REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 112 (2004)

Des Domaines de Fatou-Bieberbach à Plusieurs Feuillets.

CLAUDIO MENEGHINI (*)

RÉSUMÉ - Nous définissons l'idée de bassin d'attraction pour l'itération des germes holomorphes attractifs de $(\mathbb{C}^N, 0)$ et la notion de domaine de Riemann-Fatou-Bieberbach: c'est un domaine de Riemann R biholomorphe à $\mathbb{C}^N$ mais recouvrant une region $\Omega \subset \mathbb{C}^N$. Enfin, étant donné un endomorphisme de $\mathbb{C}^N$ admettant un point fixe répulsif en 0 (satisfaisant une hypothèse technique supplémentaire), nous prouvons que le bassin d'attraction du germe inverse admet un recouvrement par un domaine de Riemann-Fatou-Bieberbach.

1. Introduction.

Rappelons qu'un domaine de Fatou-Bieberbach est un ouvert de $\mathbb{C}^N$ biholomorphe à $\mathbb{C}^N$; le bassin d'attraction Ω d'un point fixe d'un automorphisme f de $\mathbb{C}^N$ a cette propriété dans le cas attractif (voir [RR], appendice), et, parfois, dans le cas des applications tangentes à l'identité (voir [Wck]). Pour plus d'exemples de tels domaines, voir [BS], [BF], [FS], [G], [K], [My], [Si], [Ste] et [Stn].

Nous proposons une généralisation de ce concept, consistant en un domaine de Riemann (M, π) tel que M est biholomorphe à $\mathbb{C}^N$ et pourtant $\pi(\mathsf{M})$ est un ouvert propre Ω de $\mathbb{C}^N$.

Nous montrerons que, étant donné un endomorphisme h de $\mathbb{C}^N$ avec un point fixe répulsif régulier en 0 (voir déf.), le bassin potentiel d'attraction (déf.) de 0 pour l'inverse local h_0^{-1} peut être recouvert par un domaine de Riemann (M, π) biholomorphe à $\mathbb{C}^N$. Pour ce qui concerne

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Parma, Strada M. D'Azeglio, 85 43100, Parma.

les notions fondamentales sur l'extension analytique, le lecteur pourra consulter [9], chap.2,6 ou [7] chap. 1(iv); pour la définition de domaine de Riemann, voir par exemple [5], p.43; enfin, le théoreme de Poincaré-Dulac peut être trouvé dans [10], appendice, lemme 3.

2. Préliminaires.

Soient N et M deux variétés complexes: rappelons que un élément d'application holomorphe de N dans M est une paire (U, f), où U est un ouvert connexe de N and f une application holomorphe definie sur U et à valeurs dans M. Une extension analytique (S, π, j, F) d'un élément d'application holomorphe consiste en un domaine de Riemann connexe (S, π) au-dessus d'un ouvert $\Omega \subset \mathsf{N}$ tel que $U \subset \pi(S)$, en une immersion holomorphe $j: U \to S$ telle que $\pi \circ j = \boldsymbol{id}|_U$ et en une application holomorphe $F: S \to \mathsf{M}$ telle que $F \circ j = f$.

Un morphisme entre deux extensions analytiques $\mathcal{S} = (S, \pi, j, F)$ et $\mathcal{T} = (T, \varrho, \ell, G)$ du même élément (U, f) est une application holomorphe $h: T \to S$ telle que $h \circ \ell = j$. La composition de deux morphismes est un morphisme; si un morphisme admet une application holomorphe comme inverse, elle est encore un morphisme: dans ce cas, nous parlerons d'un isomorphisme d'extensions analytiques.

DÉFINITION 1. *Une extension analytique $\mathcal{S} = (S, \pi, j, F)$ de l'élément (U, f) est* maximale *si, pour chaque extension analytique $\mathcal{T} = (T, \varrho, \ell, G)$ de (U, f) il existe un morphisme $h: \mathcal{T} \to \mathcal{S}$.*

Remarquons que deux extensions maximales du même element sont forcément isomorphes et donc l'extension analytique maximale est unique à isomorphismes près.

THÉEORÈME 2. *Tout élément (U, f) d'application holomorphe admet une extension analytique maximale.* ■

Pour une démonstration, on pourra consulter [N], chap. 2.6 ou ou bien [Ma] chap. 1(iv).

Le lemme suivant établit une liaison entre les extensions analytiques maximales de deux éléments qui sont inverses l'un de l'autre.

LEMME 3. *Soient $(\mathcal{U}, f)$ et $(\mathcal{V}, g)$ deux éléments d'applications holomorphes entre ouverts de $\mathbb{C}^N$, inverses l'un de de l'autre; soient*

(R, π, j, Φ) et (S, ϱ, ℓ, Ψ) leur extensions analytiques maximales: alors, si $\mathcal{C} = \{\text{points critiques de } \Phi\}$ et $\mathcal{D} = \{\text{points critiques de } \Psi\}$, on a $\Phi(R \setminus \mathcal{C}) = \varrho(S \setminus \mathcal{D})$.

DÉMONSTRATION. *A)* $\Phi(R \setminus \mathcal{C}) \subset \varrho(S \setminus \mathcal{D})$: soit $\xi \in R \setminus \mathcal{C}$ et $\Phi(\xi) = \eta$: il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_1$ de ξ, ouverts $\mathcal{U}_2 \subset \pi(\mathcal{U}_1)$, $\mathcal{V}_2 \subset \Phi(\mathcal{U}_1)$ et une fonction biholomorphe g_2: $\mathcal{V}_2 \to \mathcal{U}_2$ (avec inverse f_2: $\mathcal{U}_2 \to \mathcal{V}_2$) tels que $(\mathcal{U}_2, f_2)$ et $(\mathcal{U}, f)$ soient l'un prolongement analyitique de l'autre, aussi que $(\mathcal{V}_2, g_2)$ et $(\mathcal{V}, g)$. Par construction il existe des immersions holomorphes $\tilde{\jmath} : \mathcal{U}_2 \to R$ et $\tilde{\ell} : \mathcal{V}_2 \to S$ telles que $\pi \circ \tilde{\jmath} = \boldsymbol{id}$ et $\varrho \circ \tilde{\ell} = \boldsymbol{id}$. Soit $\mathcal{V}_1 = \Phi(\mathcal{U}_1)$ et

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{V}_2 \colon \Phi(x) = y\}.$$

Définissons $J : \mathcal{V}_2 \to \Sigma$ en posant $J(v) = (\tilde{\jmath} \circ g_2(v), v)$. Or $(\Sigma, pr_2, J, \pi \circ pr_1)$ est une extension analytique de $(\mathcal{V}_2, g_2)$ car $\pi \circ pr_1 \circ J = \pi \circ \tilde{\jmath} \circ g_2 = g_2$. Mais $(\mathcal{V}_2, g_2)$ est un prolongement analytique de $(\mathcal{V}, g)$, donc $(\Sigma, pr_2, J, \pi \circ pr_1)$ est une extension analytique de $(\mathcal{V}, g)$.

Grâce à la maximalité, cela entraîne qu'il existe une fonction holomorphe $h : \Sigma \to S$ telle que $\varrho \circ h = pr_2$, donc $\eta = pr_2(\xi, \eta) = \varrho \circ h(\xi, \eta) \in \varrho(S)$.

Enfin, par differentation composée, aucun point de $\varrho^{-1}(\eta)$ ne peut être critique pour Ψ.

B) $\Phi(R \setminus \mathcal{C}) \supset \varrho(S \setminus \mathcal{D})$: soit $s \in S$ un point régulier de Ψ: il existe un voisinage V de s ne contenant que points réguliers de Ψ. Ça signifie que, pour chaque $s' \in V$, il existe un élément d'application holomorphe $(\mathcal{V}', \tilde{g}_{s'})$ (avec $\varrho(s') \in \mathcal{V}'$) qui est un prolongement analytique de $(\mathcal{V}, g)$; en outre, il existe une immersion holomorphe $\tilde{\ell} : \mathcal{V}' \to V$. Par *A)* désormais prouvé, $\Psi(s) \in \pi(R \setminus \mathcal{C})$, donc il existe $p \in R \setminus \mathcal{C}$ et un voisinage W de p dans $R \setminus \mathcal{C}$ tels que $\pi(p) = \Psi(s)$ et $\pi^{-1}(\tilde{g}(\mathcal{V}')) \cap W \neq \emptyset$. Posons $W' = \pi^{-1}(\tilde{g}(\mathcal{V}')) \cap W$: on peut supposer, sans perte de généralité, que π soit inversible dans W': alors il existe une immersion holomorphe $\tilde{\jmath} : \tilde{g}(\mathcal{V}') \to W$. Donc, pour chaque $\zeta \in \tilde{\jmath}(\tilde{g}(\mathcal{V}'))$, il existe $\eta \in \tilde{\ell}(\mathcal{V}')$ tel que $\Phi(\zeta) = \Phi(\tilde{\jmath} \circ \tilde{g} \circ \varrho(\eta))$. Or par la définition de extension analytique, on a $\Phi \circ \tilde{\jmath} \circ \tilde{g} = \boldsymbol{id}$, c'est-à-dire $\Phi(\zeta) = \varrho(\eta)$. Considérons maintenant la fonction holomorphe $\Xi : W \times V \to \mathbb{C}^N$ définie en posant $\Xi(w, v) = \Phi(w) - \varrho(v)$: on a $\Xi \equiv 0$ dans $\tilde{\jmath}(\tilde{g}(\mathcal{V}')) \times \tilde{\ell}(\mathcal{V}')$: cet ensemble est ouvert dans $W \times V$, donc $\Xi \equiv 0$ dans $W \times V$. Cela implique finalement $\Phi(p) = \varrho(s)$, ce qui conclut la démonstration. ■

Le lemme suivant, dont la démonstration est élémentaire, décrit le comportement d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe attractif P (dans la suite on supposera toujours $P = 0$).

LEMME 4. *Soit V un voisinage de 0 en $\mathbb{C}^N$ et $F : V \to \mathbb{C}^N$ une application holomorphe avec un point fixe attractif en 0: alors il existe $\alpha < 1$ et un voisinage ouvert $\mathsf{R} \subset V$ de P tel que $F^{\circ n}(\mathsf{R}) \subset \alpha^n \mathsf{R}$.*

3. Le théorème principal.

DÉFINITION 5. Soit (R, F) un élément d'application holomorphe avec un point fixe attractif en 0; on dira que p est dans le bassin potentiel d'attraction de 0 pour la dynamique de F (dans la suite: $p \in \mathsf{BPA}(F, 0)$) s'il existe une suite finie de points $\{x_\nu\}_{\nu = 0 \dots N}$ et des prolongements analytiques (V_ν, F_ν) de F tels que $x_0 = p$, $x_\nu \in V_\nu$, $F_\nu(x_\nu) = x_{\nu+1}$, $F_\nu(V_\nu) \subset V_{\nu+1}$ et $\bigcirc_{\nu=0}^{N} F_\nu(V_0) \subset \mathsf{R}$.

DÉFINITION 6. Soit h un endomorphisme de $\mathbb{C}^N$ avec un point fixe répulsif en 0; le point fixe est régulier s'il admet un voisinage R sur lequel h est inversible, $[h|_{\mathsf{R}}]^{-k} \subset \alpha^k \mathsf{R}$ pour $0 < \alpha < 1$ et, pour chaque k, $h^{\circ k}$ est un revêtement topologique; on appellera R un voisinage de régularité de 0.

LEMME 7. *Soit $0 \in \mathbb{C}^N$ un point fixe répulsif régulier pour h, R un voisinage de régularité de 0 et $F := [h|_{\mathsf{R}}]^{-1}$. Alors $p \in \mathsf{BPA}(F, 0)$ si et seulement si il existe $k \geq 1$ et un prolongement analytique (V_k, F_k) de $F^{\circ k}$ tel que $F_k(V_k) \subset \mathsf{R}$. Par conséquent, pour tout $k \geq 1$, $h^{\circ k}(\mathsf{R}) \subset \mathsf{BPA}(F, 0)$.*

DÉMONSTRATION: ($\Rightarrow$) étant trivial, on prouvera ($\Leftarrow$). Pour chaque $0 < \nu \leq k$ et $x \in h^\nu(\mathsf{R})$ il existe un inverse locale $\phi_{\nu, x}$ de h^ν et un voisinage $\mathcal{U}_{\nu, x}$ de x tels que $\phi_{\nu, x}(\mathcal{U}_{\nu, x}) \subset \mathsf{R}$. Posons $x_0 := p$, $x_{\nu+1} := h^{\circ(k-\nu+1)} \circ \phi_{k-\nu, x_\nu}(x_\nu)$ et $F_\nu := h^{\circ(k-\nu+1)} \circ \phi_{k-\nu, x_\nu}$ pour $0 \leq \nu < k$. Alors $F_\nu(x_\nu) = x_{\nu+1}$, $F_\nu(\mathcal{U}_{\nu, x_\nu}) \subset \mathcal{U}_{\nu-1, x_{\nu+1}}$ et $\bigcirc_{\nu=0}^{k} F_\nu(\mathcal{U}_{k, p}) \subset \mathsf{R}$. On conclut en posant, selon la notation de la définition 5, $V_\nu := \mathcal{U}_{k-\nu, x_\nu}$. ■

DÉFINITION 8. *Un* domaine de Riemann-Fatou-Bieberbach *au-dessus d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ est un domaine de Riemann (R, π) au-dessus de Ω, tel que R est biholomorphe à $\mathbb{C}^N$.*

THÉORÉME 9. *Soit h un endomorphisme de $\mathbb{C}^N$ avec un point fixe répulsif régulier en* 0, R *un voisinage de régularité de* 0, Ω *le bassin potentiel d'attraction de* 0 *pour la dynamique de* $F := [h|_{\mathsf{R}}]^{-1}$. *Alors il existe un domaine de Riemann-Fatou-Bieberbach* M *au-dessus de* Ω.

DÉMONSTRATION. Rappelons que $F^{\circ n}(\mathsf{R}) \subset \alpha^n \mathsf{R}$ pour $0 < \alpha < 1$ convenable. Grâce au théorème de Poincaré-Dulac, on prouve, comme dans la démonstration du théorème de l'appendice de [RR], qu'il existe un automorphisme polynomial triangulaire G (avec $G(0) = 0$ et $G_* |_0 = F_*(0)$) de $\mathbb{C}^N$ et une application polynomiale $T : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$, avec $T = 0$, $T_* |_0 = \boldsymbol{id}$ tels que la suite d'applications holomorphes $\{(G^{-k} \circ T \circ F^{\circ k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de R , pour $k \to \infty$, vers une application holomorphe $\boldsymbol{\Psi}_0 \colon \mathsf{R} \to \mathbb{C}^N$, satisfaisant

$$\boldsymbol{\Psi}_0(0) = 0, \ (\boldsymbol{\Psi}_0)_* = \boldsymbol{id} \text{ et } G^{-n} \circ \boldsymbol{\Psi}_0 = \boldsymbol{\Psi}_0 \mathsf{h}^n. \tag{1}$$

Considérons le prolongement analytique maximal $(\mathsf{M}, \pi, j, \Psi)$ de $\boldsymbol{\Psi}_0$.

LEMME 10. *Si* $x_1, x_2 \in \mathsf{M}$ *et* $\Psi(x_1) = \Psi(x_2)$, *on a* $\pi(x_1) = \pi(x_2)$.

DÉMONSTRATION. Comme $\pi(x_1), \pi(x_2) \in \Omega$, il existe des voisinages $\mathcal{U}_i$ de $\pi(x_i)$, des points $\{x_{ik}\}_{k=0 \dots N}$ (avec $x_{i0} = \pi(x_i)$, $i = 1, 2$) et des éléments d'applications holomorphes (W_{ik}, f_{ik}), $i = 1, 2$, chacun desquels prolongement analytique de F, tels que $x_{ik} \in W_{ik}$, $f_{ik}(x_{ik}) = x_{i, k+1}$ et $\bigcirc_{l=0}^{N} f_{il}(W_i 0) \subset \mathsf{R}$, $(i = 1, 2)$ En outre, on peut supposer, sans perte de généralité, que j admet des prolongements analytiques j_{ik} sur tous les W_{ik}, de façon telle que $\{j_{ik}(W_{ik})\}$ (i=1,2) soient deux chaînes d'ouverts en M connectant respectivement $j(0)$ avec x_1 et $j(0)$ avec x_2. On peut aussi supposer que, pour k assez grand, $W_{ik} \equiv \mathsf{R}$ et $j_{ik} \equiv j$, $i = 1, 2$.

Posons $F_{ik} = \bigcirc_{l=0}^{k} f_{il}$, $i = 1, 2$; on a $\Psi \circ j_{ik} \circ F_{ik} \circ \pi = G^k \circ \Psi$, donc

$$\Psi j_{1k} F_{1k} \pi(x_1) = G^k \Psi(x_1) = G^k \Psi(x_2) = \Psi j_{2k} F_{2k} \pi(x_2). \tag{2}$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que j soit inversible dans R et Ψ injective dans $j(\mathsf{R})$. On a alors que (2) entraîne, pour $k = N$ $j_{1N} \circ F_{1N} \circ \pi(x_1) = j_{2N} \circ F_{2N} \circ \pi(x_2)$; en appliquant $h^{\circ N} \circ \pi$ on obtient $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. ■

LEMME 11. *On a:* (i) $\Omega = \pi(\mathsf{M})$; (ii) π *est un revêtement topologique et* (iii) ψ *est un revêtement topologique.*

DÉMONSTRATION. (i): grâce au lemme 7, $\Omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} [h^{\circ k}(\mathsf{R})]$. Comme $\mathsf{R} \subset h(\mathsf{R})$ on a $h(\Omega) = \Omega$. Prouvons d'abord que $\Omega \subset \pi(\mathsf{M})$. Si $p \in \Omega$, il existe, encore grâce au lemme 7, $n \in \mathbb{N}$ et un prolongement analytique (V, F_n) de (R, F^n) à un voisinage V de p, tel que $F_n(V) \subset \mathsf{R}$.

Cela entraîne que la suite d'applications holomorphes

$$\{(G^{-k} \circ T \circ F^{\circ k-n}) \circ F_n\}_{k \in \mathbb{N}} \tag{3}$$

(où T est l'application polynomiale de $\mathbb{C}^N$ introduite avant l'équation (1)) converge (par rapport à k) uniformément sur les compacts de V vers une application holomorphe $\boldsymbol{\Psi}_p$, qui est visiblement un prolongement analytique de Ψ_0 car F_n est un prolongement analytique de F^n. Ainsi $p \in \pi(\mathsf{M})$.

Soit $p \in \pi(\mathsf{M})$: il existe un prolongement analytique $(\mathcal{U}_p, \Psi_p)$ de $\boldsymbol{\Psi}_0$ à un voisinage $\mathcal{U}_p$ de p.

On peut supposer $\boldsymbol{\Psi}_0$ inversible sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathsf{R}$: en soit $(\mathcal{V}, \Psi_0^{-1})$ l'inverse. On peut toujours supposer $\mathcal{V} \subset \mathsf{R}$. Comme

$$\Psi_0^{-1} \circ G^n \circ \Psi_0 = F^n \tag{4}$$

sur R pour tout n et, par le lemme 1 de l'appendice de [RR], $\lim_{k \to \infty} G^{\circ k} = 0$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}^N$, on voit que, pour chaque compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}_p$ et n assez grand, $G^n \Psi_p(\mathcal{K}) \subset \mathsf{R}$. On peut donc prolonger le membre gauche de (4) sur $\mathcal{U}_p$, en gagnant l'élément $\Psi_0^{-1} \circ G^n \circ \Psi_p$. Par conséquent, F^n aussi peut être prolongé sur $\mathcal{U}_p$ à un élément $(\mathcal{U}_p, F_n)$ et $F_n(p) \in \mathsf{R}$. Ainsi $p \in h^{\circ n}(\mathsf{R})$ et, grâce au lemme 7, $p \in \Omega$.

(ii): prouvons que π jouit de la propriété du relèvement des courbes. Soit $\gamma : I \to \pi(\mathsf{M})$ un chemin et $x \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Par construction de M il existe un chemin $\beta : I \to \pi(\mathsf{M})$ tel que $\beta(0) = 0$, $\beta(1) = \gamma(0)$ admettant un relèvement $\tilde{\beta} : I \to \mathsf{M}$ tel que $\tilde{\beta}(0) = j(0)$ et $\tilde{\beta}(1) = x$. Soit $\Gamma := \beta * \gamma$: comme $\pi(\mathsf{M}) = \Omega$ par (i), $\Omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} [h^{\circ k}(\mathsf{R})]$ et $h^k(\mathsf{R}) \subset h^{k+1}(\mathsf{R})$, on a $\Gamma(I) \subset$ $\subset h^N(\mathsf{R})$ pour N assez grand.

Or h^N est un revêtement, donc (R, F^N) admet un prolongement analytique le long de Γ jusqu'à un élément (V, F_n) dans un voisinage de $\gamma(1) = \Gamma(1)$.

On peut définir un prolongement analytique de $\boldsymbol{\Psi}_0$ le long de Γ à l'aide de (3).

Cela entraîne que Γ admet un relèvement $\tilde{\Gamma} : I \to \mathsf{M}$ tel que $\tilde{\Gamma}(0) =$ $= j(0)$ et $\tilde{\Gamma}(1/2) = x$. Posons $\tilde{\gamma}(t) := \tilde{\Gamma}((t+1)/2)$: on voit que $\tilde{\gamma}(0) = x$ et

$\pi\tilde{\gamma} = \gamma$, donc γ admet un relèvement respectivement à π commençant à x, c'est-à-dire π est un revêtement topologique.

(iii): notons que la définition de $\boldsymbol{\Psi}_p$ par (3) entraîne que cette application est une limite de biholomorphismes locaux, donc soit $\boldsymbol{\Psi}_p$ est dégénérée au voisinage de p, soit elle y est biholomorphe. Le premier cas ne peut pas se présenter, car sinon, par prolongement analytique, même $\boldsymbol{\Psi}_0$ serait dégénérée, ce qui contredit (1).

En outre, au voisinage de 0 on a

$$\boldsymbol{\Psi}_0^{-1} = \lim_{k \to \infty} h^k \circ S \circ G^k, \tag{5}$$

où S dénote l'inverse local de T au voisinage de 0. cette définition-là peut être prolongée à une application holomorphe Θ sur $\mathbb{C}^N$, car $\lim\limits_{k \to \infty} G^k = 0$ uniformement sur les compacts de $\mathbb{C}^N$.

Or, au voisinage de chaque point $p \in \mathbb{C}^N$, la suite (5) est une suite de biholomorphismes locaux, car les $\{h^k\}$ le sont sur R, donc soit Θ est dégénérée au voisinage de p soit p n'est pas un point critique pour Θ. Le premier cas ne peut pas se preésenter, car sinon Θ serait dégénérée sur $\mathbb{C}^N$, ce qui contredit $\Theta_*(0) = \boldsymbol{\Psi}_*(0)^{-1} = \boldsymbol{id}$ Grâce au lemme 3 et à (ii), $\Theta(\mathbb{C}^N) = \Omega$.

Montrons que ψ jouit de la propriété du relèvement des courbes. Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}^N$ un chemin et $y \in \psi^{-1}(\gamma(0))$: grâce au lemme 10, $y \in \pi^{-1}(\Theta(\gamma(0)))$. Puisque π est, par (iii), un revêtement, il existe un relèvement $\tilde{\gamma} : I \to \mathsf{M}$ de $\Theta\gamma$ commençant à y; comme on a aussi $\psi\tilde{\gamma} = \gamma$, on voit que $\tilde{\gamma}$ est un relèvement de γ par respectivement à Ψ, commençant à y, c'est à dire Ψ est un revêtement topologique. ∎

Fin de la démonstration du théorème 9: montrons que Ψ est surjective: on peut recouvrir M par un ensemble dénombrable d'ouverts $\{\mathcal{V}_l\}$ tels que $\pi|_{\mathcal{V}_l}$ est inversible; posons $\mathcal{U}_l := \pi(\mathcal{V}_l)$. Grâce au lemme 11 (i) et au fait que $h(\Omega) = \Omega$, pour tout n et tout l on aura aussi $h^n(\mathcal{U}_l) \subset \subset \bigcap\limits_{\lambda \in L(l, n)} \mathcal{U}_\lambda$, pour un certain ensemble d'indices $L(l, n)$.

Par construction $\Psi(M) = \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} \Psi_l(\mathcal{U}_l)$, où chacun des $(\mathcal{U}_l, \Psi_l)$ est un prolongement analytique de $\boldsymbol{\Psi}_0$, et donc $G^{-n}\Psi(\mathsf{M}) = \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} G^{-n}\Psi_l(\mathcal{U}_l)$. Par prolongement analytique de (1), on a, pour chaque l, n, $G^{-n}\Psi_l(\mathcal{U}_l) = \bigcap\limits_{\lambda \in L(l, n)} \Psi_\lambda h(\mathcal{U}_l) \subset \Psi(M)$; en considérant la réunion sur l, on obtient $G^{-n}\Psi(M) \subset \Psi(M)$; mais alors, grâce au théorème de Poincaré-Dulac $\mathbb{C}^N = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G^{-n}\Psi(M) \subset \Psi(M)$, donc $\Psi(M) = \mathbb{C}^N$.

Finalement, grâce au lemme 11 (ii), Ψ est un revêtement topologique, donc, grâce à la connexité simple de $\mathbb{C}^N$, il s'agit d'une application biholomorphe. ■

4. Exemples.

Soit $\mathcal{E} := \mathbb{C}^2_{(z,\,w)} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$: construissons une application holomorphe propre $h : \mathbb{C}^2 \to \mathcal{E}$ avec un point fixe répulsif et $Jh \neq 0$ sur $\mathcal{E}$. Pour ce faire on pourra partir de l'application biholomorphe sur $\mathbb{C}^2$, prenant valeurs en $\mathcal{E}$, de [RR], p. 76 où 77, que nous allons appeler G. Soit $G(1,\,1) = (a,\,b) (\in \mathcal{E})$; or, pour α, β convenables l'application H définie en posant

$$H(z,\,w) := G(\alpha z - \alpha a + 1,\, \beta y - \beta b + 1)$$

a un point fixe répulsif en $p := (a,\,b)$. Enfin, on pourra considerer $h := H(a^{1-n} z^n,\, w)$, qui jouit évidemment des propriétés énoncées au debut du paragraphe.

Or, pour chaque voisinage V de p en $\mathcal{E}$ et pour chaque entier positif k, on a $h^k(V) \subset \mathcal{E}$ par construction. Par ailleurs, $h^k|_V$ est un biholomorphisme local propre, et donc un revêtement topologique. Ainsi le point fixe p est régulier. Donc la construction du théorème nous donne un domaine de Riemann M biholomorphe à $\mathbb{C}^N$ qui recouvre le bassin potentiel d'attraction de p par respect à un inverse local de h. Par construction, ce bassin est contenu en $\mathcal{E}$, et donc il est un sousensemble propre de $\mathbb{C}^2$.

REFERENCES

[BF] G. T. Buzzard - J. E. Fornaess, *An embedding of* $\mathbb{C}$ *into* $\mathbb{C}^2$ *with hyperbolic complement*, Math. Ann., **306** (1996).

[BS] E. Bedford - J. Smillie, *Fatou-Bieberbach domains arising from polynomial automorphisms*, Indiana Univ. Math. J., **40** (1991).

[FS] J. E. Fornaess - N. Sibony, *Complex Hénon mappings in* $\mathbb{C}^2$ *and Fatou-Bieberbach domains*, Duke Math. J., **65** (1992).

[G] J. Globevnik, *On Fatou-Bieberbach domains*, Math. Zeitschrift, **229** (1997).

[GR] R. C. Gunning - H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice Hall, 1965.

[K] T. Kimura, *On Fatou-Bieberbach domains in* $\mathbb{C}^2$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **35** (1988).

[Ma] B. MALGRANGE, *Lectures on the theory of functions of several complex variables*, Tata institute of fundamental research, Bombay 1958.

[My] P. J. MYRBERG, *Über ganze analytische Funktionen zweier Variablen, welche eine schlichte und volumentreue gelöcherte Abbildung vermitteln*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **540** (1973).

[N] R. NARASIMHAN, *Several complex variables*, The university of Chicago Press, Chigago and London, 1971.

[RR] J.-P. ROSAY - W. RUDIN, *Holomorphic maps from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$*, Trans. of the A.M.S. 310/1, November 1988.

[Si] N. SIBONY - P. M. WONG, *Remarks on the Casorati-Weierstrass theorem*, Ann. Pol. Math., **39** (1981).

[Ste] J.-L. STEHLÉ, *Plongements du disque dans* $\mathbb{C}^2$, Séminaire P. Lelong (Analyse) 1970-71 Lectures Notes in Math., Vol. 275 Springer, Berlin 1972.

[Stn] B. STENSÖNES, *Fatou-Bieberbach domains with C^∞-smooth boundary*, Annals of Mathematics, **145** (1997).

[Wck] B. J. WEICKERT, *Attracting basins for automorphisms of* $\mathbb{C}^2$, Invent. math., **132** (1998).

Manoscritto pervenuto in redazione il 13 dicembre 2003.