

A propos d'un lemme de Ribet.

JOËL BELLAÏCHE (*)

RÉSUMÉ - Nous généralisons un lemme de Ribet, permettant de construire, à partir d'une représentation irréductible sur un corps local, des extensions non triviales entre représentations sur le corps résiduel.

RIASSUNTO - Generalizziamo un lemma di Ribet, il quale permette di costruire, a partire da una rappresentazione irriducibile su un campo locale, delle estensioni non banali tra rappresentazioni sul campo residuo.

1. Introduction.

1.1. *Introduction générale.*

Dans son célèbre article de 1976 [R], Ribet montre la réciproque du théorème de Herbrand en utilisant, *grosso modo* la méthode suivante: il montre que cette réciproque se ramène à l'existence de certaines *extensions non triviales* entre deux caractères χ_1 et χ_2 dans la catégorie des représentations de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur un corps fini k , ces extensions devant vérifier certaines propriétés locales. Il construit par ailleurs, à l'aide de congruences entre formes modulaires, une représentation *irréductible* ρ de dimension 2 sur un corps local K de corps résiduel k et d'uniformisante π , dont la réduction $\overline{\rho}_\mathcal{A} := \rho/\pi\mathcal{A}$ pour un tout réseau stable \mathcal{A} a comme facteurs de Jordan-Hölder les deux caractères χ_1 et χ_2 . Il prou-

(*) Indirizzo dell'A.: Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris, France.

E-mail: jbellaic@ens.fr

ve enfin un lemme qui affirme que pour une telle représentation ϱ , il existe un réseau stable \mathcal{A} , telle que la réduction associée $\bar{\varrho}_{\mathcal{A}}$ soit une extension *non triviale* de χ_1 par χ_2 . Le but de cet article est de généraliser ce lemme de Ribet, en permettant à la représentation ϱ d'être de dimension quelconque n , et à ses réductions $\bar{\varrho}_{\mathcal{A}}$ d'avoir un nombre quelconque d de facteurs de Jordan-Hölder.

Dans la lignée de la méthode de Ribet, les principales applications que nous avons en vue de notre résultat concernent l'obtention d'extensions non triviales de représentations galoisiennes en caractéristique p (resp. sur un corps p -adique), à partir de représentations en caractéristique zéro attachées à des formes automorphes (resp. à des familles p -adiques de formes automorphes). Dans la thèse de l'auteur [B], où est prouvé par une méthode différente un cas particulier (cf. chapitre VI) du théorème principal de cet article, on obtient des applications de ce genre (la preuve de certains cas des conjectures de Bloch et Kato, cf. chapitre VIII).

1.2. Notations.

Dans tout cet article, on note R un anneau de valuation discrète complet, K son corps des fractions, k son corps résiduel, et π une uniformisante de R .

Soit V un espace vectoriel de dimension n sur K . Un *réseau* de V est un R -module libre de rang n dans V qui engendre V sur K .

On suppose donnée une représentation

$$\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$$

d'un groupe G dans V telle que G *laisse stable un réseau de V* . (C'est le cas en particulier si ϱ est continue et G compact). Si $\mathcal{A} \subset V$ est un réseau stable par G , le groupe G agit sur $\mathcal{A}/\pi\mathcal{A}$, qui est un espace vectoriel de dimension n sur k . On appellera l'application associée

$$\bar{\varrho}_{\mathcal{A}} : G \rightarrow \mathrm{GL}(n, k)$$

réduction de ϱ attachée à \mathcal{A} . Si e_1, e_2, \dots, e_n est une base de \mathcal{A} , donc de V , et si $g \in G$, la matrice de $\varrho(g)$ dans la base (e_1, \dots, e_n) est à coefficients entiers et donc aussi le polynôme caractéristique de $\varrho(g)$. Comme le polynôme caractéristique de $\bar{\varrho}_{\mathcal{A}}(g)$ est la réduction modulo π de celui de $\varrho(g)$, c'est un polynôme à coefficients dans k indépendant du réseau stable \mathcal{A} choisi. Le théorème de Brauer-Nesbitt [C-R, 30.16] assure alors que les facteurs de compositions de $\bar{\varrho}_{\mathcal{A}}$, ainsi que leur multiplicités, ne

dépendent pas, à isomorphisme près, du réseau stable \mathcal{A} ; on note $\bar{\varrho}_1, \dots, \bar{\varrho}_c$ ces facteurs, et m_1, \dots, m_c leur multiplicité. En particulier, la semi-simplification de $\bar{\varrho}_{\mathcal{A}}$ ne dépend pas, à isomorphisme près, de \mathcal{A} ; on la note $\bar{\varrho}_{ss}$. Le nombre $d = \sum_{i=1}^c m_i$ est la longueur de $\bar{\varrho}_{ss}$.

1.3. Énoncé du théorème principal.

Pour énoncer notre résultat, qui affirme l'existence d'extensions non triviales, il est commode d'attacher à ϱ le graphe orienté Γ_{ϱ} , défini comme suit: les sommets de Γ_{ϱ} sont les différents facteurs irréductibles $\bar{\varrho}_1, \dots, \bar{\varrho}_c$ de $\bar{\varrho}_{ss}$; on dessine une flèche de $\bar{\varrho}_i$ vers $\bar{\varrho}_j$ si et seulement si il existe un réseau stable \mathcal{A} , et un sous-quotient de $\bar{\varrho}_{\mathcal{A}}$ qui est une extension *non triviale* de $\bar{\varrho}_j$ par $\bar{\varrho}_i$.

THÉORÈME 1. *Si ϱ est irréductible, le graphe Γ_{ϱ} est connexe en tant que graphe orienté⁽¹⁾.*

La preuve de ce théorème utilise les immeubles de Bruhat-Tits et fait l'objet du présent article. La partie 2 est consacrée à des préliminaires généraux sur l'immeuble \mathcal{X} de $\mathrm{GL}_n(K)$ pour lesquels nous n'avons pas pu trouver de référence. Dans la partie 3, nous associons à une représentation ϱ de dimension n sur K une partie \mathcal{S} de \mathcal{X} , et nous établissons un dictionnaire entre les propriétés de ϱ et celles de \mathcal{S} . Enfin, nous prouvons le théorème 1 dans la partie 4.

Le dictionnaire de la partie 3 est la partie la plus importante de ce travail, en ce qu'il permet d'obtenir de nombreuses variantes et raffinements du théorème 1 en les ramenant à des problèmes accessibles de géométrie des immeubles. Dans un travail avec Philippe Graftieaux ([B-C]), nous complétons et utilisons ce dictionnaire pour donner quelques unes de ces variantes, utiles dans les applications arithmétiques: la principale est la construction d'extensions modulo π^n et pas seulement modulo π ; On y montre aussi que le théorème 1 est, sans hypothèse supplémentaire, optimal, au sens où l'on peut trouver pour tout graphe fini orienté connexe (en tant que graphe orienté) Γ une représentation ϱ vérifiant les hypothèses du théorème 1, et telle que $\Gamma_{\varrho} \simeq \Gamma$.

Indiquons que dans le cas où G est un groupe fini, le théorème 1 avait

⁽¹⁾ Autrement dit, on peut aller de n'importe quel sommet à n'importe quel autre en suivant les flèches.

été démontré par G. Thompson ([TH]). Sa méthode, reposant sur des techniques de la théorie des groupes finis, ne s'étend pas au cas général.

Dans la plupart des applications, le groupe G est le groupe de Galois d'un corps de nombres. Ainsi, le dictionnaire de la partie 3 est utilisé de manière cruciale dans [B-C] (voir le paragraphe 7.3), où l'on construit (généralisant [B, chapitre VIII]) des extensions non triviales entre caractères du groupe de Galois d'un corps quadratique imaginaire, montrant ainsi des cas de la conjecture de Bloch-Kato. Mais le champ du théorème 1 ne se limite pas aux applications galoisiennes: dans un article en préparation, Ivan Marin utilise ce théorème pour construire des extensions non triviales entre représentations du groupe de tresses à n brins.

1.4. Remarque.

Les hypothèses sur l'anneau R (anneau de valuation discrète complet) sont les hypothèses naturelles pour utiliser les immeubles et construire des réseaux stables donnant par réduction des extensions non triviales. Elles ne sont restrictives qu'en apparence, comme le montre le corollaire suivant:

COROLLAIRE 1. *Soit R un anneau noethérien intègre, de corps des fractions K , et soit \mathfrak{m} un idéal maximal de R , avec $R/\mathfrak{m} = k$. Soit ϱ une représentation de G (groupe quelconque) sur R^n , $\bar{\varrho}$ la représentation réduite sur k^n , notons $\bar{\varrho}_1, \dots, \bar{\varrho}_c$ les facteurs de Jordan-Hölder de $\bar{\varrho}$, sans multiplicité; on suppose les $\bar{\varrho}_i$ absolument irréductibles. Introduisons le graphe Γ_ϱ dont les sommets sont les $\bar{\varrho}_i$, et où l'on trace une flèche de $\bar{\varrho}_i$ vers $\bar{\varrho}_j$ s'il existe une extension non scindée de $\bar{\varrho}_j$ par $\bar{\varrho}_i$ sur k . Supposons la représentation ϱ sur K^n absolument irréductible. Alors le graphe Γ_ϱ est connexe en tant que graphe orienté.*

DÉMONSTRATION. D'après [EGA, chapitre II, proposition 7.1.7], il existe un sous-anneau de valuation discrète R_0 de K , d'idéal maximal \mathfrak{m}_0 , contenant R et tel que $\mathfrak{m}_0 \cap R = \mathfrak{m}$. Soit R' le complété de R_0 , K' le corps des fractions de R' et k' son corps résiduel. Soit $\varrho' = \varrho \otimes K'$. Par hypothèse, ϱ' est irréductible, admet un réseau stable R'^n , sa réduction $\bar{\varrho}'$ est $\bar{\varrho} \otimes_k k'$, et a donc les $\bar{\varrho}_i \otimes k'$ comme facteurs de Jordan-Hölder. On peut donc appliquer le théorème 1 à ϱ' qui donne un graphe connexe orienté d'extensions (sur k') entre les $\bar{\varrho}_i \otimes k'$. Comme la formation des

groupes d'extensions commute à l'extension du corps des scalaires ([C-R, 8.16]), on a en fait $\Gamma_\rho = \Gamma_{\rho'}$, d'où le corollaire. ■

1.5. Remerciements.

C'est Laurent Clozel, alors mon directeur de thèse, qui m'a demandé de chercher une généralisation du lemme de Ribet. Il m'a aussi indiqué, plus tard, la façon dont Jean-Pierre Serre voyait ce lemme: en terme d'arbres. Ceci a naturellement suggéré d'employer les immeubles de Bruhat-Tits pour traiter le cas général⁽²⁾. Je les remercie tous deux chaleureusement, ainsi que Bruno Klingler, Gaëtan Chenevier, Ania Otwinowska, l'Université de Padoue, et surtout Philippe Graftieaux, qui a relu attentivement une version préliminaire de ce texte et suggéré de nombreuses améliorations.

2. Préliminaires sur les immeubles des groupes linéaires.

2.1. Immeubles et appartements : rappels.

2.1.1. On note \mathcal{X} (ou \mathcal{X}_n) l'immeuble de Bruhat-Tits attaché à $\mathrm{PGL}_n(K)$ (cf. [B-T, 10.2] et [S, numéro 4]); c'est un complexe simplicial (voir [B-T, 1.1.6] pour cette notion ainsi que [B-T, 1.1] pour les notions connexes de *facettes*, *chambres*, *cloisons*, *galeries*, ...) muni d'une distance (voir [B-T, 2.5]). On note X l'ensemble des sommets de \mathcal{X} . Rappelons ([S, pages 88-90]) que X est en bijection canonique avec les classes d'homothéties de R -réseaux dans K^n et que deux sommets distincts x et x' sont voisins si et seulement s'il existe deux réseaux A et A' représentant x et x' tel que

$$\pi A \subset A' \subset A.$$

Le quotient $A'/\pi A$ est alors un sous- k -espace vectoriel propre de $A/\pi A = k^n$ dont la dimension est un entier compris entre 1 et $n - 1$, dont la classe dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est appelée le *type* de l'arête (x, x') . Si x'' est un autre voisin de x , il est voisin de x' si et seulement le sous-espace de $A/\pi A$ qui lui correspond est inclus, ou contient celui qui correspond à x' . Les types des arêtes obéissent aux règles (évidentes) suivantes:

⁽²⁾ J'ai d'ailleurs appris que Serre avait traité lui aussi de son côté le cas général. C'est aussi lui qui m'a signalé la référence à [TH]

- Si (x, x') est une arête de type i , alors (x', x) est une arête de type $-i$.
- Si (x, x') , (x', x'') et (x, x'') sont trois arêtes, alors le type de (x, x'') est la somme de ceux de (x, x') et (x', x'') .

2.1.2. Rappelons ([S, paragraphe 5]) que \mathcal{X} est recouvert par ses *appartements* qu'on peut tous décrire ainsi: l'appartement \mathcal{C} attaché à la base (e_1, \dots, e_n) de K^n est la fermeture convexe de l'ensemble A des sommets de X représentés par des réseaux de la forme $R\pi^{a_1}e_1 \oplus \dots \oplus \oplus R\pi^{a_n}e_n$.

Une telle base étant choisie, on peut alors représenter les sommets de l'appartement \mathcal{C} qui lui correspond (i.e. les éléments de A) par les éléments de \mathbb{Z}^n/\mathbb{Z} , voir [S, page 94].

On définit l'*appartement standard* \mathcal{C}_{n-1} comme le complexe simplicial métrique \mathbb{R}^n/\mathbb{R} , muni de la métrique euclidienne quotient, et de la structure de complexe simplicial pour laquelle les sommets sont les points de $\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^n/\mathbb{R}$, les arêtes (ou 1-face) les intérieurs des fermetures convexes des couples de sommets dont on peut trouver des représentants dans \mathbb{Z}^n dont la différence est constituée de 0 et de 1, et les k -faces les intérieurs des fermetures convexes des ensembles à k éléments de sommets deux à deux voisins. Le choix d'une base de K^n définit un isomorphisme (pour la structure simpliciale et la métrique) entre l'appartement \mathcal{C} qu'elle définit et l'appartement standard \mathcal{C}_{n-1} , voir [S, page 94].

2.1.3. Les *murs* d'un appartement \mathcal{C} sont ([B-T, 1.3.3]) les hyperplans de \mathcal{C} contenant un cloison, et les *demi-appartements* ([B-T, 1.3.3 et 2.2.2]) sont les demi-espaces fermés de \mathcal{C} de frontière un mur. Dans l'appartement standard, les murs sont les hyperplans qui admettent une équation de la forme $x_i - x_j = c$, où i et j sont deux entiers distincts entre 1 et n , et c une constante entière ([B-T, 10.2.8]).

2.2. Sous-appartements d'un appartement.

2.2.1 Définition. Une partition

$$\{1, \dots, n\} = \coprod_{i=1}^d B_i,$$

on associe le sous-ensemble de $\mathcal{C}_{n-1} = \mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ des points dont un représentant est de la forme $(a) = (a_1, \dots, a_n)$, le n -uplet (a) étant constant

sur chacun des B_i . On obtient ainsi un sous-complexe simplicial, naturellement isomorphe à l'appartement standard \mathcal{C}_{d-1} (l'isomorphisme est $(a_1, \dots, a_n) \mapsto (b_1, \dots, b_d)$ où b_i est la valeur de la suite (a) sur B_i). On appelle les sous-complexes ainsi obtenus les *sous-appartements de dimension $d-1$* de \mathcal{C}_{n-1} , et on définit les *sous-appartements de dimension $d-1$ d'un appartement \mathcal{C}* de \mathcal{X} par transport de structure, grâce à un isomorphisme (donnée par une base de K^n , comme en 2.1.2) de \mathcal{C} avec \mathcal{C}_{d-1} . (Nous définirons la notion de sous-appartement de l'immeuble \mathcal{X} – et non seulement d'un appartement – plus bas, en 2.5.)

2.2.2. On prendra garde cependant à ce que l'isomorphisme entre un sous-appartement de dimension $d-1$ et \mathcal{C}_{d-1} n'est pas une isométrie pour les métriques euclidiennes naturelles, et ne respecte pas le type des arêtes: en effet, si (a_1, \dots, a_n) et (a'_1, \dots, a'_n) représentent deux points voisins de \mathcal{C}_{n-1} , avec $a'_i - a_i \in \{0, 1\}$ pour $i = 1, \dots, n$, le type de l'arête reliant ces deux points est le nombre de $a'_i - a_i$ égaux à 1, tandis que le type de l'arête image dans \mathcal{C}_{d-1} est le nombre de $b'_i - b_i$ égaux à 1 ou les b_i (resp. les b'_i) sont les valeurs de la suite (a) (resp. (a')) sur B_i , pour $i = 1, \dots, d$. Ce dernier nombre sera appelé le *type de l'arête dans le sous-appartement considéré*.

LEMME 2.2.3. *Soit \mathcal{C} un appartement. Une intersection non vide de murs de \mathcal{C} est toujours un sous-appartement.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer que \mathcal{C} est l'appartement standard \mathcal{C}_{n-1} . Les murs de \mathcal{C} ont pour équation $x_i - x_j = c$, avec i, j deux entiers distincts entre 1 et n , et c un entier quelconque. Si une intersection I d'une famille F de murs est non vide, on peut supposer, quitte à faire une translation, que I contient le point $(0, \dots, 0)$ donc que les murs de F ont tous une équation de la forme $x_i - x_j = 0$. Sur $\{1, \dots, n\}$, on considère la relation d'équivalence engendrée par la relation $i \mathcal{R} j$ si il existe un mur de F d'équation $x_i - x_j = 0$. La partition de $\{1, \dots, n\}$ associée à cette relation d'équivalence définit un sous-appartement de \mathcal{C}_n qui est égal à I . ■

2.3. Parties closes.

2.3.1. La notion de partie *close* n'est définie dans [B-T] que pour certaines parties de \mathcal{X} :

- Celles qui contiennent au moins une chambre: *loc. cit.* définition 2.4.1.

- Celles qui sont contenues dans un appartement: *loc. cit.* définition 2.4.6.

Les deux définitions coïncident (d'après la proposition 2.4.5 *loc. cit.*) pour les parties qui contiennent une chambre et sont contenues dans un appartement.

2.3.2. On étend cette définition à toutes les parties de \mathcal{X} en posant:

DÉFINITION. Une partie de \mathcal{X} est dite *close* si elle est convexe et réunion d'adhérence de facettes.

Cette définition coïncide avec celles de Bruhat-Tits pour les parties contenant une chambre (d'après [B-T, 2.5.7]) et pour celles contenues dans un appartement (d'après [B-T, 2.4.6]). On notera qu'une partie close est fermée (d'après [B-T, théorème 2.5.12]).

2.3.3. L'intersection d'une famille de parties closes étant clairement close, il existe une unique plus petite partie close contenant une partie S de \mathcal{X} donnée. On l'appelle *l'enclos de S* et on la note $\text{cl}(S)$.

LEMME 2.3.4. *Soit S une partie close de \mathcal{X} , et posons $S = S \cap X$. Alors $S = \text{cl}(S)$.*

DÉMONSTRATION. L'inclusion $\text{cl}(S) \subset S$ résulte des définitions. Inversement, si $x \in S$, x appartient à l'adhérence d'une facette F contenue dans S . Comme \bar{F} est l'enclos de $F \cap X$, on a $x \in \text{cl}(S)$. ■

2.4. Dimension des parties closes.

DÉFINITION. On appelle dimension d'une partie close de \mathcal{X} la dimension maximale d'une facette contenue dans cette partie.

PROPOSITION 2.4.1. *Soit S une partie close de dimension d de \mathcal{X} contenue dans un appartement \mathcal{C} . Alors le sous-espace affine engendré par S dans \mathcal{C} est de dimension d et est un sous-appartement \mathcal{C}_d de \mathcal{C} .*

DÉMONSTRATION. On peut supposer que \mathcal{C} est l'appartement standard \mathcal{C}_{n-1} . Soit E l'espace affine engendré par S . Puisque S contient une facette de dimension d , E est de dimension au moins d . Comme S est convexe, il est d'intérieur non vide dans E donc de mesure non nulle pour une mesure de Lebesgue de E , ce qui implique que E est de dimension au plus d (sinon, en effet, S serait de mesure nulle dans E comme réunion dénombrable de facettes de dimension au plus d , qui sont de mesures nulles dans E).

Par ailleurs S est l'intersection des demi-appartements de \mathcal{C} qui le contiennent (d'après [B-T, 2.4.5]), et même l'intersection d'une famille finie T de demi-appartements (car l'intersection ne change pas si l'on enlève de la famille, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts tous les demi-appartements de la forme $x_i - x_j \leq c$ sauf celui avec le plus petit c , et on peut supposer que pour chaque couple (i, j) , il n'y a dans T qu'un seul demi-appartement correspondant au couple (i, j) : $x_i - x_j \leq c_{ij}$).

Considérons dans T la sous-famille T_0 des demi-appartements $x_i - x_j \leq c_{ij}$ tels que le demi-appartement opposé $x_j - x_i \leq -c_{ij}$ appartient encore à T . L'intersection des demi-appartements de T_0 est une intersection de murs, donc un sous-espace affine E' , et il est clair que l'intersection S est d'intérieur non vide dans E' . Donc $E' = E$, et E est un sous-appartement par le lemme 2.2.3. ■

DÉFINITION. Soit F et F' deux facettes de \mathcal{X} , avec $\dim F' \leq \dim F = d$. Une d -galerie de F à F' est une suite finie $F = F_0, F_1, \dots, F_k$ de facettes de dimension d , telle que $\overline{F}_i \cap \overline{F}_{i+1}$ est une facette de dimension $d-1$, pour $i = 0, \dots, k-1$, et telle que \overline{F}_k contienne F' .

COROLLAIRE 2.4.2. Soit S une partie close de X , de dimension d . Soit F et F' deux facettes de S , avec $\dim F' \leq \dim F = d$. Alors il existe une d -galerie de F à F' contenue dans S .

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{C} un appartement contenant F et F' . La partie $S \cap \mathcal{C}$ est close et de dimension d . D'après la proposition précédente, elle est contenue dans un sous-appartement \mathcal{C}_d , dont c'est une partie close. Les facettes de dimension d (resp. $d-1$) de $S \cap \mathcal{C}$ sont des chambres de \mathcal{C}_d (resp. des cloisons), et le corollaire résulte donc de l'existence d'une galerie tendue ([B-T], 2.4.1) dans \mathcal{C}_d , entre la chambre F et la facette F' de $S \cap \mathcal{C}$. ■

En particulier:

COROLLAIRE 2.4.3. *Soit S une partie close de \mathcal{X} de dimension d . Toute facette de S est dans l'adhérence d'une facette de S de dimension d .*

2.5. Parties closes et appartements.

THÉORÈME 2.5.1 (Bruhat-Tits). *Toute partie convexe de \mathcal{X} isométrique à une partie de l'espace euclidien \mathbb{R}^{n-1} est contenue dans un appartement de \mathcal{X} .*

DÉMONSTRATION. Soit S une telle partie, i une isométrie de S sur \mathbb{R}^d , et posons $S_k = i^{-1}B(0, k)$, où $B(0, k)$ est la boule euclidienne dans \mathbb{R}^d , de centre 0 et de rayon k . Les S_k , pour $k = 1, 2, \dots$ sont convexes (car la convexité est une propriété métrique dans \mathcal{X}), bornées, et isométriques à une partie de l'appartement standard \mathcal{A}_{n-1} . On peut donc leur appliquer [B-T, proposition 2.8.1], qui montre que S_k est contenu dans un appartement. D'après [B-T, proposition 2.8.3], applicable car K est complet, il en va de même de leur union croissante S . ■

COROLLAIRE 2.5.2. *Soit S une partie de \mathcal{X} . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

1) *L'ensemble S est contenu dans un appartement, et pour tout appartement \mathcal{A} de \mathcal{X} contenant S , S est un sous-appartement de dimension d de l'appartement \mathcal{A} (cf. 2.2.1).*

2) *Il existe un appartement \mathcal{A} de \mathcal{X} contenant S tel que S soit un sous-appartement de dimension d de \mathcal{A} (cf. 2.2.1).*

3) *L'ensemble S est clos et isométrique à l'espace euclidien \mathbb{R}^d .*

DÉMONSTRATION. 1) implique 2) est évident. 2) implique 3) résulte de la définition 2.2.1.

Supposons 3). La partie S est contenu dans un appartement d'après le théorème 2.5.1. Soit \mathcal{A} un appartement quelconque contenant S . En tant que partie close, la dimension de S est au plus d , car une facette de dimension $d + 1$ n'est isométrique à aucune partie de \mathbb{R}^d . D'après la proposition 2.4.1, S est donc inclus dans un sous-appartement E de \mathcal{A} de dimension au plus d . Comme S est isométrique à \mathbb{R}^d , on a $S = E$ et E est un sous-appartement de dimension d . ■

DÉFINITION. On appelle *sous-appartement de dimension d* de \mathcal{X} une partie \mathcal{S} de \mathcal{X} vérifiant les conditions équivalentes du corollaire précédent.

2.5.3. Droites, demi-droites, segments.

DÉFINITION. On appelle *droite* (resp. *demi-droite*, *segment*) une partie close de \mathcal{X} isométrique à une droite euclidienne (resp. une demi-droite fermée euclidienne, resp. un segment euclidien).

D'après le théorème 2.5.1 et la proposition 2.4.1, la notion de droite est synonyme de celle de sous-appartement de dimension 1, et demi-droites et segments sont toujours contenus dans une droite.

Un segment est réunion d'adhérences d'arêtes $(x_0, x_1), \dots, (x_{k-1}, x_k)$. Les points x_0 et x_k sont les *extrémités* du segment, qu'on note $[x_0 x_k]$. Si l'on a choisi une *origine*, par exemple x_0 , parmi les deux extrémités du segment, on dit qu'il est *orienté* et on le note $[x_0, x_k]$. Toutes les arêtes (x_i, x_{i+1}) sont alors naturellement orientées.

LEMME 2.5.4. *Une union strictement croissante de segments est une demi-droite ou une droite.*

Comme un segment est contenu dans un appartement, et est convexe, une union croissante U de segments est encore contenue dans un appartement \mathcal{C} , d'après [B-T, 2.8.3]. Dans l'espace euclidien \mathcal{C} , on voit que U est convexe, et est soit une demi-droite, soit une droite. Par ailleurs U est réunion d'adhérences de facettes, donc il est clos, et c'est donc une demi-droite ou une droite de \mathcal{X} . ■

LEMME 2.5.5. *Soit $[a, b]$ un segment de X et F une facette de X dont l'adhérence contient b . Alors il existe un appartement contenant $[a, b]$ et F .*

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement de [B-T, proposition 2.4.11]. ■

3. Dictionnaire représentations-immeubles.

3.1. Partie fixe par une représentation.

3.1.1. Une base de V étant choisie, la représentation ρ définit une action de G sur K^n , donc sur l'ensemble X des sommets de l'immeuble. Cette

action s'étend ([B-T, 3]) en une action sur \mathcal{X} par isométries respectant la structure simpliciale.

On associe à ϱ l'ensemble S_ϱ (ou simplement S) des sommets de l'immeuble X fixes par G , et l'ensemble S_ϱ (ou S) des points fixes de \mathcal{X} sous l'action de G sur \mathcal{X} induite par ϱ .

LEMME 3.1.2. *Si \mathcal{A} est un réseau de V représentant un point $x \in S$, \mathcal{A} est stable par G .*

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, ϱ laisse au moins un réseau stable. Le sous-groupe $\varrho(G)$ est donc borné.

Si $x \in S$, x correspond à une classe d'équivalence de réseaux, qui est globalement laissée stable par G . Si \mathcal{A} est un réseau de cette classe, et si $g \in G$, on a donc $\varrho(g)\mathcal{A} = \lambda\mathcal{A}$ pour un certain $\lambda \in K^*$. Mais on a alors, pour $n \in \mathbb{Z}$, $\varrho(g^n)\mathcal{A} = \lambda^n\mathcal{A}$, et comme $\varrho(G)\mathcal{A}$ est borné, ceci implique $\lambda \in \mathcal{O}^*$, et donc $\varrho(g)\mathcal{A} = \mathcal{A}$. Le réseau \mathcal{A} est donc stable par G . ■

PROPOSITION 3.1.3. *L'ensemble S est clos et c'est l'enclos de S .*

DÉMONSTRATION. L'ensemble S est fermé, puisque l'action d'un élément g de G sur X est isométrique, donc continue. Si $x, y \in S$, on a $[x, y] \in S$ d'après la proposition 2.5.4 (iii) de [B-T], donc S est convexe.

Montrons que S est réunion de facettes: soit $y \in S$, et F la facette contenant y . On veut montrer que $F \subset S$. Soit $g \in G$. Comme $g(y) = y$, et comme g envoie facette sur facette, on a $g(F) = F$, et donc $g(\overline{F}) = \overline{F}$. L'action de g permute donc les sommets de \overline{F} . Soit x un de ces sommets, représentés par un réseau \mathcal{A} . L'image $g(x)$ est soit x soit un autre sommet de la facette, donc un voisin de x . Pour k assez grand, $\pi^k g(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ et l'indice $[\mathcal{A} : \pi^k g(\mathcal{A})] \bmod n$, indépendant de k , est congru modulo n à la valuation de $\det g$, donc à 0 puisque $\varrho(G)$ est d'adhérence compacte. Si $g(x)$ était un voisin de x , l'arête $(x, g(x))$ serait d'un type non nul modulo n , ce qui est absurde. Donc $g(x) = x$ et g est l'identité sur F ; on a $F \subset S$.

Terminons la preuve: S est clos puisque convexe et réunion de facettes, et c'est donc l'enclos de $S = S \cap X$ d'après le lemme 2.3.4. ■

3.2. Condition pour que ϱ soit irréductible.

PROPOSITION 3.2.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- 1) *L'ensemble S ne contient pas de demi-droites.*
- 2) *La représentation ϱ est irréductible.*

DÉMONSTRATION. Supposons que S contiennent une demi-droite D . Soit \mathcal{C}_1 un sous-appartement de dimension 1 contenant D , contenu dans un appartement \mathcal{C} , attaché à la base (e_1, \dots, e_n) . Par définition (2.2.1), il existe une partition de $\{1, \dots, n\}$ en deux sous-ensembles B_0 et B_1 tels que les sommets de \mathcal{C}_1 représentent les réseaux Λ_{a_0, a_1} , avec, pour $(a_0, a_1) \in \mathbb{Z}^2$, $\Lambda_{a_0, a_1} = \bigoplus_{i \in B_0} R\pi^{a_0} e_i \oplus \bigoplus_{i \in B_1} R\pi^{a_1} e_i$. Comme D est un demi-appartement de \mathcal{C}_1 , ses sommets sont représentés par les réseaux Λ_{a_0, a_1} , avec $a_0 - a_1 \leq c$ (ou $a_1 - a_0 \leq c'$, auquel cas on se ramène au cas précédent en permutant B_0 et B_1), où c est une constante entière. Ceci implique que G laisse stable le sous-espace de K^n engendré par les e_i , $i \in B_1$ et donc que ϱ n'est pas irréductible. On a donc prouvé que 2) implique 1).

Inversement, supposons que G laisse stable un sous-espace propre et non nul W , de dimension k . Soit Λ un réseau stable par G . Soit $\Lambda_0 = \Lambda \cap W$ et Λ_1 un supplémentaire de Λ_0 dans Λ . Alors le réseau $\Lambda_0 \oplus \pi^n \Lambda_1$ est stable par G (si $v \in \Lambda_0 \oplus \pi^n \Lambda_1$, écrivons $v = v_0 + \pi^n v_1$, avec $v_i \in \Lambda_i$). Comme Λ est stable, on peut écrire $gv_1 = w_0 + w_1$ avec $w_i \in \Lambda_i$. On a alors $gv = gv_0 + \pi^n w_0 + \pi^n w_1$, où les deux premiers termes appartiennent à Λ_0 , et le second à $\pi^n \Lambda_1$. Il y a donc une demi-droite dans S . ■

REMARQUE. J'ignore si on a l'équivalence ϱ irréductible $\Leftrightarrow S$ borné. C'est vrai cependant si le corps K est localement compact: on montre même facilement, dans ce cas, que les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:

- 1) La partie S est bornée.
- 2) La représentation ϱ est irréductible.
- 3) La partie S est compacte.
- 4) L'ensemble S est fini.

3.3. Dimension de S .

3.3.1 Pour tout x in S , on choisit un réseau Λ_x représentant x et on note $\bar{\varrho}_x$ la réduction ϱ_{Λ_x} par rapport au réseau Λ_x .

Si Λ'_x est un autre réseau représentant x , on a $\Lambda'_x = \lambda \Lambda_x$, pour un $\lambda \in K^*$, et la multiplication par λ permet d'identifier les espaces $V_{\bar{\varrho}_{\Lambda_x}} = \Lambda_x / \Pi \Lambda_x$ et $V_{\bar{\varrho}_{\Lambda'_x}} = \Lambda'_x / \Pi \Lambda'_x$, et cette identification est bien définie à une homothétie près. Les sous-espaces de l'espace $V_{\bar{\varrho}_x}$ ne dépendent donc d'aucun choix et ceux qui sont propres et non nuls sont en bijection canonique avec les sommets voisins de x dans X . On vérifie

immédiatement qu'un tel sous-espace est stable par $\bar{\varrho}_x$ si et seulement si le voisin de x qui lui correspond par cette bijection est dans S .

PROPOSITION 3.3.2. *La partie close S est de dimension $d - 1$, où d est le nombre de facteurs irréductibles de $\bar{\varrho}_{ss}$.*

DÉMONSTRATION. Soit x un sommet de S . D'après le dictionnaire 3.3.1 et 2.1.1, une facette de S passant par x de dimension k correspond à un drapeau stable pour $\bar{\varrho}_x$ de longueur $k + 1$ (i.e. avec k espaces vectoriels emboctés, sans compter (0) et $V_{\bar{\varrho}_x}$). Comme $\bar{\varrho}_x$ a d facteurs de compositions, il laisse stable au moins un drapeau de longueur d , et aucun de longueur plus grande.

La dimension maximale d'une facette de S est donc $d - 1$. ■

REMARQUE. On retrouve en particulier le résultat suivant, bien connu des spécialistes: $\bar{\varrho}_{ss}$ est irréductible si et seulement si S est réduit à un point.

3.4. Sous-appartements et coloriage.

3.4.1. Sous-appartements $\mathcal{C}(\varrho)$. Soit \mathcal{C} un appartement de \mathcal{X} rencontrant une facette de dimension maximale de S . L'intersection $\mathcal{C} \cap S$ est alors une partie close de dimension $d - 1$ (proposition 3.3.2) qui est contenue d'après la proposition 2.4.1 dans un unique sous-appartement $\mathcal{C}(\varrho)$ de dimension $d - 1$ de \mathcal{C} .

3.4.2. Coloriage JH. Soit JH le groupe libre engendré par les classes d'isomorphismes des facteurs irréductibles de $\bar{\varrho}_{ss}$, i.e. par les $\bar{\varrho}_i$. C'est un sous-groupe libre (à d générateurs) et facteur direct du groupe de Grothendieck de G sur k . Pour $\bar{\varrho}$ une représentation de G sur k dont les facteurs de Jordan-Hölder sont tous des $\bar{\varrho}_i$, on note $\text{JH}(\bar{\varrho}) \in \text{JH}$ sa classe dans le groupe de Grothendieck. On définit le degré $\text{deg}: \text{JH} \rightarrow \mathbb{Z}$ par $\text{deg}\left(\sum_{i=1}^d n_i \bar{\varrho}_i\right) = \sum n_i$.

On peut alors colorier les arêtes orientées de S , de la manière suivante. Soit (x, y) une telle arête; y définit un sous-espace V_y stable par G de $\bar{\varrho}_x$; à (x, y) on associe $\text{JH}(x, y) := \text{JH}(V_y)$.

PROPOSITION 3.4.3. *Soit \mathcal{C} un appartement contenant une facette F de dimension $d - 1$ de S . Le coloriage JH de $S \cap \mathcal{C}(\varrho)$ a les propriétés suivantes:*

- a) $\text{JH}(x, y)$ ne dépend que du vecteur (x, y) dans l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathcal{C}l(\varrho)$.
- b) Si l'arête (x, y) est de type k (dans le sous appartement, $\mathcal{C}l(\varrho)$, voir 2.2.2), $\deg \text{JH}(x, y) = k$.
- c) $\text{JH}(y, x) + \text{JH}(x, y) = \text{JH}(\overline{\varrho}_{ss})$.
- d) Si (x, y) est de type i , (x, z) de type $j \geq i$, et y voisin de z , on a $\text{JH}(x, y) = \text{JH}(x, z) + \text{JH}(z, y)$.

DÉMONSTRATION. Soient x, y (resp. x', y') deux points voisins de $S \cap \mathcal{C}l$. Soit \mathcal{A} (resp. \mathcal{A}') un réseau représentant x , et soit e_1, \dots, e_n une base de \mathcal{A} dont l'appartement associé est A . Quitte à permuter les e_i , on peut supposer que le sous-espace correspondant à y dans $V_{\overline{\varrho}_x}$ est engendrés par les l premiers vecteurs e_1, \dots, e_l de cette base. Si l'on écrit $\varrho = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, \dots, e_n) en décomposant par bloc suivant (e_1, \dots, e_l) et (e_{l+1}, \dots, e_n) , on a donc: γ divisible par π , et α modulo π est une représentation dont les facteurs de Jordan-Hölder sont $\text{JH}(x, y)$. Il existe des entiers a_1, \dots, a_n tels que la base des $(f_i)_{i=1, \dots, n}$ avec $f_i = \pi^{a_i} e_i$ soit une base de \mathcal{A}' . Dire que (x, y) et (x', y') définissent le même vecteur revient alors à dire que le sous-espace correspondant à y' dans $V_{\overline{\varrho}_{x'}}$ est engendré par f_1, \dots, f_l . Écrivant $\varrho' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ dans la base (f_1, \dots, f_n) en décomposant par blocs de longueur l et $n - l$, on voit que α' et α sont conjuguées (par la matrice $\text{diag}(\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_l})$). Pour tout g , $\alpha(g)$ et $\alpha'(g)$ ont donc les mêmes polynômes caractéristiques, et donc les deux représentations $\alpha \bmod \pi$ et $\alpha' \bmod \pi$ ont les mêmes facteurs de Jordan-Hölder par le théorème de Brauer-Nesbitt. Ceci prouve a).

Les points c) et d) sont faciles et laissés au lecteur. Grâce à d) et à une récurrence sur k , il suffit de prouver b) pour $k = 1$. Si (x, x_1) est une arête de type 1 du sous-appartement $\mathcal{C}l(\varrho)$, soit F une face de dimension d de $\mathcal{C}l(\varrho)$. Numérotions les points de F (autres que x et x_1) x_2, \dots, x_{d-2} de manière à ce que le type de l'arête (x, x_k) soit k . D'après d), on a $\deg \text{JH}(x, x_{d-1}) = \deg \text{JH}(x, x_1) + \deg \text{JH}(x_1, x_2) + \dots + \deg \text{JH}(x_{d-2}, x_{d-1})$ et d'après c), on a $d = \deg \text{JH}(\overline{\varrho}_{ss}) = \deg \text{JH}(x, x_1) + \dots + \deg \text{JH}(x_{d-1}, x)$. Comme les d termes du membre de droite sont des entiers strictement positifs, il sont tous égaux à 1, ce qui prouve b). ■

On a une réciproque partielle du point a) de la proposition précédente:

PROPOSITION 3.4.4. *Soit \mathcal{C} un appartement contenant une facette F de dimension $d - 1$ de S . Soit $\varepsilon_i = 0$ ou 1 pour $i = 1, \dots, c$, les ε_i étant non tous nuls et non tous égaux à 1 . Si deux arêtes (x, y) et (x', y') de $\mathcal{C}(\varrho) \cap S$ vérifient*

$$\mathrm{JH}(x, y) = \mathrm{JH}(x', y') = \sum_{i=1}^c \varepsilon_i m_i \bar{\varrho}_i,$$

alors (x, y) et (x', y') déterminent le même vecteur de $\mathcal{C}(\varrho)$.

DÉMONSTRATION. Il existe un isomorphisme entre $\mathcal{C}(\varrho)$ et l'appartement standard de dimension $d - 1$ qui envoie les points de F sur les classes des d -uplets qui sont croissants et constitués de 0 et de 1 . Pour $i = 0, \dots, d$, notons x_i le point de F dont les coordonnées sont $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ le dernier 0 étant en i -ème position. L'arête (x_i, x_{i+1}) étant de type 1 (dans le sous-appartement $\mathcal{C}(\varrho)$, on a d'après le point b) de la proposition 3.4.3 $\mathrm{JH}(x_i, x_{i+1}) = \bar{\varrho}_{f(i+1)}$ où $f(i+1)$ est un entier entre 1 et c . Ceci définit une application $f : \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, c\}$. Une application des points c) et d) de la proposition précédente montre que f est surjective, et que pour $i = 1, \dots, c$, $f^{-1}(i)$ est de cardinal m_i .

Comme toute arête de $\mathcal{C}(\varrho)$ est équipollente à une unique arête de la forme (x_0, x) , où x est un voisin de x_0 , il suffit pour prouver la proposition de voir qu'il existe au plus un voisin x de x_0 tel que $\mathrm{JH}(x_0, x) = \sum_{i=1}^c \varepsilon_i m_i \bar{\varrho}_i$. Si x est un voisin de x_0 , il a un système de coordonnées (a_1, \dots, a_d) avec $a_i \in \{0, 1\}$, les a_i étant non tous nuls, et non tous égaux à un. Grâce à la proposition précédente, points a) et d), on voit que $\mathrm{JH}(x_0, x) = \sum_{i, a_i=1} \bar{\varrho}_{f(i)}$. Pour que $\mathrm{JH}(x_0, x) = \sum_{i=1}^c \varepsilon_i m_i \bar{\varrho}_i$, il faut donc que $a_i = \varepsilon_{f(i)}$, ce qui détermine au plus un x . ■

PROPOSITION 3.4.5. *Soit $x \in S$. Considérons des entiers ε_i comme dans la proposition précédente. Les deux assertions sont équivalentes*

- (1) *Le sommet x n'a pas de voisin y dans S tel que $\mathrm{JH}(x, y) = \sum_i \varepsilon_i m_i \bar{\varrho}_i$.*
- (2) *Il existe i et j , avec $\varepsilon_i = 1$, et $\varepsilon_j = 0$, et un sous-quotient de $\bar{\varrho}_x$ qui est extension non scindée de $\bar{\varrho}_i$ par $\bar{\varrho}_j$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que (2) n'est pas vérifiée. Soit $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_d$ une suite de Jordan-Hölder quelconque de ϱ_x . Si pour un entier

k , la représentation V_{k+2}/V_k est une extension de $\bar{\varrho}_i$ par $\bar{\varrho}_j$, avec $\varepsilon_i = 1$ et $\varepsilon_j = 0$, alors elle est scindée. Remplaçant V_{k+1} par l'image réciproque de $\bar{\varrho}_i$ dans V_{k+2} , on se ramène au cas $V_{k+1}/V_k = \bar{\varrho}_i$. En itérant le procédé, on obtient un entier k tel que $\text{JH}(V_k) = \sum_i \varepsilon_i m_i \bar{\varrho}_i$.

Réciproquement, si (1) n'est pas vérifié, alors il existe une sous-représentation W de $\bar{\varrho}_x$ telle que $\text{JH}(W) = \sum_i \varepsilon_i m_i \bar{\varrho}_i$. Si $V_1 \subset V_2$ sont deux sous-représentations de $\bar{\varrho}_x$ telle que V_2/V_1 soit une extension de $\bar{\varrho}_i$ par $\bar{\varrho}_j$, avec $\varepsilon_i = 1$ et $\varepsilon_j = 0$, alors $W \cap V_2/W \cap V_1$ est isomorphe à $\bar{\varrho}_i$ et l'extension V_2/V_1 est scindée. ■

3.4.6. Coloriage des segments orientés. Soit $[x, y]$ un segment orienté. D'après la proposition 3.4.3, toutes ses arêtes orientés dans le même sens ont même JH. On définit $\text{JH}([x, y])$ comme le JH de l'une de ces arêtes.

4. Preuve du théorème 1.

On prouve le théorème 1 par l'absurde. On suppose que ϱ est irréductible, mais que le graphe Γ_ϱ n'est pas connexe orienté. Il existe alors un sous-ensemble E de l'ensemble des facteurs de Jordan-Hölder tels qu'aucune flèche de Γ_ϱ n'ait son origine dans ce sous-ensemble E et son extrémité en dehors. Posons $\varepsilon_i = 1$ si $\bar{\varrho}_i \in E$, $\varepsilon_j = 0$ sinon. D'après la proposition 3.4.5, pour arriver à une contradiction, il suffit de trouver un point x dans S dont aucun voisin y dans S ne vérifie $\text{JH}(x, y) = \sum_i \varepsilon_i m_i \bar{\varrho}_i$.

Soit $x \in S$. Si x n'a pas de voisin y dans S tel que $\text{JH}(x, y) = \sum_i \varepsilon_i m_i \bar{\varrho}_i$, alors c'est le point cherché. Sinon, il existe un segment orienté $[x, y]$ tel que $\text{JH}(x, y) = \sum_i \varepsilon_i m_i \bar{\varrho}_i$. Comme ϱ est irréductible, la proposition 3.2.1 implique que S ne contient pas de demi-droites. L'ensemble des segments inclus dans S et contenant $[x, y]$ est inductif, car une union croissante de segments de S est encore un segment d'après le lemme 2.5.4. Soit $[a, b]$ un segment maximal inclus dans S et contenant $[x, y]$ que nous convenons d'orienter dans le même sens que $[x, y]$. On a alors $\text{JH}([a, b]) = \text{JH}([x, y])$.

Montrons qu'il n'existe pas de voisin c de b dans S tel que $\text{JH}(b, c) = \text{JH}(x, y)$. Supposons qu'il existe un tel c . Soit F une facette de dimension $d - 1$ de S dont l'adhérence contient l'arête (b, c) (voir le corollaire 2.4.3). D'après le lemme 2.5.5, il existe un appartement \mathcal{C} contenant $[a, b]$ ainsi

que F . Dans le sous-appartement $\mathcal{C}(\varrho)$, l'arête (b, c) est équipollente à toute arête orienté de $[a, b]$, d'après la proposition 3.4.4. La réunion de $[a, b]$ et de $[b, c]$ forment donc un segment $[a, c]$ contredisant la maximalité de $[c, b]$.

Le point b vérifie donc les propriétés voulues. CQFD.

REFERENCES

- [EGA] A. GROTHENDIECK - J.-A. DIEUDONNÉ, *Éléments de géométrie algébrique*, Publications mathématiques de l'IHES (numéro 8 pour le chapitre II).
- [B] J. BELLAÏCHE, *Congruences endoscopiques et représentations galoisiennes*, thèse de doctorat, Orsay, janvier 2002, disponible sur <http://www.math.u-psud.fr/theses-orsay/2002/2395.html>
- [B-C] J. BELLAÏCHE - G. CHENEVIER, *Formes non tempérées pour $U(3)$ et conjectures de Bloch-Kato*, arXiv :mathNT/0212282 = preprint PUMA 672 de l'université de Nice disponible sur <http://arXiv.org> ou sur <http://www.math-unice.fr>
- [B-G] J. BELLAÏCHE - P. GRAFTIEAUX, *Représentations sur un anneau de valuation discrète complet*, preprint PUMA 677 de l'université de Nice, disponible sur <http://www.math-unice.fr>
- [Bou] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique: groupes et algèbres de Lie*.
- [B-T] F. BRUHAT - J. TITS, *Groupes réductifs sur un corps local*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., **41** (1972).
- [Corvallis] A. BOREL - W. CASSELMAN, editors, *Automorphic forms, representations, and L-functions*, P.S.P.M XXXIII, 1979 American Math. Society.
- [C-R] C. CURTIS - I. REINER, *Methods of representation theory*, vol. 1 (1981), Wiley-Interscience.
- [R] K. RIBET, *A modular construction of unramified extension of $\mathbb{Q}(\mu_p)$* , Invent. Math., **34**, no. 3 (1976), pp. 151-162.
- [S] T. STEGER, *Local Fields and Buildings*, in *Harmonic Functions on Trees and buildings*, Adam Koranyi editeur Contemporary Mathematics, **206** (1997), pp. 79-107.
- [T] J. TITS, *Reductive Groups over Local Fields*, in [Corvallis], volume 1, pp. 29-69.
- [TH] J. G. THOMPSON, *Vertices and sources*, J. Algebra, **6** (1967), pp. 1-6.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 maggio 2002
e in forma finale il 20 aprile 2003.