèmes 1.1 et 1.2 se généralisent alors en le corollaire 4.18 et le théorème 6.10 respectivement. Remarquons que pour le corollaire 4.18, la catégorie $\mathbf{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi)$ doit être remplacée par la catégorie $\mathbf{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi, \nabla)$ (cf définition 4.16) : la réduction modulo u des objets est munie d'une connexion, c'est là un phénomène nouveau par rapport au cas où k est parfait.

La rédaction de ce travail a eu lieu à la Graduate School of Mathematical Sciences à l'Université de Tokyo : les auteurs remercient T. Saito de son accueil. Le premier auteur a en outre bénéficié du soutien du Marie Curie Research Training Network, dans le cadre du Réseau Européen de Géométrie Algébrique et d'Arithmétique, tandis que le deuxième auteur a bénéficié du soutien du FNRS. Le deuxième auteur souhaite enfin remercier Mark Kisin pour avoir bien voulu répondre à quelques questions concernant son article.

2. Notations

On suppose que k admet une p -base finie. On note v la valuation de \overline{K} , normalisée par $v(p) = 1$. On note C le complété de \overline{K} pour la topologie p -adique. C'est un corps algébriquement clos. La valuation v et l'action de \mathcal{G}_K s'étendent à C par continuité. Pour tout sous-corps F de C , on note \mathcal{O}_F l'anneau des entiers de F et $\mathcal{G}_F = \text{Gal}(\overline{K}/F)$ si $K \subseteq F \subseteq \overline{K}$.

Choisissons $t_1, \dots, t_d \in \mathcal{O}_K$ des relèvements d'une p -base de k . On note $e \in \mathbf{N}_{>0}$ l'indice de ramification absolu de K : on a $v(\varpi) = 1/e$.

Soit \mathcal{O}_{K_0} le sous-anneau de \mathcal{O}_K tel que :

- (1) \mathcal{O}_{K_0} est un anneau de Cohen pour k ;
- (2) $t_1, \dots, t_d \in \mathcal{O}_{K_0}$.

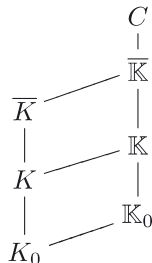
On pose $K_0 = \mathcal{O}_{K_0}[p^{-1}]$: on a alors $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_{K_0}[\varpi]$ et le polynôme minimal de ϖ sur K_0 est un polynôme d'Eisenstein $E(u) \in \mathcal{O}_{K_0}[u]$ de degré e . On se donne $\tilde{\varpi} = (\varpi^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{O}_K^{\mathbf{N}}$ une suite cohérente de racines p^n -ièmes de ϖ : on a $\varpi^{(0)} = \varpi$ et $(\varpi^{(n+1)})^p = \varpi^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On pose $K_\infty = K[\varpi^{(n)}]_{n \in \mathbf{N}}$. C'est une extension totalement ramifiée de K .

On se fixe un relèvement $\sigma : \mathcal{O}_{K_0} \rightarrow \mathcal{O}_{K_0}$ du Frobenius de k . D'après [3, Corollaire 1.2.7 (ii)], cela équivaut à la donnée d'éléments $x_1, \dots, x_d \in \mathcal{O}_{K_0}$ tel que $x_i \equiv t_i^p \pmod{p\mathcal{O}_{K_0}}$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$.

On note $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_0}$ le séparé complété, pour la topologie p -adique, de la limite inductive du système

$$\mathcal{O}_{K_0} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{K_0} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{K_0} \xrightarrow{\sigma} \dots$$

C'est un anneau isomorphe à l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans la clôture radicielle k^{rad} de k . Quitte à changer \overline{K} , on peut supposer que $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_0} \subseteq C$. On dispose de l'inclusion $i_\sigma : \mathcal{O}_{K_0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{K}_0}$, de sorte que l'application σ sur \mathcal{O}_{K_0} est induite par le Frobenius des vecteurs de Witt sur $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_0}$ (qu'on note encore σ). On pose $\mathbb{K}_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{K}_0}[p^{-1}]$ et $\mathbb{K} = K\mathbb{K}_0$. Ce sont des corps de valuation discrète complets de caractéristique 0, de mêmes uniformisantes que K_0 et K respectivement, et de corps résiduel k^{rad} parfait. On note $\overline{\mathbb{K}}$ la clôture algébrique de \mathbb{K} dans C . On a donc la situation suivante



On note $\widehat{\Omega}$ le module des différentielles continues de \mathcal{O}_{K_0} relativement à \mathbf{Z} :

$$\widehat{\Omega} = \varprojlim_{n>0} \Omega^1_{\mathcal{O}_{K_0}/\mathbf{Z}}/p^n \Omega^1_{\mathcal{O}_{K_0}/\mathbf{Z}}.$$

et d: $\mathcal{O}_{K_0} \rightarrow \widehat{\Omega}$ la différentielle canonique. Le \mathcal{O}_{K_0} -module $\widehat{\Omega}$ est libre de base $(dt_i)_{1 \leq i \leq d}$.

On note $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$ la catégorie des représentations p -adiques de \mathcal{G}_K , dont les objets sont les \mathbf{Q}_p -espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une action linéaire et continue de \mathcal{G}_K , et dont les morphismes sont les applications \mathbf{Q}_p -linéaires \mathcal{G}_K -équivariantes. On note $\mathbf{Rep}_{\text{cris}}(\mathcal{G}_K)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$ constituée par les représentations cristallines, et $\mathbf{Rep}_{\text{cris}}^{\text{BT}}(\mathcal{G}_K)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$ constituée par les représentations cristallines à poids de Hodge-Tate dans $\{0, 1\}$ (cf. section 3).

Si R est un anneau, on note $\mathbf{BT}(R)$ la catégorie des (p) -groupes de Barsotti-Tate (= groupes p -divisibles) sur $\text{Spec}(R)$. Rappelons que ses objets sont les ind-schémas en groupes G sur $\text{Spec}(R)$ tels que G est de p -torsion, p -divisible et $G(1) = \text{Ker}(p: G \rightarrow G)$ est fini localement libre, et que ses morphismes sont les homomorphismes de groupes sur $\text{Spec}(R)$. Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et $G \in \mathbf{BT}(X)$, on note $G(n)$ le noyau de la multiplication par p^n sur G . C'est un schéma en groupes fini et localement libre sur X de rang p^{nh} où h est une fonction localement constante sur $\text{Spec}(R)$ (la hauteur de G).

Si $G \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$, on note $T_p(G) = \text{Hom}_{\mathbf{BT}(\overline{\mathcal{O}_K})}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, G \otimes_{\mathcal{O}_K} \overline{\mathcal{O}_K})$ son module de Tate. C'est un \mathbf{Z}_p -module libre de rang h (où h est la hauteur de G), muni d'une action linéaire continue de \mathcal{G}_K . On définit ainsi un foncteur de $\mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$ dans la catégorie des \mathbf{Z}_p -modules munis d'une action linéaire continue de \mathcal{G}_K . Comme \mathcal{O}_K est un anneau de valuation discrète dont le corps des fractions est de caractéristique 0, ce foncteur est pleinement fidèle (cf. [19, Corollary 1 of Theorem 4]).

On pose alors $V_p(G) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(G)$: on a $V_p(G) \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$. D'après ce qui précède, on obtient ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$V_p: \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_K).$$

3. Rappels sur les représentations cristallines.

DÉFINITION 3.1. Un (φ, ∇) -module filtré sur K relativement à K_0 est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie D muni des structures supplémentaires suivantes :

(1) un opérateur de Frobenius $\varphi_D: D \rightarrow D$ qui est σ -linéaire et dont le linéarisé $\sigma^*D \rightarrow D$ est un isomorphisme;

(2) une connexion intégrable quasi-nilpotente $\nabla: D \rightarrow D \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ pour laquelle le Frobenius est horizontal;

(3) une filtration décroissante séparée exhaustive $\text{Fil}^\bullet D_K$ sur $D_K := K \otimes_{K_0} D$ telle qu'on a la transversalité de Griffith pour ∇ .

Les (φ, ∇) -modules filtrés sur K relativement à K_0 forment une catégorie additive \mathbf{Q}_p -linéaire qu'on dénote par $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$.

REMARQUE 3.2. Cette catégorie ne dépend pas du choix de σ (*i.e.* de K_0), parce qu'elle est équivalente à la catégorie des F -isocristaux sur k dont l'évaluation en un $(\mathcal{O}_K, p\mathcal{O}_K)$ est munie d'une filtration décroissante séparée exhaustive.

DÉFINITION 3.3. Soit $D \in \mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$. On dit que D est *effectif* si $\text{Fil}^0 D_K = D_K$. On note $\mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{eff}}(\varphi, \nabla)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ constituée des (φ, ∇) -modules filtrés sur K relativement à K_0 qui sont effectifs.

On désigne par $\mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{BT}}(\varphi, \nabla)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{eff}}(\varphi, \nabla)$ constituée des (φ, ∇) -modules D tels que $\text{Fil}^2 D_K = 0$.

3.4. Si $D \in \mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ est de dimension 1, on a $D = K_0 x$ et il existe $\alpha \in K_0$ et $i \in \mathbf{Z}$ tels que $\varphi(x) = \alpha x$, $\text{Fil}^i D_K = D_K$ et $\text{Fil}^{i+1} D_K = 0$. On pose $t_N(D) = v(\alpha)$ (cela ne dépend pas du choix de x) et $t_H(D) = i$. Si $D \in \mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ est de dimension h , on a une structure de (φ, ∇) -module filtré sur K relativement à K_0 sur le K_0 espace vectoriel $\det(D) = \bigwedge^h D$, et on pose $t_N(D) = t_N(\det(D))$ et $t_H(D) = t_H(\det(D))$. On définit ainsi des fonctions additives sur la catégorie $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$.

DÉFINITION 3.5. Soit $D \in \mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$. On dit que D est *faiblement admissible* si

- (1) $t_N(D) = t_H(D)$;
- (2) $t_N(D') \geq t_H(D')$ pour tout sous-objet D' de D dans $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$.

On note $\mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{fa}}(\varphi, \nabla)$ (resp. $\mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{fa,eff}}(\varphi, \nabla)$, resp. $\mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{fa,BT}}(\varphi, \nabla)$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ (resp. $\mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{eff}}(\varphi, \nabla)$, resp. $\mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{BT}}(\varphi, \nabla)$) constituée des (φ, ∇) -modules filtrés sur K relativement à K_0 faiblement admissibles.

3.6. Rappelons la construction des anneaux A_{cris} et B_{cris} , et l'équivalence de catégories entre la catégorie des représentations cristallines de \mathcal{G}_K et celle des F -isocristaux filtrés sur K faiblement admissibles.

On note \mathcal{R} la limite projective du système

$$\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \dots$$

les morphismes de transition étant donnés par le Frobenius. On a une bijection (compatible à la multiplication)

$$\{x = (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}_C^{\mathbb{N}}, (\forall n \in \mathbb{N}) (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\} \rightarrow \mathcal{R}$$

donnée par la réduction modulo p . Par exemple, la suite $\tilde{\omega} = (\varpi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ définit un élément de \mathcal{R} . L'anneau \mathcal{R} est une F_p -algèbre parfaite, valuée par $v_{\mathcal{R}}(x) = v(x^{(0)})$ et munie d'une action de \mathcal{G}_K .

On dispose d'un homomorphisme surjectif et \mathcal{G}_K -équivariant d'anneaux

$$\begin{aligned} \theta: W(\mathcal{R}) &\rightarrow \mathcal{O}_C \\ (x_0, x_1, \dots) &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n. \end{aligned}$$

admettant pour noyau l'idéal principal engendré par $\xi = [\tilde{p}] - p$ où $\tilde{p} \in \mathcal{R}$ est tel que $\tilde{p}^{(0)} = p$. Il induit un homomorphisme de \mathcal{O}_{K_0} -algèbres

$$1 \otimes \theta: \mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}} W(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{O}_C.$$

L'anneau A_{cris} est alors le séparé complété, pour la topologie p -adique, de l'enveloppe à puissances divisées de $\mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}} W(\mathcal{R})$ relativement à l'idéal $\text{Ker}(1 \otimes \theta)$, compatibles aux puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par p . C'est une \mathcal{O}_{K_0} -algèbre munie d'une action de \mathcal{G}_K , d'un opérateur de Frobenius φ et d'une connexion intégrable quasi-nilpotente $\nabla: A_{\text{cris}} \rightarrow A_{\text{cris}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ pour laquelle φ est horizontal. Le Frobenius et la connexion commutent à l'action de \mathcal{G}_K . En outre, $1 \otimes \theta$ induit un homomorphisme surjectif $\theta: A_{\text{cris}} \rightarrow \mathcal{O}_C$ dont le noyau admet des puissances divisées. Enfin, on dispose de $t = \log([\varepsilon]) \in A_{\text{cris}}$ où $\varepsilon \in \mathcal{R}$ est tel que $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$. On a $\varphi(t) = t^p$ et $\nabla(t) = 0$.

On pose $B_{\text{cris}} = A_{\text{cris}}[t^{-1}]$, c'est une K_0 -algèbre munie d'une action de \mathcal{G}_K , d'un opérateur de Frobenius φ et d'une connexion $\nabla: B_{\text{cris}} \rightarrow B_{\text{cris}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ pour laquelle φ est horizontal.

On note A_{inf} le séparé complété de $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} W(\mathcal{R})$ pour la topologie $(1 \otimes \theta)^{-1}(p\mathcal{O}_C)$ -adique. L'homomorphisme $1 \otimes \theta$ induit un homomorphisme de K -algèbres $\theta: A_{\text{inf}}[p^{-1}] \rightarrow C$ et on note B_{dR}^+ le séparé complété de $A_{\text{inf}}[p^{-1}]$ pour la topologie $\text{Ker}(\theta)$ -adique. C'est une K -algèbre (et même une

\bar{K} -algèbre) munie d'une action de \mathcal{G}_K , et d'une connexion intégrable $\nabla: \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \rightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \hat{\Omega}$ qui commute à l'action de \mathcal{G}_K . Si $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ désigne le sous-anneau des sections horizontales, on a $t \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}[[u_1, \dots, u_d]]$ où $u_i = t_i - [\tilde{t}_i]$ avec $\tilde{t}_i \in \mathcal{R}$ défini par $\tilde{t}_i^{(0)} = t_i$. On pose $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[t^{-1}]$ que l'on filtre par $\mathrm{Fil}^i \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = t^i \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[\frac{u_1}{t}, \dots, \frac{u_d}{t}]$. L'action de \mathcal{G}_K et la connexion s'étendent à \mathbf{B}_{dR} (on a la transversalité de Griffith).

On a une inclusion $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subseteq \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ compatible à l'action de \mathcal{G}_K et à la connexion. Il induit un homomorphisme de K -algèbres $K \otimes_{K_0} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. Ce dernier est injectif, et on a $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\mathcal{G}_K} = K_0$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_K} = K$.

3.7. Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$, on pose

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K}.$$

D'après ce qui précède, $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est un K_0 -espace vectoriel muni d'un opérateur de Frobenius σ -linéaire et d'une connexion intégrable quasi-nilpotente, et $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est muni d'une filtration (décroissante séparée exhaustive) et d'une connexion intégrable qui vérifie la transversalité de Griffith. En outre, on a une application K -linéaire injective

$$K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V).$$

Cela munit $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ d'une structure de (φ, ∇) -module filtré sur K relativement à K_0 (en munissant $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)_K$ de la filtration induite par celle de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$).

On dispose des applications de périodes

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathrm{cris}}(V): \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) &\rightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \\ \alpha_{\mathrm{dR}}(V): \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) &\rightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \end{aligned}$$

dont on montre qu'elles sont toujours injectives ([7, Proposition 3.22]), de sorte que $\dim_{K_0}(\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)) \leq \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ et $\dim_K(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)) \leq \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$. On dit que V est *cristalline* (resp. de *de Rham*) lorsque $\alpha_{\mathrm{cris}}(V)$ (resp. $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)$) est un isomorphisme (i.e. lorsque $\dim_{K_0}(\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)) = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ (resp. $\dim_K(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)) = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$). On peut montrer que la notion de représentation cristalline ne dépend pas des choix de K_0 et de σ ([7, § 3.6]). La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$ dont les objets sont les représentations cristallines (resp. de de Rham) est notée $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{G}_K)$). Si V est une représentation cristalline, alors V est de de Rham et l'homomorphisme $K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est un isomorphisme ([7, Proposition 3.30]).

On peut en outre montrer ([7, Proposition 4.27 & Corollaire 4.37]) que si

$V \in \mathbf{Rep}_{\text{cris}}(\mathcal{G}_K)$, alors $D_{\text{cris}}(V) \in \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{fa}}(\varphi, \nabla)$, et que la restriction du foncteur D_{cris} à $\mathbf{Rep}_{\text{cris}}(\mathcal{G}_K)$ induit une équivalence de catégories

$$D_{\text{cris}} : \mathbf{Rep}_{\text{cris}}(\mathcal{G}_K) \xrightarrow{\sim} \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{fa}}(\varphi, \nabla),$$

dont un quasi-inverse est donné par

$$V_{\text{cris}}(D) = (\mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}_{\nabla=0} \cap \text{Fil}^0(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_K D)^{\nabla=0}.$$

PROPOSITION 3.8 (cf [15, Corollary 2.1.14]). *Le foncteur d'oubli*

$$\mathbf{Rep}_{\text{cris}}(\mathcal{G}_K) \rightarrow \mathbf{Rep}(\mathcal{G}_{K_\infty})$$

est pleinement fidèle.

DÉMONSTRATION. Soient V_1 et V_2 deux représentations cristallines de \mathcal{G}_K , et $f: V_1 \rightarrow V_2$ une application \mathbf{Q}_p -linéaire \mathcal{G}_{K_∞} -équivariante. Il s'agit de montrer que f est en fait \mathcal{G}_K -équivariante.

On dispose des sous-groupes $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$ et \mathcal{G}_{K_∞} de \mathcal{G}_K . Comme l'homomorphisme $\mathbb{K} \otimes_K K_\infty \rightarrow \mathbb{K}K_\infty = \mathbb{K}_\infty$ est un isomorphisme (cela se voit avec la ramification), on a $\mathbb{K} \cap K_\infty = K$, et \mathcal{G}_K est engendré par $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$ et \mathcal{G}_{K_∞} . Il suffit donc de vérifier que f est $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$ -équivariante. Les représentations V_1 et V_2 étant cristallines, leurs restrictions à $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$ le sont *a fortiori*, et comme f est \mathcal{G}_{K_∞} -équivariante, il suffit d'appliquer [15, Corollary 2.1.14]. \square

4. (φ, ∇) -modules filtrés sur K et (φ, ∇) -modules sur \mathfrak{S}

Soit \mathcal{A} (resp. $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$) l'anneau des fonctions holomorphes sur le disque unité à coefficients dans K_0 (resp. \mathbb{K}_0) :

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n, a_n \in K_0, (\forall r \in \mathbf{R}_{>0}) \lim_{n \rightarrow \infty} nr + v(a_n) = +\infty \right\}.$$

On le munit d'un opérateur de Frobenius σ prolongeant σ sur K_0 (resp. \mathbb{K}_0) en posant $\sigma(u) = u^p$. L'injection $i_\sigma: K_0 \rightarrow \mathbb{K}_0$ se prolonge alors en une injection $i_\sigma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{K}}$ compatible aux Frobenius.

REMARQUE 4.1. Comme \mathcal{O}_{K_0} est un \mathcal{O}_{K_0} -module libre (de rang p^d) via σ , l'anneau \mathcal{A} est \mathcal{A} -module libre (de rang p^{d+1}) via σ . En particulier, le morphisme $\sigma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est plat, si bien que l'extension des scalaires $\mathcal{M} \rightsquigarrow \sigma^* \mathcal{M}$ est exacte, fait qu'on va utiliser implicitement dans la suite.

DÉFINITION 4.2. On note $\mathbf{M}_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla)$ (resp. $\mathbf{M}_{\mathcal{A}_K}(\varphi)$) la catégorie dont les objets sont les \mathcal{A} -modules (resp. \mathcal{A}_K -modules) \mathcal{M} libres de rang fini, munis d'un opérateur de Frobenius σ -linéaire $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ tel que $\text{Coker}(1 \otimes \varphi: \sigma^* \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M})$ est tué par une puissance de $E(u)$, et tels que le \mathcal{O}_{K_0} -module $\mathcal{M}/u\mathcal{M}$ est muni d'une connexion intégrable quasi-nilpotente $\nabla: \mathcal{M}/u\mathcal{M} \rightarrow (\mathcal{M}/u\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ pour laquelle l'opérateur induit par φ est horizontal (resp. rien).

Les morphismes sont les applications \mathcal{A} -linéaires (resp. \mathcal{A}_K -linéaires) compatibles aux Frobenius et aux connexions.

On note $\mathbf{M}_{\mathcal{A}}^{\text{BT}}(\varphi, \nabla)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{M}_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla)$ constituée des \mathcal{M} tels que $\text{Coker}(1 \otimes \varphi: \sigma^* \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M})$ est tué par $E(u)$ (et pas seulement une puissance de $E(u)$).

4.3. Rappelons qu'on dispose de l'élément

$$\lambda = \prod_{n=0}^{\infty} \sigma^n \left(\frac{E(u)}{E(0)} \right) \in \mathcal{A}$$

(le produit converge bien dans \mathcal{A} car $E(u)/E(0) \in 1 + u\mathcal{O}_{K_0}[u] + \mathcal{O}_{K_0}u^e/p$ et donc $\sigma^n(E(u)/E(0)) \in 1 + u^{p^n}\mathcal{O}_{K_0}[u] + \mathcal{O}_{K_0}u^{ep^n}/p$. Remarquons en outre que $\lambda = \frac{E(u)}{E(0)}\sigma(\lambda)$, si bien que $\sigma(\lambda) \in \frac{\lambda}{E(u)}\mathcal{A}^\times$. En particulier, le Frobenius σ se prolonge à $\mathcal{A}[\lambda^{-1}]$, et on a $\sigma(\lambda^{-r})\mathcal{A} = \frac{E(u)^r}{\lambda^r}\mathcal{A}$.

Rappelons par ailleurs que Kisin a construit (cf. [15, 1.2, Theorem 1.2.15]) un foncteur pleinement fidèle

$$\mathcal{M}_K: \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{eff}}(\varphi) \rightarrow \mathbf{M}_{\mathcal{A}_K}(\varphi)$$

de la façon suivante.

Posons $\mathbb{W} = \mathcal{O}_{K_0}$, $\mathfrak{S}_K = \mathbb{W}[[u]]$ et pour $n \in \mathbf{N}$, notons $\widehat{\mathfrak{S}}_{K,n}$ le séparé complété de $\mathbb{K}[\varpi^{(n)}] \otimes_{\mathbb{W}} \mathfrak{S}_K$ en l'idéal (maximal) engendré par $u - \varpi^{(n)}$. On filtre le corps $\widehat{\mathfrak{S}}_{K,n}[(u - \varpi^{(n)})^{-1}]$ par $\text{Fil}^i \widehat{\mathfrak{S}}_{K,n}[(u - \varpi^{(n)})^{-1}] = (u - \varpi^{(n)})^i \widehat{\mathfrak{S}}_{K,n}$ pour $i \in \mathbf{Z}$.

On a les inclusions $\mathfrak{S}_K \subseteq \mathcal{A}_K \subseteq \widehat{\mathfrak{S}}_{K,n}[(u - \varpi^{(n)})^{-1}]$ (la deuxième correspondant au développement de Taylor en $\varpi^{(n)}$).

Si $D \in \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{eff}}(\varphi)$, on dispose d'une application (de localisation)

$$i_n: \mathcal{A}_K \otimes_{K_0} D \xrightarrow{\sigma_{\mathbb{W}}^{-n} \otimes \varphi_D^{-n}} \mathcal{A}_K \otimes_{K_0} D \rightarrow \widehat{\mathfrak{S}}_{K,n} \otimes_K D_K$$

où $\sigma_{\mathbb{W}}: \mathcal{A}_K \rightarrow \mathcal{A}_K$ est l'application qui agit par σ sur K_0 et telle que $\sigma_{\mathbb{W}}(u) = u$ et $\varphi_D: D \rightarrow D$ est l'opérateur de Frobenius de D . Comme le corps résiduel de K_0 est parfait, les applications $\sigma_{\mathbb{W}}$ et φ_D sont bijectives, si

bien que ι_n est bien définie. Elle se prolonge en une application

$$\iota_n: \mathcal{A}_K[\lambda^{-1}] \otimes_{\mathbb{K}_0} \mathbb{D} \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}_{K,n}[(u - \varpi^{(n)})^{-1}] \otimes_K \mathbb{D}_K$$

et on pose

$$\mathcal{M}_K(\mathbb{D}) = \{x \in \mathcal{A}_K[\lambda^{-1}] \otimes_{\mathbb{K}_0} \mathbb{D}, (\forall n \in \mathbf{N}) \iota_n(x) \in \text{Fil}^0(\widehat{\mathcal{E}}_{K,n}[(u - \varpi^{(n)})^{-1}] \otimes_K \mathbb{D}_K)\}$$

où le module $\widehat{\mathcal{E}}_{K,n}[(u - \varpi^{(n)})^{-1}] \otimes_K \mathbb{D}_K$ est muni de la filtration du produit tensoriel, définie par

$$\text{Fil}^i(\widehat{\mathcal{E}}_{K,n}[(u - \varpi^{(n)})^{-1}] \otimes_K \mathbb{D}_K) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \text{Fil}^j \widehat{\mathcal{E}}_{K,n}[(u - \varpi^{(n)})^{-1}] \otimes_K \text{Fil}^{i-j} \mathbb{D}_K$$

et où l'opérateur de Frobenius $\varphi: \mathcal{M}_K(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{M}_K(\mathbb{D})$ est induit par $\sigma \otimes \varphi_{\mathbb{D}}$ sur $\mathcal{A}_K[\lambda^{-1}] \otimes_{\mathbb{K}_0} \mathbb{D}$.

REMARQUE 4.4. Soit $\mathbb{D} \in \mathbf{MF}_{K/\mathbb{K}_0}^{\text{eff}}(\varphi)$ et

$$r_{\mathbb{D}} = \max \{i \in \mathbf{N}, \text{Fil}^i \mathbb{D}_K \neq 0\}$$

alors comme

$$\mathcal{M}_K(\mathbb{D}) \subseteq \{x \in \mathcal{A}_K[\lambda^{-1}] \otimes_{\mathbb{K}_0} \mathbb{D}, x \in \text{Fil}^0(\widehat{\mathcal{E}}_{K,0}[(u - \varpi)^{-1}] \otimes_K \mathbb{D}_K)\},$$

on a

$$\mathcal{A}_K \otimes_{\mathbb{K}_0} \mathbb{D} \subseteq \mathcal{M}_K(\mathbb{D}) \subseteq \lambda^{-r_{\mathbb{D}}} \mathcal{A}_K \otimes_{\mathbb{K}_0} \mathbb{D}.$$

Cela résulte de ce que $\sigma_{\mathbb{W}}^{-n}(\lambda) \in \text{Fil}^1 \widehat{\mathcal{E}}_{K,0} \setminus \text{Fil}^2 \widehat{\mathcal{E}}_{K,0}$ (car E a une racine simple en ϖ).

En outre, $\text{Coker}(1 \otimes \varphi: \sigma^* \mathcal{M}_K(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{M}_K(\mathbb{D}))$ est tué par $E(u)^{r_{\mathbb{D}}}$ (cf [15, Lemma 1.2.2]).

4.5. Par ailleurs, on a un foncteur (cf [15, 1.2.5])

$$\mathbf{D}_K: \mathcal{M}_{\mathcal{A}_K}(\varphi) \rightarrow \mathbf{MF}_{K/\mathbb{K}_0}^{\text{eff}}(\varphi)$$

défini par $\mathbf{D}_K(\mathcal{M}) = \mathcal{M}/u\mathcal{M}$ (c'est un \mathbb{K}_0 -espace vectoriel vu que $\mathcal{A}_K/u\mathcal{A}_K \simeq \mathbb{K}_0$), muni de l'opérateur de Frobenius induit par $\varphi_{\mathcal{M}}$. La filtration de $\mathbf{D}_K(\mathcal{M})_K$ est plus délicate à construire (cf [15, 1.2.7]). En outre, ce foncteur est un «quasi-inverse» à gauche de \mathcal{M}_K (i.e. $\mathbf{D}_K \circ \mathcal{M}_K \simeq \text{Id}_{\mathbf{MF}_{K/\mathbb{K}_0}^{\text{eff}}(\varphi)}$ cf [15, Proposition 1.2.8]).

4.6. Soit $D \in \mathbf{MF}_{K/\mathbb{K}_0}^{\text{eff}}(\varphi, \nabla)$. On pose $D_{\mathbb{K}_0} = \mathbb{K}_0 \otimes_{\mathbb{K}_0} D$. Cela définit un objet de $\mathbf{MF}_{K/\mathbb{K}_0}^{\text{eff}}(\varphi)$, le Frobenius étant induit par $\sigma \otimes \varphi_D$ et la filtration par

$\text{Fil}^i D_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \otimes_K \text{Fil}^i D_K$ pour $i \in \mathbf{Z}$ (bien sûr, on tue la connexion). On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(D) &= \{x \in \mathcal{A}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D, (\forall n \in \mathbf{N}), \iota_n(x) \in \text{Fil}^0(\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n}[(u - \varpi^{(n)})^{-1}] \otimes_{\mathbb{K}} D_{\mathbb{K}})\} \\ &= (\mathcal{A}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D) \cap \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0}) \end{aligned}$$

l'intersection étant prise dans $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D$. Il est clair que $\mathcal{M}(D)$ est un \mathcal{A} -module, car c'est le cas de $\mathcal{A}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D$ et $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ est un $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$ -module.

Notons que si $r_D = \max\{i \in \mathbf{N}, \text{Fil}^i D_K \neq 0\}$, on a

$$(*) \quad \mathcal{A} \otimes_{K_0} D \subseteq \mathcal{M}(D) \subseteq \lambda^{-r_D} \mathcal{A} \otimes_{K_0} D$$

(cf. remarque 4.4).

LEMME 4.7. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la \mathcal{A} -algèbre $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n}$ est plate.*

DÉMONSTRATION. On écrit l'application $\mathcal{A} \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n}$ comme le composé des homomorphismes

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}_n \otimes_{K_0} \mathcal{A} \rightarrow (\mathbb{K}_n \otimes_{K_0} \mathcal{A})_{(u - \varpi^{(n)})} \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n}$$

le premier est plat car libre, le deuxième est une localisation et le troisième la complétion d'un anneau de valuation discrète. \square

LEMME 4.8 (cf [15, Lemma 1.2.1]). *Si on considère $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n}$ comme une \mathcal{A} -algèbre via le composé*

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\sigma_{\mathbb{N}}^n} \widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n}$$

alors

(1) *l'homomorphisme*

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A} \otimes_{K_0} D) \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n} \otimes_{\mathbb{K}} D_{\mathbb{K}} \simeq \widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n} \otimes_K D_K$$

induit par ι_n est un isomorphisme;

(2) *l'isomorphisme précédent induit un isomorphisme*

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(D) \xrightarrow{\sim} \sum_{j \geq 0} E(u^{p^j})^{-j} \widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n} \otimes_K \text{Fil}^j D_K$$

(3) *l'homomorphisme $\mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(D) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ déduit de l'inclusion $\mathcal{M}(D) \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ par $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$ -linéarité est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. L'assertion (1) est évidente. Pour (2), on écrit $\mathcal{M}(D) = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} \mathcal{M}_m(D)$ avec

$$\mathcal{M}_m(D) = \{x \in \mathcal{A}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D, \iota_m(x) \in \text{Fil}^0(\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},m}[(u - \varpi^{(m)})^{-1}] \otimes_{\mathbb{K}} D_{\mathbb{K}})\}.$$

Par platitude de $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n}$ sur \mathcal{A} (lemme 4.7) et platitude de $\sigma_{\mathbb{V}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (remarque 4.1), on a

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(D) = \bigcap_{m \in N} \widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_m(D).$$

Il suffit donc de voir que

- (a) $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_n(D) = \sum_{j \geq 0} E(u^{p^n})^{-j} \widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n} \otimes_K \text{Fil}^j D_K$;
- (b) pour tout $m \in N$ avec $m \neq n$, on a

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_m(D) = \widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n} [(u - \varpi^{(n)})^{-1}] \otimes_K D_K.$$

L'égalité (a) résulte de la définition de la filtration de $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n} [(u - \varpi^{(n)})^{-1}] \otimes_K D_K$, sachant que $E(u^{p^n}) \in (u - \varpi^{(n)}) \widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n}^{\times}$ (car $\varpi^{(n)}$ est racine simple de $E(u^{p^n})$). L'égalité (b) résulte du fait que $E(u^{p^m}) \in \widehat{\mathcal{E}}_{\mathbb{K},n}^{\times}$ (car $\varpi^{(n)}$ n'est pas racine de $E(u^{p^m})$).

Pour l'assertion (3), on a déjà les inclusions (1), qui induisent des inclusions

$$\mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{K_0} D \subseteq \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(D) \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{K_0}) \subseteq \lambda^{-r_D} \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{K_0} D.$$

L'homomorphisme $\mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(D) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{K_0})$ est donc injectif, de conoyau tué par une puissance de λ . Pour voir que c'est un isomorphisme, il suffit de vérifier la surjectivité en localisant en les zéros de λ , ce qui résulte de l'assertion (2). \square

PROPOSITION 4.9. *On définit ainsi un foncteur*

$$\mathcal{M}: \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{eff}}(\varphi, \nabla) \rightarrow \mathbf{M}_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla).$$

En outre, on a $D \in \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{BT}}(\varphi, \nabla) \Rightarrow \mathcal{M}(D) \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}^{\text{BT}}(\varphi, \nabla)$.

DÉMONSTRATION. Posons $r = r_D \in N$. On a les inclusions suivantes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{K_0}) & \hookrightarrow & \lambda^{-r} \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{K_0} D \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{M}(D) & \hookrightarrow & \lambda^{-r} \mathcal{A} \otimes_{K_0} D \end{array}$$

où l'inclusion $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{K_0}) \subseteq \lambda^{-r} \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{K_0} D$ est fermée en vertu de [15, Lemma 1.1.4] car $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{K_0})$ est libre de rang fini (cf. [15, Lemma 1.2.2]). Par ailleurs l'inclusion $\lambda^{-r} \mathcal{A} \otimes_{K_0} D \subseteq \lambda^{-r} \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{K_0} D$ est fermée parce que \mathcal{A} l'est dans $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$. Il en résulte que $\mathcal{M}(D)$ est fermé dans le \mathcal{A} -module libre $\lambda^{-r} \mathcal{A} \otimes_{K_0} D$, donc libre de rang fini d'après [15, Lemma 1.1.4] (qui s'applique aussi dans le cas d'un corps résiduel imparfait).

Par ailleurs, le \mathcal{A} -module $\mathcal{M}(D)$ est muni d'un opérateur de Frobenius σ -linéaire, induit par $\sigma \otimes \varphi_D$ sur $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D$. En effet, $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{K_0})$ et $\mathcal{A}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D$ sont stables par $\sigma \otimes \varphi_D$: il en est de même de $\mathcal{M}(D)$.

On a une application $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$ -linéaire

$$1 \otimes \varphi: \sigma^*(\lambda^{-r} \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{K_0} D) \rightarrow \lambda^{-r} \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{K_0} D.$$

Comme elle est induite par l'isomorphisme $1 \otimes \varphi: \sigma^* D \xrightarrow{\sim} D$, et comme $\sigma(\lambda^{-r}) \mathcal{A}_{\mathbb{K}} = E(u)^r \lambda^{-r} \mathcal{A}_{\mathbb{K}}$, elle est injective d'image $E(u)^r (\lambda^{-r} \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{K_0} D)$. On a un énoncé identique avec $\lambda^{-r} \mathcal{A} \otimes_{K_0} D$. Mais d'après [15, Lemma 1.2.2], le conoyau de la restriction de $1 \otimes \varphi$ à $\sigma^* \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{K_0}) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{K_0})$ est tué par $E(u)^r$. Si $y \in \mathcal{M}(D)$, il existe donc $x \in \sigma^* \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{K_0})$ tel que $(1 \otimes \varphi)(x) = E(u)^r y$, et comme $y \in \lambda^{-r} \mathcal{A} \otimes_{K_0} D$, on a aussi $x \in \sigma^*(\lambda^{-r} \mathcal{A} \otimes_{K_0} D)$ par injectivité de $1 \otimes \varphi$: on a en fait $x \in \sigma^* \mathcal{M}(D)$ et $\text{Coker}(1 \otimes \varphi: \sigma^* \mathcal{M}(D) \rightarrow \mathcal{M}(D))$ est tué par $E(u)^r$.

En particulier, si $D \in \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{BT}}(\varphi, \nabla)$, on a $r \leq 1$, et donc $\mathcal{M}(D) \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}^{\text{BT}}(\varphi, \nabla)$.

Finalement, on a les inclusions

$$(1) \quad \mathcal{A} \otimes_{K_0} D \subseteq \mathcal{M}(D) \subseteq \lambda^{-r} \mathcal{A} \otimes_{K_0} D.$$

L'image de $E(u)$ dans $\mathcal{A}/u\mathcal{A} \simeq K_0$ est $E(0)$, de sorte que l'image de λ est 1 : si on tensorise les inclusions (1) par $\mathcal{A}/u\mathcal{A}$ on a des applications $D \rightarrow \mathcal{M}(D)/u\mathcal{M}(D) \rightarrow D$ dont le composé est l'identité : on a $\mathcal{M}(D)/u\mathcal{M}(D) = D$, et ce dernier est muni d'une connexion intégrable quasi-nilpotente $\nabla: D \rightarrow D \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}$ pour laquelle l'opérateur induit par $\varphi_{\mathcal{M}(D)}$ (qui n'est autre que φ_D) est horizontal. \square

4.10. Si $\mathcal{M} \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla)$, on pose

$$\mathbf{D}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}/u\mathcal{M}.$$

C'est un K_0 -espace vectoriel (on a $\mathcal{A}/u\mathcal{A} = K_0$) et on a $\mathbf{D}(\mathcal{M})_{K_0} := \mathbf{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} \mathbb{K}_0 = \mathcal{M}_{K_0}/u\mathcal{M}_{K_0} = \mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{K_0})$ où $\mathcal{M}_{K_0} = \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$. Il est naturellement muni d'un opérateur de Frobenius déduit $\varphi_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ et (par définition) d'une connexion intégrable quasi-nilpotente telle que le Frobenius est horizontal. Par ailleurs, on a $\mathbf{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} K \subseteq \mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{K_0}) \otimes_{K_0} \mathbb{K}$: on munit $\mathbf{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} K$ de la filtration induite par celle sur $\mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{K_0}) \otimes_{K_0} \mathbb{K}$. La connexion vérifie la transversalité de Griffith sur $\mathbf{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} K$, et le linéarisé du Frobenius est un isomorphisme parce que c'est le cas sur $\mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{K_0}) \otimes_{K_0} \mathbb{K}$ (resp. $\mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{K_0})$).

On définit ainsi un foncteur

$$\mathbf{D}: \mathbf{M}_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla) \rightarrow \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{eff}}(\varphi, \nabla)$$

(le (φ, ∇) -module $\mathbf{D}(\mathcal{M})$ est effectif parce que c'est le cas de $\mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0}) \otimes_{\mathbb{K}_0} \mathbb{K}$).

PROPOSITION 4.11. *Le foncteur \mathbf{D} est un quasi-inverse à gauche du foncteur \mathcal{M} , c'est-à-dire*

$$\mathbf{D} \circ \mathcal{M} \simeq \mathrm{Id}_{\mathbf{MF}_{K/K_0}^{\mathrm{eff}}(\varphi, \nabla)}.$$

En outre, on a $\mathcal{M} \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{BT}}(\varphi, \nabla) \Rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{M}) \in \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\mathrm{BT}}(\varphi, \nabla)$.

DÉMONSTRATION. Soit $D \in \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\mathrm{eff}}(\varphi, \nabla)$. On a un homomorphisme de φ -modules sur K_0

$$f: \mathbf{D}(\mathcal{M}(D)) \rightarrow D$$

déduit de $(\mathcal{A}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D) / u(\mathcal{A}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D) = D$. Mais l'inclusion $D \subseteq \subseteq \mathcal{A} \otimes_{K_0} D \subseteq \mathcal{M}(D)$ composée avec la projection sur $\mathbf{D}(\mathcal{M}(D))$ fournit un inverse de f : ce dernier est un isomorphisme. Bien sûr, elle est compatible aux Frobenius et aux connexions. Reste à voir la compatibilité aux filtrations. Par définition de la filtration sur $\mathbf{D}(\mathcal{M}(D))$, cela se vérifie après extension des scalaires à \mathbb{K} . On a $\mathbf{D}(\mathcal{M}(D))_{\mathbb{K}_0} = \mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}(D)_{\mathbb{K}_0})$. Par ailleurs, l'inclusion $\mathcal{M}(D) \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ induit une application $\mathcal{M}(D)_{\mathbb{K}_0} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ qui est un isomorphisme modulo u : on a

$$\mathbf{D}(\mathcal{M}(D))_{\mathbb{K}} \simeq \mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0}))$$

et par définition, la filtration sur $\mathbf{D}(\mathcal{M}(D))_{\mathbb{K}}$ est celle induite par la filtration sur $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})_{\mathbb{K}} / u \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})_{\mathbb{K}}$. Mais $D_{\mathbb{K}_0} = D \otimes_{K_0} \mathbb{K}_0 \in \mathbf{MF}_{\mathbb{K}/\mathbb{K}_0}^{\mathrm{eff}}(\varphi)$: d'après [15, Proposition 1.2.8], on a un isomorphisme naturel de φ -modules filtrés sur \mathbb{K} :

$$\tilde{f}: \mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})) \xrightarrow{\sim} D_{\mathbb{K}_0}$$

la filtration en question n'est donc autre que la filtration induite par celle de $D_{\mathbb{K}}$ via $\tilde{f} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$.

La dernière assertion résulte de ce que si $\mathcal{M} \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{BT}}(\varphi, \nabla)$, alors $\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0} \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}_{\mathbb{K}}}^{\mathrm{BT}}(\varphi)$ et donc $\mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0}) \in \mathbf{MF}_{\mathbb{K}/\mathbb{K}_0}^{\mathrm{BT}}(\varphi)$ (cf [15, Lemma 1.2.2 & Proposition 1.2.13]). Ainsi $\mathrm{Fil}^2 \mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0})_{\mathbb{K}} = 0$ et *a fortiori* $\mathrm{Fil}^2 \mathbf{D}(\mathcal{M})_{\mathbb{K}} = 0$ i.e. $\mathbf{D}(\mathcal{M}) \in \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\mathrm{BT}}(\varphi, \nabla)$. \square

REMARQUE 4.12. On peut aussi montrer (cf [15, Lemma 1.2.6 & Proposition 1.2.13]) que pour tout $\mathcal{M} \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{BT}}(\varphi, \nabla)$, on a un morphisme naturel

$$(2) \quad \mathcal{M}(\mathbf{D}(\mathcal{M})) \rightarrow \mathcal{M}$$

(il faut pour cela réécrire soigneusement [15, Lemma 1.2.6]), qui induit un isomorphisme lorsqu'on inverse λ . L'image essentielle du foncteur \mathcal{M} est alors constituée par les objets \mathcal{M} tels que (2) est un isomorphisme. Cela peut aussi être caractérisée de la façon suivante. Il existe sur $\mathcal{M}[\lambda^{-1}]$ un opérateur différentiel canonique N_∇ , et \mathcal{M} est dans l'image essentielle si et seulement si il est stable par N_∇ (cf [15, Lemma 1.3.10]).

4.13. Rappelons (cf [13, Theorem 6.10]) qu'étant donné un φ -module sur l'anneau de Robba (associé à K disons), on dispose d'une notion de pentes et qu'il existe une filtration canonique (par les pentes) dont les gradués successifs sont isoclines. On étend la notion de pente aux φ -modules sur \mathcal{A} en étendant les scalaires de \mathcal{A} à l'anneau de Robba.

PROPOSITION 4.14 (cf [15, Theorem 1.3.8]). *Soit $D \in \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{eff}}(\varphi, \nabla)$. Si D est faiblement admissible alors $\mathcal{M}(D)$ est pur de pente 0.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que le choix de σ fournit une injection $i_\sigma: K \rightarrow \mathbb{K}$. On choisit $\overline{\mathbb{K}}$ une clôture algébrique de \mathbb{K} contenant \overline{K} . Par restriction, $\mathcal{G}_{\mathbb{K}} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$ s'identifie à un sous-groupe de \mathcal{G}_K . En outre, l'homomorphisme i_σ induit un homomorphisme surjectif $\mathbb{B}_{\text{cris}} \rightarrow \mathbb{B}_{\text{cris}}$ où \mathbb{B}_{cris} est l'anneau de périodes associé à \mathbb{K} (*idem* avec \mathbb{B}_{dR}).

Si D est faiblement admissible (donc admissible), il correspond à une représentation cristalline V de \mathcal{G}_K . On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_{K_0} D & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{K}_0} D_{\mathbb{K}_0} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \end{array}$$

les flèches verticales étant induites par i_σ . Comme celle de gauche est surjective, il en est de même de α : la restriction de V au sous-groupe $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$ est cristalline et le φ -module $D_{\mathbb{K}_0}$ est faiblement admissible.

D'après le lemme 4.8 (3), on a un isomorphisme $\mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(D) \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$. Mais d'après [15, Theorem 1.3.8], le φ -module $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ est pur de pente 0 si et seulement si $D_{\mathbb{K}_0}$ est faiblement admissible. \square

4.15. On note $\mathbf{M}_{\mathcal{A}}^0(\varphi, \nabla)$ (resp. $\mathbf{M}_{\mathcal{A}}^{0,\text{BT}}(\varphi, \nabla)$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{M}_{\mathcal{A}}^0(\varphi, \nabla)$ (resp. $\mathbf{M}_{\mathcal{A}}^{\text{BT}}(\varphi, \nabla)$) constituée des objets purs de pente 0. D'après

les propositions 4.9, 4.11 et 4.14, le foncteur \mathcal{M} induit des foncteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{fa,eff}}(\varphi, \nabla) &\rightarrow \mathbf{M}_{\mathcal{A}}^0(\varphi, \nabla) \\ \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{fa,BT}}(\varphi, \nabla) &\rightarrow \mathbf{M}_{\mathcal{A}}^{0,\text{BT}}(\varphi, \nabla). \end{aligned}$$

Ils sont pleinement fidèles. En effet, comme $\mathbf{D} \circ \mathcal{M} = \text{Id}_{\mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{eff}}(\varphi, \nabla)}$ (proposition 4.11), ils sont fidèles, et pour voir qu'ils sont pleins, il suffit de montrer que \mathbf{D} est fidèle. Mais si $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla)$, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{M}_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla)}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) & \xrightarrow{(1)} & \text{Hom}_{\mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{eff}}(\varphi, \nabla)}(\mathbf{D}(\mathcal{M}_1), \mathbf{D}(\mathcal{M}_2)) \\ (2) \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathbf{M}_{\mathcal{A}_{\mathbb{K}}}(\varphi)}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_1, \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_2) & \xrightarrow{(3)} & \text{Hom}_{\mathbf{MF}_{\mathbb{K}/\mathbb{K}_0}^{\text{eff}}(\varphi)}(\mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_1), \mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_2)) \end{array}$$

L'application (2) est injective parce que l'application

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{K}}}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_1, \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_2)$$

l'est (ce qui résulte du fait que \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont libres). L'application (3) est injective (cf [15, Propositions 1.2.8 & 1.2.13]). Il en résulte que (1) est injective, ce qu'on voulait.

Posons $\mathfrak{S} = \mathcal{O}_{K_0}[[u]]$, que l'on munit de l'opérateur de Frobenius défini par $\sigma(u) = u^p$. Remarquons que \mathfrak{S} est un sous-anneau de \mathcal{A} .

DÉFINITION 4.16. On note $\mathbf{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi, \nabla)$ la catégorie dont les objets sont les triplets $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}}, \nabla_{\mathfrak{M}})$ où \mathfrak{M} est un \mathfrak{S} -module libre de rang fini, $\varphi_{\mathfrak{M}}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ une application σ -linéaire dont le linéarisé $1 \otimes \varphi: \sigma^* \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ a un conoyau tué par une puissance de $E(u)$, et où $\nabla_{\mathfrak{M}}: \mathfrak{M}/u\mathfrak{M} \rightarrow (\mathfrak{M}/u\mathfrak{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ est une connexion intégrable quasi-nilpotente pour laquelle l'opérateur induit par $\varphi_{\mathfrak{M}}$ sur le \mathcal{O}_{K_0} -module $\mathfrak{M}/u\mathfrak{M}$ est horizontal.

Les morphismes sont les applications \mathfrak{S} -linéaires compatibles aux Frobenius et aux connexions.

On dénote par $\mathbf{M}_{\mathfrak{S}}^{\text{BT}}(\varphi, \nabla)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi, \nabla)$ constituée des objets $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}}, \nabla_{\mathfrak{M}})$ tels que $\text{Coker}(1 \otimes \varphi: \sigma^* \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M})$ est tué par $E(u)$ (et pas seulement une puissance de $E(u)$).

PROPOSITION 4.17 (cf [15, Lemma 1.3.13]). *Le foncteur*

$$\begin{aligned} \Theta: \mathbf{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi, \nabla) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{Q}_p &\rightarrow \mathbf{M}_{\mathcal{A}}^0(\varphi, \nabla) \\ \mathfrak{M} &\mapsto \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{A} \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories. En outre, Θ induit une équivalence de

catégories

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathfrak{E}}^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p &\rightarrow \mathbf{M}_{\mathcal{A}}^{0,\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla) \\ \mathfrak{M} &\mapsto \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{E}} \mathcal{A}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Remarquons déjà que

$$\Theta(\mathfrak{M})/u\Theta(\mathfrak{M}) \simeq (\mathfrak{M}/u\mathfrak{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} K_0,$$

de sorte que $\Theta(\mathfrak{M})/u\Theta(\mathfrak{M})$ est bien muni d'une connexion intégrable quasi-nilpotente telle que l'opérateur induit par le Frobenius est horizontal. La démonstration du fait que c'est une équivalence est la même que [15, Lemma 1.3.13] et [15, Theorem 1.3.2], parce que ces énoncés reposent sur les résultats de [13] et de [14], pour lesquels on a pas d'hypothèse sur le corps résiduel. \square

COROLLAIRE 4.18. *On a un foncteur pleinement fidèle*

$$\mathbf{BT}_{\mathfrak{E}}: \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{fa,eff}}(\varphi, \nabla) \rightarrow \mathbf{M}_{\mathfrak{E}}(\varphi, \nabla) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$$

induisant un foncteur pleinement fidèle

$$\mathbf{BT}_{\mathfrak{E}}: \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{fa,BT}}(\varphi, \nabla) \rightarrow \mathbf{M}_{\mathfrak{E}}^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p.$$

DÉMONSTRATION. C'est la conjonction des propositions 4.9, 4.11, 4.14 et 4.17. \square

5. Classification des groupes de Barsotti-Tate sur \mathcal{O}_K

5.1 – Un épaissement à puissances divisées de \mathcal{O}_K

Soit $D_{\mathcal{O}_{K_0}[u]}(E(u))$ l'enveloppe à puissances divisées de $\mathcal{O}_{K_0}[u]$ relativement à l'idéal $(E(u))$, compatibles aux puissances divisées sur l'idéal (p) .

On note S le séparé complété de $D_{\mathcal{O}_{K_0}[u]}(E(u))$ pour la topologie p -adique, et on note $\text{Fil}^1 S$ l'adhérence dans S de l'idéal à puissances divisées engendré par $E(u)$. C'est encore un idéal à puissances divisées et on a un isomorphisme

$$S/\text{Fil}^1 S \simeq \mathcal{O}_{K_0}[u]/(E(u)) \simeq \mathcal{O}_K$$

induit par $u \mapsto \varpi$.

REMARQUE 5.2.

(1) L'anneau S est local complet, d'idéal maximal $\mathfrak{m} = \mathfrak{u}S + \mathrm{Fil}^1 S$. En effet, on a déjà $S/\mathfrak{m} \simeq \mathcal{O}_K/\varpi\mathcal{O}_K = k$. Par ailleurs, on a $\mathfrak{m}^{(e+1)p} \subseteq pS$ (car $u^{ep} = p!(u^e)^{[p]} \in pS$ et $x^p = p!x^{[p]} \in pS$ pour tout $x \in \mathrm{Fil}^1 S$) et S est complet pour la topologie p -adique.

(2) L'anneau S ne dépend que de \mathcal{O}_{K_0} et de l'entier e : comme $E(u) \equiv u^e \pmod{p\mathcal{O}_{K_0}[u]}$, on a $D_{\mathcal{O}_{K_0}[u]}(E(u)) = D_{\mathcal{O}_{K_0}[u]}(u^e)$, d'où l'égalité en passant aux complétés p -adiques. Par contre, l'idéal $\mathrm{Fil}^1 S$ dépend bien sûr de $E(u)$.

Notons I_u l'adhérence, pour la topologie p -adique, de l'idéal de S engendré par u et les puissances divisées de u^e . On a $S/I_u \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{K_0}$, et l'image de $\mathrm{Fil}^1 S$ modulo I_u n'est autre que $p\mathcal{O}_{K_0}$.

5.3. On munit S d'un opérateur de Frobenius prolongeant σ sur \mathcal{O}_{K_0} en posant $\sigma(u) = u^p$. Comme $\sigma(E(u)) \equiv E(u)^p \pmod{p\mathcal{O}_{K_0}[u]}$ d'où $\sigma(E(u)) \in pD_{\mathcal{O}_{K_0}[u]}(E(u))$, on a encore $\sigma(E(u)^{[n]}) \in pD_{\mathcal{O}_{K_0}[u]}(E(u))$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, et donc $\sigma(\mathrm{Fil}^1 S) \subseteq pS$ en passant aux complétés p -adiques. On pose

$$\begin{aligned} \sigma_1: \mathrm{Fil}^1 S &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto \sigma(x)/p \end{aligned}$$

DÉFINITION 5.4. On note $\mathbf{MF}_S^{\mathrm{BT}}(\varphi, \nabla)$ la catégorie dont les objets sont les S -modules libres de rang fini M munis d'un sous- S -module $\mathrm{Fil}^1 M$, d'une application σ -linéaire $\varphi_1: \mathrm{Fil}^1 M \rightarrow M$ et d'une connexion $\nabla: M/I_u M \rightarrow (M/I_u M) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ topologiquement quasi-nilpotente (rappelons que $S/I_u S \simeq \mathcal{O}_{K_0}$) tels que

- (a) $\mathrm{Fil}^1 S.M \subseteq \mathrm{Fil}^1 M$ et $M/\mathrm{Fil}^1 M$ est un \mathcal{O}_K -module libre ;
- (b) l'application linéarisée $\sigma^* \mathrm{Fil}^1 M \xrightarrow{1 \otimes \varphi_1} M$ est surjective ;
- (c) l'opérateur induit par φ sur $M/I_u M$ est horizontal pour ∇ ;

(les morphismes étant les applications S -linéaires respectant toutes les structures), où l'opérateur φ est défini par

$$\varphi(m) = \sigma_1(E(u))^{-1} \varphi_1(E(u)m).$$

REMARQUE 5.5. (1) Cette formule a bien un sens, car $\sigma_1(E(u)) \in S^\times$. En effet, écrivons

$$E(u) = p\lambda_e + \cdots + p\lambda_1 u^{e-1} + u^e$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_{e-1} \in \mathcal{O}_{K_0}$ et $\lambda_e \in \mathcal{O}_{K_0}^\times$. On a alors

$$\sigma_1(E(u)) = \sigma(\lambda_e) + \sigma(\lambda_{e-1})u^p + \cdots + \sigma(\lambda_1)u^{(e-1)p} + (p-1)!(u^e)^{[p]} \in \mathcal{O}_{K_0}^\times + \mathfrak{m} \subseteq S^\times$$

(cf. remarque 5.2). En outre, pour $m \in \text{Fil}^1 M$, on a

$$\varphi(m) = \sigma_1(E(u))^{-1} \varphi_1(E(u)m) = \sigma_1(E(u))^{-1} \sigma(E(u)) \varphi_1(m) = p \varphi_1(m).$$

(2) En général, le linéarisé $\sigma^* \text{Fil}^1 M \xrightarrow{1 \otimes \varphi_1} M$ n'est pas injectif, comme le montre déjà le cas $(S, \text{Fil}^1 S, \sigma_1, d)$: on a $z = 1 \otimes E(u)^{[p]} - \sigma_1(E(u)) \otimes E(u)^{[p-1]} \mapsto 0 \in S$, mais $z \neq 0$.

5.6. Soient $M \in \mathbf{MF}_S^{\text{BT}}(\varphi, \nabla)$ et $D = (M/I_u M) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} K_0$. Alors D est un K_0 -espace vectoriel de dimension le rang de M sur S , il est muni d'un opérateur σ -linéaire φ_D déduit de φ . Comme l'application linéarisée $\sigma^* \text{Fil}^1 M \xrightarrow{1 \otimes \varphi_1} M$ est surjective, il en est de même de $1 \otimes \varphi_D: \sigma^* D \rightarrow D$, qui est donc un isomorphisme.

PROPOSITION 5.7 (cf [15, Lemma 1.2.6]). *Il existe une unique application $S[p^{-1}]$ -linéaire*

$$\zeta: D \otimes_{K_0} S[p^{-1}] \rightarrow M \otimes_S S[p^{-1}]$$

dont la réduction modulo I_u est l'identité de D et qui est compatible aux Frobenius. C'est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Soit s_0 une application \mathcal{O}_{K_0} -linéaire $M/I_u M \rightarrow M$ dont la réduction modulo I_u est l'identité de $M/I_u M$, on note encore s_0 l'application $s_0: D \rightarrow M \otimes_S S[p^{-1}]$ obtenue en inversant p . Le linéarisé $1 \otimes \varphi_D: \sigma^* D \rightarrow D$ est un isomorphisme. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on dispose donc de l'application composée

$$D \xrightarrow{(1 \otimes \varphi_D)^{-j}} K_{0\sigma^j} \otimes_{K_0} D \xrightarrow{1 \otimes s_0} S[p^{-1}]_{\sigma^j} \otimes_S M \xrightarrow{(1 \otimes \varphi)^j} M.$$

Montrons que la somme

$$(3) \quad s = s_0 + \sum_{j=0}^{\infty} (1 \otimes \varphi)^{j+1} \circ (1 \otimes s_0) \circ (1 \otimes \varphi_D)^{-(j+1)} - (1 \otimes \varphi)^j \circ (1 \otimes s_0) \circ (1 \otimes \varphi_D)^{-j}$$

converge en une application K_0 -linéaire φ -équivariante $D \rightarrow M \otimes_S S[p^{-1}]$, et que cette dernière est unique. L'application recherchée se déduit alors de s par $S[p^{-1}]$ -linéarité.

Il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $(1 \otimes \varphi_D)^{-1}(M/I_u M) \subseteq p^{-c} M/I_u M$. Par ailleurs, comme s_0 induit l'identité modulo I_u , on a

$$((1 \otimes \varphi) \circ (1 \otimes s_0) \circ (1 \otimes \varphi_D)^{-1} - s_0)(M/I_u M) \subseteq p^{-c} I_u M.$$

Pour $j \in \mathbf{N}$, on a donc

$$\begin{aligned} & ((1 \otimes \varphi)^{j+1} \circ (1 \otimes s_0) \circ (1 \otimes \varphi_D)^{-(j+1)} - \\ & \quad - (1 \otimes \varphi)^j \circ (1 \otimes s_0) \circ (1 \otimes \varphi_D)^{-j})(M/I_u M) \subseteq p^{-(j+1)c} I_u^{p^j} M. \end{aligned}$$

Si $p^j = qe + r$ est la division euclidienne de p^j par e , on a $u^{p^j} = q!(u^e)^{[q]}u^r$ et donc $p^{-(j+1)c}u^{p^j} \in p^{-(j+1)c}q!S$. Comme on a $((u^e)^{[n]})^{p^j} = p^j!((u^e)^{[n]})^{[p^j]}$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $p^{-(j+1)c}I_u^{p^j}M \subseteq p^{-(j+1)c}q!M$. Mais $v(p^{-(j+1)c}q!) \geq q/p - 1 - (j+1)c$ et donc $v(p^{-(j+1)c}q!) \geq p^{j-1}/e - (j+1)c - 1 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} +\infty$.

La série (3) est bien convergente. L'unicité de s résulte de ce que si s' est une autre section, on a $(s - s')(D) \subseteq I_u M \otimes_S S[p^{-1}]$. Pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a donc $(s - s')(\varphi^j(D)) \subseteq I_u^{p^j} M \otimes_S S[p^{-1}]$ et donc $(s - s')(D) \subseteq I_u^{p^j} M \otimes_S S[p^{-1}]$ vu que $\varphi(D)$ engendre D . Si $N \in \mathbf{N}$ est tel que s et s' sont à valeurs dans M sur $p^N M/I_u M$, on a $p^N(s - s')(M/I_u M) \subseteq I_u^{p^j} M$ pour tout $j \in \mathbf{N}$. Comme M est libre sur S et S séparé pour la topologie I_u -adique, on a $s = s'$.

Les deux $S[p^{-1}]$ -modules $D \otimes_{K_0} S[p^{-1}]$ et $M \otimes_S S[p^{-1}]$ sont libres de même rang : soit $\alpha \in S[p^{-1}]$ le déterminant de ζ . Comme ζ induit l'identité modulo I_u , on a $\alpha \equiv 1 \pmod{I_u S[p^{-1}]}$. Écrivons $\alpha = p^m f$ avec $f \in S$ et $m \in \mathbf{Z}$. Modulo I_u , on a $p^m \bar{f} = 1$, où $\bar{f} \in \mathcal{O}_{K_0}$ désigne l'image de f . On a nécessairement $m = 0$ d'où $\alpha \in S$ a une image égale à 1 modulo I_u donc *a fortiori* modulo l'idéal maximal \mathfrak{m} de S : on a $\alpha \in S^\times$ et ζ est bijective. \square

5.8 – Construction d'un foncteur de Dieudonné

Comme $S/\text{Fil}^1 S \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_K$ et comme $p^n S + \text{Fil}^1 S$ est un idéal à puissances divisées de S , pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on dispose de l'épaississement à puissances divisées $S \rightarrow \mathcal{O}_K/p^n \mathcal{O}_K$.

Soit $G \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$. Il correspond (cf [8, Lemma 2.4.4]) à un groupe de Barsotti-Tate sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$, i.e. à un système $(G_n)_{n>0}$, où G_n est un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_K/p^n \mathcal{O}_K$ et $G_{n+1}|_{\mathcal{O}_K/p^n \mathcal{O}_K} \simeq G_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$. On peut alors évaluer le cristal de Dieudonné $\mathbf{D}(G_n)$ en l'épaississement $S \rightarrow \mathcal{O}_K/p^n \mathcal{O}_K$, et on pose

$$\mathbf{M}(G) = \mathbf{D}(G)(S \rightarrow \mathcal{O}_K) := \varprojlim_{n>0} \mathbf{D}(G_n)(S \rightarrow \mathcal{O}_K/p^n \mathcal{O}_K).$$

PROPOSITION 5.9. *Cela définit un foncteur contravariant*

$$\mathbf{M}: \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla).$$

DÉMONSTRATION. Cela définit déjà un foncteur contravariant de la catégorie $\mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$ dans la catégorie des S -modules \mathcal{M} libres de rang fini (S

est local) munis d'un opérateur de Frobenius σ -linéaire $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Comme le foncteur de Dieudonné commute aux changements de base (cf. [2]), pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a

$$\mathbf{D}(G \otimes_{\mathcal{O}_K} k)(\mathcal{O}_{K_0}) = \mathbf{D}(G_n)(S \rightarrow \mathcal{O}_K/p^n \mathcal{O}_K) \otimes_S \mathcal{O}_{K_0}$$

et donc

$$\mathbf{D}(G \otimes_{\mathcal{O}_K} k)(\mathcal{O}_{K_0}) = \mathbf{M}(G) \otimes_S \mathcal{O}_{K_0} = \mathbf{M}(G)/I_u \mathbf{M}(G)$$

en passant à la limite. Le \mathcal{O}_{K_0} -module $\mathbf{M}(G)/I_u \mathbf{M}(G)$ est donc sous-jacent au cristal $\mathbf{D}(G \otimes_{\mathcal{O}_K} k)$: il est naturellement muni d'une connexion intégrable quasi-nilpotente, pour laquelle l'opérateur de Frobenius est horizontal.

Le seul point délicat pour voir que le foncteur \mathbf{M} est à valeurs dans $\mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)$ est le fait qu'il est muni d'un sous- S -module $\text{Fil}^1 \mathbf{M}(G)$ tel que $\text{Fil}^1 S \cdot \mathbf{M}(G) \subseteq \text{Fil}^1 \mathbf{M}(G)$ et tel que l'opérateur φ est divisible par p sur $\text{Fil}^1 \mathbf{M}(G)$ induisant $\varphi_1 := \varphi/p: \text{Fil}^1 \mathbf{M}(G) \rightarrow \mathbf{M}(G)$ dont le linéarisé est surjectif. Cela résulte de [15, Lemma A.2] appliqué à $S \rightarrow \mathcal{O}_K/p^n \mathcal{O}_K$ pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$ en passant à la limite. \square

Exemples : on a $\mathbf{M}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) = (S, \text{Fil}^1 S, \sigma_1, d)$ et par dualité $\mathbf{M}(\mathbf{G}_m[p^\infty]) = (S, S, \sigma, d)$.

THÉORÈME 5.10 (cf. Kisin [15, Proposition A.6]). *Si $p > 2$, le foncteur \mathbf{M} est une anti-équivalence. Si $p = 2$, le foncteur \mathbf{M} induit une équivalence entre les catégories à isogénie près.*

DÉMONSTRATION. Pour prouver que c'est une équivalence, on construit un quasi-inverse comme le fait Kisin. Seule la première étape change. Soit $M \in \mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)$. Le quotient $M_1 := M/I_u M = M \otimes_S \mathcal{O}_{K_0}$ (où $S \rightarrow \mathcal{O}_{K_0}$ est définie par $u \mapsto 0$) est muni d'une connexion topologiquement quasi-nilpotente $\nabla: M_1 \rightarrow M_1 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ et d'un opérateur de Frobenius $F: M_1 \rightarrow M_1$ (dédit de $\varphi: M \rightarrow M$) qui est σ -linéaire et horizontal.

D'après [8, Theorem 4.1.1], comme k admet une p -base, le foncteur de Dieudonné sur la catégorie $\mathbf{BT}(k)$ est une anti-équivalence de catégories avec la catégorie des cristaux de Dieudonné sur $\text{Spec}(k)$ (cf [8, Definition 2.3.2 & 2.4.2]). Comme \mathcal{O}_{K_0} est un relèvement de k en caractéristique 0, la catégorie des cristaux en $\mathcal{O}_{\text{Spec}(k)/\mathbf{Z}_p}$ -modules quasi-cohérents est équivalente à la catégorie des \mathcal{O}_{K_0} -modules M séparés et complets pour la topologie p -adique, munis d'une connexion intégrable topologiquement quasi-nilpotente $\nabla: M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ (cf. [3, Proposition 1.3.3]). Cette équivalence induit une équivalence entre la catégorie des cristaux de

Dieudonné sur $\text{Spec}(k)$ et la catégorie des quadruplets (M, ∇, F, V) où M est un \mathcal{O}_{K_0} -module libre de rang fini, $\nabla: M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ une connexion intégrable topologiquement quasi-nilpotente, $F: M_\sigma \rightarrow M$ et $V: M \rightarrow M_\sigma$ sont \mathcal{O}_{K_0} -linéaires (où $M_\sigma = M \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}, \sigma} \mathcal{O}_{K_0}$), horizontaux tels que $F \circ V = p\text{Id}_M$ et $V \circ F = p\text{Id}_{M_\sigma}$ (cf. [8, 2.3.4]).

On munit M_1 d'une structure de cristal de Dieudonné sur $\text{Spec}(k)$ en définissant le morphisme de Verschiebung de la façon suivante. On note $\text{Fil}^1 M_1$ l'image de $\text{Fil}^1 M$ dans M_1 . Remarquons que comme M est libre de rang fini sur S , il est de même de M_1 sur \mathcal{O}_{K_0} . Par ailleurs, comme $\text{Fil}^1 M_1$ est inclus dans M_1 , il est lui aussi libre de rang fini, et $\text{rg}_{\mathcal{O}_{K_0}}(\text{Fil}^1 M_1) \leq \text{rg}_{\mathcal{O}_{K_0}}(M_1)$.

L'homomorphisme surjectif $1 \otimes \varphi_1: \sigma^* \text{Fil}^1 M \rightarrow M$ induit un homomorphisme surjectif $1 \otimes \varphi_1: \sigma^* \text{Fil}^1 M_1 \rightarrow M_1$. En particulier, on a en fait $\text{rg}_{\mathcal{O}_{K_0}}(\text{Fil}^1 M_1) = \text{rg}_{\mathcal{O}_{K_0}}(M_1)$ et comme $1 \otimes \varphi_1: \sigma^* \text{Fil}^1 M_1 \rightarrow M_1$ est surjectif, c'est un isomorphisme. L'homomorphisme linéarisé du morphisme de Verschiebung V est alors défini comme le composé

$$M_1 \xrightarrow{(1 \otimes \varphi_1)^{-1}} \sigma^* \text{Fil}^1 M_1 \subseteq \sigma^* M_1.$$

Soit $G_0 \in \mathbf{BT}(k)$ le groupe p -divisible associé à M_1 par le foncteur \mathbf{D} . On a un isomorphisme

$$\mathbf{D}(G_0)(\mathcal{O}_{K_0}) \xrightarrow{\sim} M_1$$

de φ -modules sur \mathcal{O}_{K_0} . Par ailleurs, via cet isomorphisme, $V\mathbf{D}(G_0)$ s'identifie à $\text{Fil}^1 M_1$ (cf. [15, Proposition A.2]).

La deuxième étape de la preuve consiste à relever G_0 en $G \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$ de sorte que $\mathbf{M}(G) = M$. Elle est identique à celle de [15, Proposition A.6]. C'est un argument de déformation, qui utilise la filtration $\text{Fil}^1 M$ (on applique le théorème de Messing, [18, Chapter V, Theorem 1.6] et [17, II § 9]), pour relever G_0 à $\mathcal{O}_K/\varpi^2 \mathcal{O}_K, \mathcal{O}_K/\varpi^3 \mathcal{O}_K, \dots, \mathcal{O}_K/\varpi^e \mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ (c'est l'étape la plus délicate parce qu'en général, on n'a pas de structure à puissances divisées sur $\varpi\mathcal{O}_K$), puis à $\mathcal{O}_K/p^2 \mathcal{O}_K, \mathcal{O}_K/p^3 \mathcal{O}_K$, etc.

6. Groupes de Barsotti-Tate et représentations p -adiques

LEMME 6.1. *Si $G \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$, alors $\mathbf{M}(G)[p^{-1}]$ ne dépend (en tant que $S[p^{-1}]$ -module muni d'un opérateur de Frobenius et d'une connexion modulo I_u) que de la fibre spéciale $G_k := G \otimes_{\mathcal{O}_K} k$, i.e. on a*

$$\mathbf{M}(G)[p^{-1}] = \mathbf{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} S[p^{-1}].$$

DÉMONSTRATION. En effet, on a $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K = k \oplus k\overline{\omega} \oplus \dots \oplus k\overline{\omega}^{e-1}$, avec $\overline{\omega}^e = 0$, et donc $\sigma^N(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K) \subseteq k$ pour $N \gg 0$. On a donc

$$\varphi^N(\mathbf{D}(G_1)(S \rightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)) \subseteq \mathbf{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} S$$

pour $N \gg \log e / \log p$ (rappelons que pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $G_n = G \otimes_{\mathcal{O}_K} (\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K)$). Mais comme ce sont des cristaux de Dieudonné, le Frobenius est une isogénie, si bien que

$$\mathbf{D}(G_1)(S \rightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[p^{-1}] = \mathbf{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} S[p^{-1}].$$

Mais comme p a des puissances divisées dans \mathcal{O}_K , on a

$$\mathbf{D}(G_n)(S \rightarrow \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K) = \mathbf{D}(G_1)(S \rightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$$

pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, et donc $\mathbf{M}(G) = \mathbf{D}(G_1)(S \rightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$. \square

6.2. Comme \mathbf{A}_{cris} est une \mathcal{O}_{K_0} -algèbre telle que $E([\overline{\omega}])$ a des puissances divisées (car $\theta(E([\overline{\omega}])) = E(\overline{\omega}) = 0 \in \mathcal{O}_C$), on a un plongement naturel

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \mathbf{A}_{\text{cris}} \\ u &\mapsto [\overline{\omega}]. \end{aligned}$$

Ce dernier est compatible aux filtrations, Frobenius et connexions.

On dispose d'un accouplement

$$\mathbf{T}_p(G) \times_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{M}(G) \rightarrow \mathbf{A}_{\text{cris}}$$

défini de la façon suivante. Si $x \in \mathbf{T}_p(G)$ et $m \in \mathbf{M}(G)$, alors

$$x \in \text{Hom}_{\mathbf{BT}(\mathcal{O}_{\overline{K}})}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\overline{K}})$$

induit

$$x \in \text{Hom}_{\mathbf{BT}(\mathcal{O}_C)}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_C)$$

et comme $\mathbf{A}_{\text{cris}} \rightarrow \mathcal{O}_C$ est un épaissement à puissances divisées, x induit une application \mathbf{A}_{cris} -linéaire compatible aux filtrations, Frobenius, connexions et à l'action de \mathcal{G}_{K_∞}

$$\mathbf{D}(x)_{\mathbf{A}_{\text{cris}}} \in \text{Hom}_{\mathbf{A}_{\text{cris}}, \text{Fil}^\bullet, \varphi, \nabla}(\mathbf{A}_{\text{cris}} \otimes_S \mathbf{M}(G), \mathbf{A}_{\text{cris}})$$

(on a $\mathbf{M}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) = (S, \text{Fil}^1 S, \sigma_1, d)$), où $\mathbf{D}(x)_{\mathbf{A}_{\text{cris}}}$ désigne l'évaluation du morphisme $\mathbf{D}(x)$ en l'épaissement $\mathbf{A}_{\text{cris}} \rightarrow \mathcal{O}_C$ (obtenu par changement de base $S \rightarrow \mathbf{A}_{\text{cris}}$), et l'image de (x, m) par l'accouplement est $\mathbf{D}(x)_{\mathbf{A}_{\text{cris}}}(1 \otimes m)$.

Cet accouplement donne lieu à une application \mathbf{A}_{cris} -linéaire, compatible

aux filtrations, Frobenius, et aux connexions

$$\rho_G: \mathbf{A}_{\text{cris}} \otimes_S \mathbf{M}(G) \rightarrow \mathbf{A}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{T}_p(G)^\vee$$

où $\mathbf{T}_p(G)^\vee$ désigne le \mathbf{Z}_p -module dual de $\mathbf{T}_p(G)$, muni de l'action naturelle de \mathcal{G}_K . Par fonctorialité, cette application est aussi compatible à l'action de \mathcal{G}_{K_∞} (pas de \mathcal{G}_K a priori parce que \mathcal{G}_K agit non trivialement sur S , vu que u correspond à $[\tilde{\omega}]$).

PROPOSITION 6.3 ([10, Theorem 7]). *Le conoyau de ρ_G est tué par t .*

Rappelons l'idée de la preuve. On traite d'abord explicitement le cas où $G = \mathbb{G}_m[p^\infty]$, pour lequel $\mathbf{M}(G) = (S, S, \sigma, d)$ et $\mathbf{T}_p(G) = \mathbf{Z}_p(1)$, l'application ρ_G n'étant alors autre que l'inclusion $\mathbf{A}_{\text{cris}} \subset \mathbf{A}_{\text{cris}}(-1) = t^{-1}\mathbf{A}_{\text{cris}}$.

Le cas général s'en déduit de la façon suivante. Soit $y \in \mathbf{T}_p(G)^\vee$, alors $ty \in \mathbf{T}_p(G)^\vee(1) \simeq \mathbf{T}_p(G^\mathbf{D})$ (où $G^\mathbf{D}$ désigne le dual de Cartier de G) correspond à un morphisme de groupes de Barsotti-Tate $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \rightarrow G^\mathbf{D}$ sur $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, donc (en passant au dual) à un morphisme de groupes de Barsotti-Tate $(ty)^\mathbf{D}: G \rightarrow (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^\mathbf{D} = \mathbb{G}_m[p^\infty]$, tel que $\mathbf{T}_p((ty)^\mathbf{D})^\vee: \mathbf{Z}_p t^{-1} = \mathbf{T}_p(\mathbb{G}_m[p^\infty])^\vee \rightarrow \mathbf{T}_p(G)^\vee$ envoie t^{-1} sur y .

Par ailleurs, comme \mathcal{O}_C est une $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ -algèbre et \mathbf{A}_{cris} un épaissement à puissances divisées de \mathcal{O}_C , on en déduit une application \mathbf{A}_{cris} -linéaire

$$\mathbf{M}((ty)^\mathbf{D})_{\mathbf{A}_{\text{cris}}} : \mathbf{A}_{\text{cris}} \otimes_S \mathbf{M}(\mathbb{G}_m[p^\infty]) \rightarrow \mathbf{A}_{\text{cris}} \otimes_S \mathbf{M}(G).$$

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_{\text{cris}} \otimes_S \mathbf{M}(G) & \xrightarrow{\rho_G} & \mathbf{A}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{T}_p(G)^\vee \\ \mathbf{M}((ty)^\mathbf{D})_{\mathbf{A}_{\text{cris}}} \uparrow & & \uparrow \text{Id}_{\mathbf{A}_{\text{cris}}} \otimes \mathbf{T}_p((ty)^\mathbf{D})^\vee \\ \mathbf{A}_{\text{cris}} \otimes_S \mathbf{M}(\mathbb{G}_m[p^\infty]) & \xrightarrow{\rho_{\mathbb{G}_m[p^\infty]}} & \mathbf{A}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{T}_p(\mathbb{G}_m[p^\infty])^\vee \end{array}$$

de sorte que si $x = \mathbf{M}((ty)^\mathbf{D})_{\mathbf{A}_{\text{cris}}}(1 \otimes 1) \in \mathbf{A}_{\text{cris}} \otimes_S \mathbf{M}(G)$, on a

$$\rho_G(x) = (\text{Id}_{\mathbf{A}_{\text{cris}}} \otimes \mathbf{T}_p((ty)^\mathbf{D})^\vee)(t \otimes t^{-1}) = t \otimes y,$$

et $t \otimes y \in \text{Im}(\rho_G)$.

COROLLAIRE 6.4. *Si $G \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$, alors $\mathbf{V}_p(G) \in \mathbf{Rep}_{\text{cris}}^{\mathbf{BT}}(G_K)$ et $\mathbf{D}_{\text{cris}}(\mathbf{V}_p(G)^\vee) = \mathbf{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0}[p^{-1}]$ comme (φ, ∇) -modules sur K_0 .*

DÉMONSTRATION. En inversant t , l'homomorphisme ρ_G induit un homomorphisme surjectif de \mathbf{B}_{cris} -modules

$$\rho_G[t^{-1}]: \mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{S[p^{-1}]} \mathbf{M}(G)[p^{-1}] \rightarrow \mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{V}_p(G)^\vee.$$

Comme les B_{cris} -modules $B_{\text{cris}} \otimes_{S[p^{-1}]} \mathbf{M}(G)[p^{-1}]$ et $B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_p(G)^\vee$ sont tous les deux libres de rang h (où h est la hauteur de G), et comme B_{cris} est intègre, l'homomorphisme $\rho_G[t^{-1}]$ est un isomorphisme. En outre, d'après le lemme 6.1, on a $\mathbf{M}(G)[p^{-1}] = \mathbf{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} S[p^{-1}]$: on dispose donc d'un isomorphisme B_{cris} -linéaire, compatible aux filtrations, Frobenius, connexions et à l'action de \mathcal{G}_{K_∞}

$$(**) \quad B_{\text{cris}} \otimes_{K_0} \mathbf{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}] \xrightarrow{\sim} B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_p(G)^\vee.$$

Montrons qu'en fait, cet isomorphisme est \mathcal{G}_K -équivariant (et pas seulement \mathcal{G}_{K_∞} -équivariant). On dispose des sous-groupes \mathcal{G}_K et \mathcal{G}_{K_∞} de \mathcal{G}_K . Rappelons (cf preuve de la proposition 3.8) que le groupe \mathcal{G}_K est engendré par \mathcal{G}_K et \mathcal{G}_{K_∞} . Pour montrer que $(**)$ est \mathcal{G}_K -équivariant, il s'agit donc de voir qu'il est \mathcal{G}_K -équivariant. Il suffit pour cela de vérifier que l'application

$$A_{\text{cris}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathbf{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0}) \rightarrow A_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(G)^\vee$$

(qui n'est pas un isomorphisme en général, mais dont $(**)$ se déduit par localisation) est \mathcal{G}_K -équivariante. Mais A_{cris} est isomorphe (comme anneau muni d'une action de \mathcal{G}_K) à l'anneau $A_{\text{cris}}\{\langle u_1, \dots, u_d \rangle\}$, séparé complété, pour la topologie p -adique, de l'anneau des polynômes à puissances divisées en u_1, \dots, u_d (cf section 3) à coefficients dans l'anneau A_{cris} relatif à \mathbb{K} (cf [7, Proposition 2.39]). Comme u_1, \dots, u_d sont invariants sous \mathcal{G}_K , il suffit de vérifier que l'application

$$A_{\text{cris}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathbf{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0}) \rightarrow A_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(G)^\vee$$

est \mathcal{G}_K -équivariante. Mais cela résulte de la \mathcal{G}_K -équivariance de

$$B_{\text{cris}} \otimes_{K_0} \mathbf{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}] \xrightarrow{\sim} B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_p(G)^\vee$$

([15, Corollary 2.1.14] et la preuve de [15, Corollary 2.2.6]).

En prenant les invariants sous \mathcal{G}_K , on a donc

$$D_{\text{cris}}(V_p(G)^\vee) = \mathbf{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}]$$

et $\dim_{K_0}(D_{\text{cris}}(V_p(G)^\vee)) = h = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V_p(G)^\vee)$: la représentation $V_p(G)^\vee$ est donc cristalline, et il en est de même de la représentation $V_p(G)$.

Enfin, les poids de Hodge-Tate de $V_p(G)$ peuvent se calculer après le changement de base $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_K$ où $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K.W(k)$: on est alors ramenés au cas où k est parfait, et donc à [19]. Notons qu'on peut aussi invoquer [11, (2.3.3) et (2.5)].

6.5. Remarquons que \mathfrak{S} est un sous-anneau de S . En effet, si $n \in \mathbf{N}$ et $n = eq + r$ avec $q \in \mathbf{N}$ et $0 \leq r < e$ est division euclidienne de n par e , on a

$$u^n = q!(u^e)^{[q]}u^r \in S$$

et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u^n = 0$ dans S .

6.6. Soit $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}}, \nabla_{\mathfrak{M}}) \in \mathbf{M}_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)$. Suivant Breuil (cf. [5]), on pose

$$M = S_{\sigma} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$$

(où le σ signifie qu'on voit S comme une \mathfrak{S} -algèbre via le composé $\mathfrak{S} \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{S} \subseteq S$)

$$\mathrm{Fil}^1 M = \{m \in M, (1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}})(m) \in \mathrm{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}\}$$

et on définit $\varphi_1: \mathrm{Fil}^1 M \rightarrow M$ comme l'application composée

$$\mathrm{Fil}^1 M \xrightarrow{1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}}} \mathrm{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \xrightarrow{\sigma_1 \otimes 1} S_{\sigma} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} = M.$$

En outre, on a $M/I_u M \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}/u\mathfrak{M}$ est par définition muni d'une connexion intégrable quasi-nilpotente $\nabla: M/I_u M \rightarrow (M/I_u M) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$.

PROPOSITION 6.7. *Cela définit un foncteur $\mathbf{BT}_{\mathfrak{S}}^S: \mathbf{M}_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla) \rightarrow \mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)$.*

DÉMONSTRATION. Reprenons les notations qui précèdent. Il s'agit de vérifier les propriétés (a), (b) et (c) de la définition 5.4.

Si $x \in \mathrm{Fil}^1 S$ et $m \in M$, on a $(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}})(xm) = x(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}})(m) \in xS \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \subseteq \subseteq \mathrm{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$. D'autre part, par définition de $\mathrm{Fil}^1 M$, on a un homomorphisme injectif

$$M/\mathrm{Fil}^1 M \rightarrow (S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})/(\mathrm{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})$$

induit par $1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}}$. Mais comme $S/\mathrm{Fil}^1 S = \mathcal{O}_K$, le \mathcal{O}_K -module $(S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})/(\mathrm{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}) \simeq \mathcal{O}_K \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ est libre car \mathfrak{M} l'est sur \mathfrak{S} . Il est donc de même du \mathcal{O}_K -module $M/\mathrm{Fil}^1 M$ (car \mathcal{O}_K est un anneau de valuation discrète), ce qui prouve (a).

Soit $m \in \mathfrak{M}$. Comme $\mathrm{Coker}(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}}: \sigma^* \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M})$ est tué par $E(u)$, il existe $\tilde{m} \in \mathfrak{S}_{\sigma} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ tel que $(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}})(\tilde{m}) = E(u)m$. On a alors $\tilde{m} \in M = S_{\sigma} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ et

$$(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}})(\tilde{m}) = 1 \otimes E(u)m = E(u) \otimes m \in S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}.$$

On a donc $(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}})(\tilde{m}) \in \text{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ d'où $\tilde{m} \in \text{Fil}^1 M$. De plus, on a

$$\varphi_1(\tilde{m}) = (\sigma_1 \otimes 1)(E(u) \otimes m) = \sigma_1(E(u)) \otimes m \in M$$

et comme $\sigma_1(E(u)) \in S^\times$ (remarque 5.2), on a $1 \otimes m \in \text{Im}(1 \otimes \varphi_1: \sigma^* M \rightarrow M)$, ce qui prouve (b).

Si maintenant $m \in \mathfrak{M}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(1 \otimes m) &= \sigma_1(E(u))^{-1}(\sigma_1 \otimes 1) \circ (1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}})(E(u) \otimes m) \\ &= \sigma_1(E(u))^{-1}(\sigma_1 \otimes 1)(E(u) \otimes \varphi_{\mathfrak{M}}(m)) \\ &= 1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}}(m) \end{aligned}$$

et l'application induite par φ sur $M/I_u M$ n'est autre que $\varphi_{\mathfrak{M}}$: elle commute à ∇ et la condition (c) est vérifiée. \square

PROPOSITION 6.8. *Le foncteur $\mathbf{BT}_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{S}}$ est pleinement fidèle.*

DÉMONSTRATION. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $\mathfrak{M}_i \in \mathbf{M}_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)$ et $M_i = \mathbf{BT}_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}_i)$. Il s'agit de prouver que l'homomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathbf{M}_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{M}_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)}(M_1, M_2)$$

est un isomorphisme. On a

$$\text{Hom}_{\mathbf{M}_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)}(M_1, M_2) = \left\{ \begin{array}{l} f \in \text{Hom}_S(S_{\sigma} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_1, S_{\sigma} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_2) \\ (1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}_2}) \circ f = f \circ (1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}_1}) \\ f(\text{Fil}^1 M_1) \subseteq \text{Fil}^1 M_2 \\ \nabla_{\mathfrak{M}_2} \circ f = f \circ \nabla_{\mathfrak{M}_1} \end{array} \right\}.$$

Il suffit de vérifier que pour tout $f \in \text{Hom}_{\mathbf{M}_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)}(M_1, M_2)$, on a $f(\mathfrak{M}_1) \subseteq \mathfrak{M}_2$, et on aura $f = \mathbf{BT}_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{S}}(f|_{\mathfrak{M}_1})$ i.e. la bijectivité souhaitée.

Les \mathfrak{S} -modules \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 étant libres, on en fixe des bases. Les applications linéarisées de $\varphi_{\mathfrak{M}_1}$ et $\varphi_{\mathfrak{M}_2}$ sont alors représentées par des matrices $\Phi_1 \in \mathbf{M}_{r_1}(\mathfrak{S})$ et $\Phi_2 \in \mathbf{M}_{r_2}(\mathfrak{S})$, où r_1 (resp. r_2) est le rang de \mathfrak{M}_1 (resp. \mathfrak{M}_2). De même, l'application f est décrite par une matrice $U \in \mathbf{M}_{r_2 \times r_1}(S)$. Comme $(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}_2}) \circ f = f \circ (1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}_1})$, on a la relation

$$(4) \quad \Phi_2 \sigma(U) = U \Phi_1.$$

Montrons que cela implique que $U \in \mathbf{M}_{r_2 \times r_1}(\mathfrak{S})$ et on aura fini. Remarquons tout d'abord que comme $\text{Coker}(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}_1}: \sigma^* \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_1)$ est tué par $E(u)$, on a $\Phi_1 \in \text{GL}_{r_1}(\mathfrak{S}[E(u)^{-1}])$ et $E(u)\Phi_1^{-1} \in \mathbf{M}_{r_1}(\mathfrak{S})$. L'équation (4) se réécrit alors

$E(u)U = \Phi_2\sigma(U)(E(u)\Phi_1^{-1})$. Une récurrence immédiate implique alors que pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe des matrices $\Xi_1^{(N)} \in \mathbf{M}_{r_1}(\mathfrak{S})$ et $\Xi_2^{(N)} \in \mathbf{M}_{r_2}(\mathfrak{S})$ telles que

$$(5) \quad E(u)^N U = \Xi_2^{(N)} \sigma^N(U) \Xi_1^{(N)}$$

On a $S = \mathfrak{S} + \text{Fil}^1 S$, donc $\sigma(S) \subseteq \sigma(\mathfrak{S}) + pS = \sigma(\mathfrak{S}) + p\mathfrak{S} + p\text{Fil}^1 S$ (car $\sigma(\text{Fil}^1 S) \subseteq pS$). Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a donc

$$\sigma^N(S) \subseteq \sigma^N(\mathfrak{S}) + p\sigma^{N-1}(\mathfrak{S}) + \cdots + p^N \mathfrak{S} + p^N \text{Fil}^1 S$$

d'où $\sigma^N(S) \subseteq \mathfrak{S} + p^N S$. L'égalité (5) implique donc que pour tout $N \in \mathbf{N}$ on a

$$U \in \frac{1}{E(u)^N} \mathbf{M}_{r_2 \times r_1}(\mathfrak{S} + p^N S).$$

Il suffit donc de vérifier le lemme suivant :

LEMME 6.9. *Si $f \in S$ est tel que pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a $E(u)^N f \in \mathfrak{S} + p^N S$, alors $f \in \mathfrak{S}$.*

DÉMONSTRATION. On voit S comme un sous- \mathcal{O}_{K_0} -module de

$$(K_0 \oplus K_0 u \oplus \cdots \oplus K_0 u^{e-1}) [[E(u)]].$$

On a une écriture unique $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n E(u)^{[n]}$ avec $f_n \in \mathcal{O}_{K_0} \oplus \mathcal{O}_{K_0} u \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{K_0} u^{e-1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par hypothèse, pour tout $n, N \in \mathbf{N}$, il existe $a_{n,N}, b_{n,N} \in \mathcal{O}_{K_0} \oplus \mathcal{O}_{K_0} u \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{K_0} u^{e-1}$ tels que

$$E(u)^N f = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,N} E(u)^n + p^N \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,N} E(u)^{[n]}.$$

On a donc l'égalité

$$\frac{1}{n!} f_n = a_{n+N,N} + p^N \frac{b_{n+N,N}}{(n+N)!}.$$

Fixons $n \in \mathbf{N}$ et posons $N = p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1 - n$. Alors $v_p((n+N)!) = \frac{(n+N)-n}{p-1} = \frac{N}{p-1}$ et donc $v_p\left(\frac{p^N}{(n+N)!}\right) = N \frac{p-2}{p-1} \geq 0$: on a en fait

$$\frac{1}{n!} f_n \in \mathcal{O}_{K_0} \oplus \mathcal{O}_{K_0} u \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{K_0} u^{e-1}$$

et donc $f \in (\mathcal{O}_{K_0} \oplus \mathcal{O}_{K_0} u \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{K_0} u^{e-1}) [[E(u)]] = \mathfrak{S}$. □

THÉORÈME 6.10 (cf [15, Theorem 0.3]). *Le foncteur V_p induit une équivalence de catégories*

$$\mathbf{BT}(\mathcal{O}_K) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}_{\text{cris}}^{\mathbf{BT}}(\mathcal{G}_K)$$

en particulier toute représentation cristalline de \mathcal{G}_K à poids de Hodge-Tate dans $\{0, 1\}$ provient d'un groupe p -divisible sur \mathcal{O}_K .

DÉMONSTRATION. On sait déjà que le foncteur est pleinement fidèle. Soit $V \in \mathbf{Rep}_{\text{cris}}^{\mathbf{BT}}(\mathcal{G}_K)$, $D = D_{\text{cris}}(V) \in \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\text{fa}, \mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)$ et $M = \mathbf{BT}_{\mathbb{Z}}^S \circ \mathbf{BT}_{\mathbb{Z}}(D) \in \mathbf{M}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$ (cf corollaire 4.18 et proposition 6.7). Comme le foncteur M est une équivalence de catégories

$$\mathbf{BT}(\mathcal{O}_K) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$$

il existe $G \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$ tel que $M \simeq \mathbf{M}(G^{\mathbb{D}})$ dans $\mathbf{M}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$. D'après le corollaire 6.4 appliqué à $G^{\mathbb{D}}$, la représentation $V_p(G^{\mathbb{D}})$ est cristalline et on a $D_{\text{cris}}(V_p(G^{\mathbb{D}})^{\vee}) = \mathbf{D}(G_k^{\mathbb{D}})(\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}]$. On a donc un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{K_0} \mathbf{D}(G_k^{\mathbb{D}})(\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}] &\xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_p(G^{\mathbb{D}})^{\vee} \simeq \\ &\simeq \mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_p(G)(-1) \simeq \mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_p(G) \end{aligned}$$

qui est \mathbf{B}_{cris} -linéaire \mathcal{G}_K -équivariant, compatible avec l'action de \mathcal{G}_K , les Frobenius, les connexions et les filtrations. Par ailleurs, on a $\mathbf{M}(G^{\mathbb{D}})[p^{-1}] = \mathbf{D}(G_k^{\mathbb{D}})(\mathcal{O}_{K_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} S[p^{-1}]$ d'après le lemme 6.1. On en déduit un isomorphisme $\mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_p(G) \simeq \mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_S M$, compatible avec l'action de $\mathcal{G}_{K_{\infty}}$, les Frobenius, les connexions et les filtrations. Par ailleurs, d'après les propositions 4.11 et 5.7, on a un homomorphisme naturel

$$(6) \quad D \otimes_{K_0} S[p^{-1}] \xrightarrow{\sim} M \otimes_S S[p^{-1}]$$

qui est un isomorphisme de $S[p^{-1}]$ -modules, compatible aux Frobenius et aux connexions. Il est en fait aussi compatible aux filtrations après tensorisation par K . En effet, on a

$$\text{Fil}^1 M = \{x \in M, (1 \otimes \varphi)(x) \in \text{Fil}^1 S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}\}$$

où $\mathfrak{M} = \mathbf{BT}_{\mathbb{Z}}(D)$, d'où

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}_{K,0} \otimes_S \text{Fil}^1 M &= \{x \in \widehat{\mathbb{E}}_{K,0} \otimes_S M, (1 \otimes \varphi)(x) \in E(u) \widehat{\mathbb{E}}_{K,0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}\} \\ &= \widehat{\mathbb{E}}_{K,0} \otimes_{\mathcal{A}_K} (1 \otimes \varphi)(\text{Fil}^1 \sigma^* \mathcal{M}_K(D_{K_0})). \end{aligned}$$

Mais d'après [15, Lemma 1.2.12 (4)], on a un isomorphisme

$$\widehat{\mathcal{E}}_{K,0} \otimes_{\mathcal{A}_K} (1 \otimes \varphi)(\mathrm{Fil}^1 \sigma^* \mathcal{M}_K(D_{K_0})) \xrightarrow{\sim} E(u) \widehat{\mathcal{E}}_{K,0} \otimes_K D_K + \widehat{\mathcal{E}}_{K,0} \otimes_K \mathrm{Fil}^1 D_K$$

et donc $\widehat{\mathcal{E}}_{K,0} \otimes_S \mathrm{Fil}^1 M \simeq E(u) \widehat{\mathcal{E}}_{K,0} \otimes_K D_K + \widehat{\mathcal{E}}_{K,0} \otimes_K \mathrm{Fil}^1 D_K$ d'où $\mathbb{K} \otimes_S \mathrm{Fil}^1 M \simeq \mathrm{Fil}^1 D_K$ en quotientant par $E(u) \widehat{\mathcal{E}}_{K,0}$.

On a donc un isomorphisme de B_{cris} -modules compatible à l'action de \mathcal{G}_{K_∞} , aux Frobenius, aux connexions et aux filtrations :

$$B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_p(G) \simeq B_{\mathrm{cris}} \otimes_S M \simeq B_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} D \simeq B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V.$$

En prenant les invariants sous φ , les sections horizontales dans le Fil^0 , on en déduit un isomorphisme \mathcal{G}_{K_∞} -équivariant $V \xrightarrow{\sim} V_p(G)$. Comme V et $V_p(G)$ sont cristallines, on a en fait $V \simeq V_p(G)$ comme représentations de \mathcal{G}_K en vertu de la proposition 3.8. \square

REFERENCES

- [1] P. BERTHELOT, *Théorie de Dieudonné sur un anneau de valuation parfait*, Annales Scientifiques de l'ENS 4^{ème} série, t. 13, pp. 225–268, Gauthier-Villars (1980).
- [2] P. BERTHELOT - L. BREEN - W. MESSING, *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lecture Notes in Mathematics **930**, x+261, Springer-Verlag (1982).
- [3] P. BERTHELOT - W. MESSING, *Théorie de Dieudonné cristalline III. Théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, *The Grothendieck Festschrift*, Vol. I, p. 173–247, Progress in Mathematics, **86**, Birkhäuser (1990).
- [4] C. BREUIL, *Représentations p -adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Ann., **307**, no. 2 (1997), pp. 191–224.
- [5] C. BREUIL, *Schémas en groupes et corps des normes* (non publié) 13p, (1998).
- [6] C. BREUIL, *Groupes p -divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Ann. Math. (2) **152**, no. 2 (2000), pp. 489–549.
- [7] O. BRINON, *Représentations cristallines dans le cas d'un corps résiduel imparfait*, Annales de l'Institut Fourier, **56**, no. 4 (2006), pp. 919–999.
- [8] A.J. DE JONG, *Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry*, Publ. Math. de l'IHES, **82** (1995), pp. 5–96.
- [9] A.J. DE JONG, *Homomorphisms of Barsotti-Tate groups and crystals in positive characteristic*, Invent. Math., **134**, no. 2, Springer Verlag (1998), pp. 301–333.
- [10] G. FALTINGS, *Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings*, JAMS, **12**, no. 1 (1999), pp. 117–144.
- [11] O. HYODO, *On variation of Hodge-Tate structures*, Math. Ann. **284**, no. 1 (1989), pp. 7–22.
- [12] N. KATZ, *Slope filtration of F -crystals*, *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978)*, Vol. I, Astérisque **63**, SMF (1979), pp. 113–163.
- [13] K. KEDLAYA, *A p -adic local monodromy theorem*, Ann. of Math., **160** no. 1 (2004), pp. 93–184.

- [14] K. KEDLAYA, *Slope filtrations revisited*, Doc. Math., **10** (2005), pp. 447–525.
- [15] M. KISIN, *Crystalline representations and F -crystals*, in *Algebraic Geometry and Number Theory, in Honor of Vladimir Drinfeld's 50th Birthday*, Progress in Math. **253**, Birkhäuser, (2006).
- [16] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*, xiii+320, Cambridge university Press, (1986).
- [17] B. MAZUR, W. MESSING, *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*, Lecture notes in Mathematics **370**, vi+134, Springer Verlag, (1974).
- [18] W. MESSING, *Crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*, Lecture notes in Mathematics **264**, Springer Verlag (1972), p. 190.
- [19] J. TATE, *p -divisible groups*, *Proceedings of a conference on local fields*, Springer Verlag (1967), pp. 158–183.

Manoscritto pervenuto in redazione il 29 settembre 2006.

