RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

L. GARNIER

Descente des isocristaux et $\mathcal{D}^\dagger$-modules

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 100 (1998), p. 143-186

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1998__100__143_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 100 (1998)

Descente des isocristaux et $\mathcal{D}^\dagger$-modules.

L. GARNIER (*)

ABSTRACT - Christol, Dwork and subsequent authors have proved various statements about Frobenius descent for isocrystals on the rigid projective line. In this paper, we use P. Berthelot's $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}$-module theory to give new proofs of these statements. This is done thanks to a family of infinite differential operators representing Dwork's ψ operator and which was constructed in a previous paper. We also give some applications to the Jordan decomposition of overconvergent fuchsian isocrystals, hence giving may be some new insight on a recent work of Dwork, Mebkhout and Christol arising in their proof of the finiteness of index of p-adic differential operators.

0. – Introduction.

Dans leur preuve récente de la finitude de l'indice des équations différentielles p-adiques, Christol et Mebkhout utilisent de façon essentielle l'existence de structures de Frobenius faibles [Ch-M1, Ch-M2]. On se propose dans ce papier de donner de nouvelles preuves des énoncés de descente par Frobenius pour divers types d'isocristaux dont on contrôle le rayon de convergence. Pour un tel isocristal E, $\mathrm{sp}_*(E)$ définit un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-module pour m convenable ($\mathfrak{X}$ désignant un relèvement formel au-dessus d'un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique et de corps des fractions K, d'une courbe lisse définie sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, t un paramètre uniformisant en un point fermé x et $\mathrm{sp}\colon \mathfrak{X}_K \to \mathfrak{X}$ le morphisme de spécialisation). On se ramène ainsi dans

(*) Indirizzo dell'A.: Laboratoire de Mathématiques Pures, Université Bordeaux I, 351 Cours de la Libération, F-33 405 Talence cédex, France.
E-mail: garnier@math.u-bordeaux.fr
Classification AMS : 12H25, 14G20, 14F30, 14H.

le cadre de la theorie des $\mathcal{D}^\dagger$-modules de P. Berthelot pour laquelle on dispose d'un énoncé général de descente par Frobenius [Be3, Be4]. Comme expliqué dans un précédent article [Ga2], on peut donner une description explicite de ce théorème à l'aide d'opérateurs différentiels infinis, notés $H_t^{(s)}$ $(s \geqslant 0)$, qui représentent l'opérateur ψ de Dwork. La descente se formule alors aisément à l'aide de H. On examinera le cas des modules à connexion, celui des modules libres muni d'une connexion à singularité logarithmique et enfin celui des modules surconvergents. On espère ainsi sans prétendre à l'originalité, donner une présentation unifiée et davantage intrinsèque des divers théorèmes de descente ce qui permet de simplifier les preuves et de s'affranchir autant que possible du cadre matriciel, une telle formulation laissant aussi espérer de possibles généralisations en dimension supérieure.

On donne enfin un critère de nature topologique pour l'existence d'une décomposition de Jordan d'un isocristal surconvergent E, fuchsien en x. On demande pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ et toute section e de E définie sur une couronne fermée de $]x[\simeq D(0, 1^-)$, l'existence de la limite $\lim_s t^{\alpha_s} H_t^{(s)} t^{-\alpha_s}(e)$ où $\alpha_s \in [0, p^{s+1}[$ est le tronqué de α modulo p^{s+1} et la limite étant considérée sur la couronne sélectionnée. On peut alors donner une description précise de la décomposition de $E_{|]x[}$. Ces résultats, quoique énoncés dans un langage différent, recoupent ceux prouvés simultanément par Dwork dans une prépublication récente.

Je voudrais remercier pour son hospitalité l'université de Padova où ces résultats ont été exposés lors d'un séjour en Mai 96.

1. – Notations et rappels.

(1.1) Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de corps des fractions K, d'inégale caractéristique 0 et p qui relève k. Sa valuation, notée v_p sera normalisée par $v_p(p) = 1$ et π désignera un paramètre uniformisant de $\mathcal{V}$. Dans la suite, X sera une courbe lisse sur k et $\mathcal{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse $\mathcal{X}$ de dimension 1 qui relève X. On note aussi $\mathcal{V}_n := \mathcal{V}/\mathfrak{m}^{n+1}$ et $X_n := \mathcal{X} \times \operatorname{Spec}(\mathcal{V}_n)$.

On suppose qu'il existe sur $\mathcal{V}$, un relèvement global σ du $s+1$-ième itéré du Frobenius de k $(s \geqslant 0)$. On note alors X'_n (resp. $\mathcal{X}'$) le relèvement de $X' := X \times_\sigma k$ sur $\mathcal{V}_n$ (resp. $\mathcal{V}$) déduit de X_n (resp. $\mathcal{X}$); l'isomorphisme $\mathcal{X}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}$ est encore désigné par σ. On suppose, ce qui est toujours

possible sur tout ouvert affine, que le Frobenius relatif $F\colon X \to X'$ se relève au-dessus de σ sur X_n (resp. sur $\mathfrak{X}$) en $F_n\colon X_n \to X_n'$ (resp. $F_{\mathfrak{X}}\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$), relèvements qu'on désignera encore le plus souvent par F s'il n'y a pas d'ambiguïté. Si cela s'avère nécessaire de préciser s, on notera $X^{(s+1)}$, $\mathfrak{X}^{(s+1)}$, $F^{(s+1)}\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{(s+1)}$ à la place de X', $\mathfrak{X}'$, F respectivement. On suppose que les différents relèvements $F^{(s)}$ sont compatibles entre eux de sorte qu'on a $F^{(s+1)} = F^{(s)\prime} \circ F$ (voir [SGAV], exp. XV).

La norme spectrale sur l'espace rigide $\mathfrak{X}_K$ associé à $\mathfrak{X}$, sera notée $\| - \|_{\mathrm{sp}}$. Rappelons qu'il existe un morphisme d'espaces annelés $\mathrm{sp}\colon \mathfrak{X}_K \to \mathfrak{X}$ ([Be1], 0.2.3). Si Y est un sous-k-schéma de X, le tube de Y dans $\mathfrak{X}$, noté $]Y[_{\mathfrak{X}}$ est par définition $\mathrm{sp}^{-1}(Y)$ (voir [Be1, 1.1.1]). On renvoie à [Be1] pour toutes les définitions et résultats relatifs aux tubes et aux voisinages stricts.

(1.2) Localement sur un ouvert affine U de $\mathfrak{X}$, de la forme $\mathrm{Spf}(A)$, A désignant une $\mathcal{V}$-algèbre topologiquement de type fini, on choisit une base dt de $\Omega^1_{\mathfrak{X}}$ et x est un point k-rationnel; quitte à diminuer U, on peut supposer que $V(t) = \{x\}$. Sur U, on peut choisir un relèvement du Frobenius relatif donné par $F^*(t) = t^q$ $(q := p^{s+1})$. Rappelons aussi que $]x[_{\mathfrak{X}} \simeq D(0, 1^-)$ et que si $A' := A \otimes_\sigma \mathcal{V}$, alors A est libre de rang q sur A' de base $1, t, \ldots, t^{q-1}$.

On note pour $m \geqslant 0$, $\lambda_m := p^{-1/(p-1)p^m}$ de sorte que $\lim_m \lambda_m = 1^-$. Pour $k \geqslant 0$, on écrit $k = q_k^{(m)} p^m + r_k^{(m)}$, $0 \leqslant r_k^{(m)} < p^m$. On a alors

$$(1.2.1) \qquad \lambda_0^{\sigma(k)} \leqslant \lambda_m^k \, |q_k^{(m)}!|^{-1} \leqslant p^m \lambda_0^{\sigma(k)}, \qquad |q_k^{(m)}!|\lambda_m^{-k} < |\pi|^{\sigma(q_k^{(m)})-1},$$

$\sigma(k)$ étant défini par $k - \sigma(k) = (p-1)\, v_p(k!)$. On note aussi par π_0 (à ne pas confondre avec l'uniformisante π de $\mathfrak{m}$), une solution dans $\overline{K}$ de l'équation $X^{p-1} = -p$; on a donc $|\pi_0| = \lambda_0$.

On notera j l'inclusion $X \backslash \{x\} \hookrightarrow X$, V_λ (resp. V_m lorsque $\lambda =_m$) le voisinage strict de $]X \backslash x[_{\mathfrak{X}}$ dans $\mathfrak{X}_K$ défini par $\{y \in \mathfrak{X}_K / |t(y)| \geqslant \lambda\}$, j_λ (resp. j_m lorsque $\lambda = \lambda_m$) l'inclusion $V_\lambda \hookrightarrow \mathfrak{X}_K$; rappelons que V_λ est intrinsèque dès que $\lambda > |\pi|$. Enfin, $j^\dagger \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}$ désignera le faisceau des sections surconvergentes en x c'est à dire

$$(1.2.2) \qquad j^\dagger \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K} := \lim_{\lambda \to 1^-} \Gamma(V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}).$$

Si (E, ∇) désigne un module à connexion défini sur un voisinage strict de

$]X\backslash x[_{\mathcal{X}}$, alors il existe un isomorphisme canonique commutant aux connexions

$$F^*(j^\dagger E) \xrightarrow{\sim} j^\dagger(F^* E). \tag{1.2.3}$$

De plus, pour tout morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses $F\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{D}_{\mathcal{X}} \otimes \mathbb{Q}$-linéaire [Hu, 1.5.4] ($\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ désignant le faisceau des opérateurs différentiels ordinaires sur $\mathcal{X}$),

$$F^*(\mathrm{sp}_*(j^\dagger E)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(F_K^*(j^\dagger E)). \tag{1.2.4}$$

1.3. *Rappels sur les opérateurs $H_t^{(s)}$.*

On se contente ici de transcrire les principales définitions et propriétés de [Ga2] dans le cadre des courbes. Commençons par rappeler la description locale sur U (cf 1.2) des algèbres d'opérateurs différentiels définis par P. Berthelot [Be3] : on note ∂_t (resp. $(\partial_t^{[k]})_{k \geq 0}$), la dérivation (resp. la base de $\Gamma(U, \mathcal{D}_{\mathcal{X}})$) associée à la coordonnée t. On a donc $\partial_t^k = k!\, \partial_t^{[k]}$. Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ admet une filtration par les faisceaux $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ ($m \geq 0$) qui sont libres sur U de base la famille $(\partial_t^{\langle k \rangle_m})_{k \geq 0}$, cette dernière étant caractérisée, avec les notations de 1.2.1, par

$$\partial_t^k = (k!/q_k^{(m)}!)\, \partial_t^{\langle k \rangle_m}. \tag{1.3.1}$$

Le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger$) des opérateurs différentiels d'ordre infini et de niveau m (resp. de niveau fini) s'obtient en prenant le séparé complété de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ (resp. $\varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$). En coordonnées locales, $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger$ possèdent les descriptions suivantes:

$$\begin{cases} \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}) = \left\{ \sum_{k \geq 0} a_k \partial_t^{\langle k \rangle_m},\ a_k \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}),\ \lim_{k \to +\infty} a_k = 0 \right\}, \\ \Gamma(U, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger) = \\ \quad = \left\{ \sum_{k \geq 0} a_k \partial_t^{[k]},\ a_k \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}),\ \exists c > 0,\ \eta < 1,\ \forall k,\ \|a_k\| \leq c\eta^k \right\}. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

On pose enfin, $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}^{(m)} := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \otimes \mathbb{Q}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}^\dagger := \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger \otimes \mathbb{Q}$.

Si t et t' relèvent sur $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ le même paramètre uniformisant en x (c'est à dire $t - t' \in \mathfrak{m}A$), alors on définit l'opérateur de translation (ou

de Taylor) [Be2, 2.2.1] par

$$T_{t,t'} := \sum_{k \geq 0} (t - t')^k \partial_{t'}^{[k]} \in \Gamma(U, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger). \tag{1.3.3}$$

Il existe d'après [Ga2, 2.4], un opérateur $H \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}^\dagger)$ représentant "la trace divisée" (c'est à dire la fonction ψ de Dwork). Localement sur U, si Γ est la famille des qA'-homomorphismes de $\mathrm{Frac}(A)$ dans sa clôture algébrique, alors H est défini par

$$H := \frac{1}{q} \sum_{\tau \in \Gamma} T_{\tau(t), t}, \qquad q := p^{s+1}. \tag{1.3.4}$$

La définition se recolle pour donner un opérateur global. Par construction, on a pour tout $f \in A$, $qH(f) = F^*(\mathrm{Tr}_{A/A'}(f))$, $H^2 = H$ et H définit un élément de $\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$. Lorsque $F^*(t) = t^q$, on a l'égalité $\{\tau(t), t \in \Gamma\} = \{\zeta t, \zeta^q = 1\}$ et l'on obtient un opérateur dépendant du choix de la coordonnée locale t qu'on note H_t (ou bien $H_t^{(s)}$ si l'on désire spécifier qu'on travaille avec le $s+1$-ième itéré du Frobenius) et qui s'explicite comme suit:

$$H_t = \sum_{k=0}^{q-1} (-t)^k \partial_t^{[k]} + \sum_{k \geq q} \sum_{l \leq k,\, q/l} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} t^k \partial_t^{[k]} \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(1)}). \tag{1.3.5}$$

Pour $r < q$, l'opérateur $H_t t^{-r}$ est dans $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}_X^{(1)})$ et définit donc un élément du dual $\mathrm{End}_{A'}(A)$, on obtient ainsi une base du dual. On a de plus l'égalité dans $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}_X^{(1)})$:

$$\sum_{r < q} t^r H_t t^{-r} = 1. \tag{1.3.6}$$

1.4. *Descente par Frobenius à l'aide de H.*

Le théorème de descente par Frobenius pour les $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger$ modules [Be4] admet une formulation explicite décrite dans [Ga2]:

PROPOSITION 1.4.1. *Supposons que* $H \in \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m+s+1)})$ *et soit* $\mathcal{E}^{(m+s+1)}$ *un* $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m+s+1)}$*-module. Définissons alors*

$$\mathcal{E}^{(m)} := \mathrm{Im}\,(F_* \mathcal{E}^{(m+s+1)} \xrightarrow{H} F_* \mathcal{E}^{(m+s+1)}).$$

Alors $E^{(m)}$ *possède une structure de* $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$*-module et la flèche canonique d'adjonction* Φ: $F^*(\mathcal{E}^{(m)}) \to \mathcal{E}^{(m+s+1)}$ *est un isomorphisme de* $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m+s+1)}$*-modules.*

L'énoncé mérite quelques explications: l'image inverse par F d'un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$-module est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m+s+1)}$-module d'après les résultats de [Be4], H étant $F^{-1}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}'})$-linéaire, $\mathcal{E}^{(m)}$ possède effectivement une structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$-module. L'énoncé s'applique en particulier pour tout $m \geqslant 0$, lorsque $\mathcal{X}$ est affine comme en 1.2 et $F^*(t) = t^q$ modulo p puisqu'alors $H \in \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(1)})$ [Ga2, 2.4.4]. On va décrire explicitement la structure de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$-module de $\mathcal{E}^{(m)}$ ainsi que l'isomorphisme inverse dans le cas où $\mathcal{X}$ est affine et $F^*(t) = t^q$.

L'inverse de Φ est alors donné sur U et pour tout $m \geqslant 0$, par

$$\Phi^{-1}\colon \mathcal{E}^{(m+s+1)} \to F^*(\mathcal{E}^{(m)}), \qquad e \mapsto \sum_{r<q} t^r \otimes H_t t^{-r}(e), \tag{1.4.2}$$

ce qui a bien un sens puisqu'on a vu que $H_t t^{-r}$ vit dans $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(1)})$ et d'autre part, 1.3.6 montre que 1.4.2 est bien un inverse à droite de Φ. L'action de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$ sur $\mathcal{E}^{(m)}$ se lit sur $\mathcal{E}^{(m+s+1)}$ via l'isomorphisme Φ. Si $H_t(e) \in \Gamma(U', \mathcal{E}^{(m)})$, alors [Ga2, 4.1]:

$$\Phi(1 \otimes \partial_t H_t(e)) = (\partial_t)'(H_t(e)) = (\partial_t)'(e),$$

où

$$(\partial_t)' := (qt^{q-1})^{-1} \partial_t H_t .$$

En itérant la construction, on obtient une famille d'opérateurs dans $\Gamma(U, \mathcal{D}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}^{\dagger})$:

$$(\partial_t^k)' := (\partial_t')^k, \quad (\partial_t^{[k]})' := (\partial_t')^k/k!, \quad (\partial_t^{\langle k\rangle_m})' := a_k^{(m)}!(\partial_t^{[k]})', \tag{1.4.3}$$

avec la convention que $(1)' = H_t^{(s)}$. Comme on a supposé que $F^*(t) = t^q$, on possède la description explicite suivante des coefficients de $(\partial_t^{[k]})'$ [Ga2, 4.5.2]

$$(\partial_t^{[k]})' = \tag{1.4.4}$$

$$= \sum_{u \geqslant k} \sum_{r<q} (-t)^{(u-k)q+r} \left[\sum_{i \leqslant u-k} (-1)^i \binom{uq+r}{q(k+i)} \binom{k+i}{k} \right] \partial_t^{[uq+r]}.$$

On montre également que $(\partial_t^{\langle k\rangle_m})' \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m+s+1)})$ et donc qu'en particulier $(\partial_t^k)' \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(s+1)})$. Enfin, pour tout opérateur $P = \sum_k a_k \partial_t^{\langle k\rangle_m} \in \Gamma(U', \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}'}^{(m)})$, on pose

$$P' := \sum_k F^*(a_k)(\partial_t^{\langle k\rangle_m})' \in (U, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m+s+1)}), \tag{1.4.5}$$

(resp. $P^{(s+1)}$ si on veut préciser qu'on travaille avec $F^{(s+1)}$); On a $P^{(0)} := P$ et $H_t^{(s+1)} = (H_t^{(s)})^{(1)} = (H_t^{(0)})^{(s+2)}$. Par construction, on a $F^*(P(f)) = P'(F^*(f))$ pour tout $g' \in A'$ et $\Phi(1 \otimes PH_t(e)) = P'(e)$.

1.5. *Rappels sur les rayons de convergence.*

Soient (E, ∇) un module à connexion sur $\mathcal{X}$ et p_i: $\mathcal{X}^2 \rightrightarrows \mathcal{X}$ $(i = 1, 2)$ les deux projections. Pour simplifier les notations, les deux projections $\mathcal{X}_K^2 \rightrightarrows \mathcal{X}_K$ seront encore notées p_i et l'action sur E du composé de ∇ avec ∂_t sera noté simplement ∂_t au lieu de ∇_{∂_t}. L'image inverse $p_2^*(E, \nabla)$ définit une connexion $p_1^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}^2}$-linéaire sur $\mathcal{X}^2$ donnée par $\partial_t(1 \otimes 1 \otimes e) = 1 \otimes \otimes 1 \otimes \partial_t(e)$. On dispose en outre de la connexion triviale $p_{1*}\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^2$-linéaire sur $p_1^* E$ définie par $\partial_t(e \otimes 1 \otimes 1) = 0$. On note $p_i^*(E)^\frown$ le complété de $p_i^*(E)$ le long de la diagonale $\mathfrak{I}$ du produit. Avec la notation standart, $\tau := 1 \otimes \otimes t - t \otimes 1$, on obtient donc un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[\![\tau]\!]$-module cohérent pour la structure droite de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[\![\tau]\!]$ lorsque $i = 1$ (resp. une structure gauche lorsque $i = 2$). On vérifie que la série de Taylor $\hat{\varepsilon}$ définit un isomorphisme horizontal $p_2^*(E, \nabla)^\frown \xrightarrow{\sim} p_1^*(E, \nabla)^\frown$. On en déduit que pour tout $e \in E$, il existe une unique solution de $p_2^*(E, \nabla)^\frown$ congrue à $1 \otimes 1 \otimes e$ modulo $\mathfrak{I} \otimes E$ [Ga1, 1.3.1], qui est donnée par

$$\sum_{k \geq 0} (-\tau)^k \otimes \partial_t^{[k]}(e). \tag{1.5.1}$$

Lorsque e décrit $\Gamma(V_K, E)$, V décrivant les ouverts affines de $\mathcal{X}$, on obtient ainsi un espace vectoriel (sur l'anneau local au point générique de $\mathcal{X}$ tensorisé par $\mathbb{Q}$, agissant sur la première coordonnée) de dimension $\mathrm{rg}(E)$, appelé *espace des solutions génériques de* (E, ∇).

On définit le *rayon de convergence* des solutions génériques comme étant le Sup des $\lambda < 1$ pour lesquels $\hat{\varepsilon}$ est induite par un isomorphisme sur $[X]_{\mathcal{X}^2, \lambda}$. Si U est un ouvert affine de $\mathcal{X}$ comme en 1.2, on peut munir $\Gamma(U_K, E)$ d'une norme de Banach (elles sont toutes équivalentes [BGR, 3.7.3 Prop.3] et on peut en obtenir une en choisissant une présentation de E sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ et en prenant la norme spectrale quotient). Choisissons un recouvrement affine fini $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{X}$ et sur chaque $\Gamma(\mathcal{X}_{i,K}, E)$, une norme de Banach notée $\| - \|_i$. Alors le nombre

$$\mathrm{Sup}\,\{\varrho < 1 / \forall i,\ \forall e \in \Gamma(\mathcal{X}_{i,K} E),\ \|\partial_t^{[t]}(e)\|_i \varrho^k \to 0\}, \tag{1.5.2}$$

ne dépend pas du choix du recouvrement (si $(\mathcal{Y}_j)_{j \in J}$ est un autre recouvrement, considérer le recouvrement $(\mathcal{X}_i \cap \mathcal{Y}_j)_{i,j}$ et le fait que la norme

$e \mapsto \operatorname{Sup}_j \|e_{|\mathcal{X}_i \cap \mathcal{Y}_i}\|_{i,j}$, est équivalente à la norme $\| - \|_i$). De plus, comme E est muni d'une action de ∂_t, d'après [Crw1, 4.9], $\mathrm{sp}_*(E)$ est localement libre sur $\mathcal{X}$, si bien que pour deux ouverts affines $V \subset U$ de X, munis de norme spectrale $\| - \|_V$ et $\| - \|_U$, $\|\partial_t^{[k]}(e)\|_V \varrho^k \to 0$ pour tout $e \in \Gamma(V_K, E)$ si et seulement s'il en est de même sur U. Alors, en notant $\| - \|_{\mathrm{sp}}$, une norme spectrale sur un ouvert affine générique U de $\mathcal{X}$, le rayon de convergence de (E, ∇), noté $\varrho((E, \nabla), 1)$ se calcule par

$$(1.5.3) \qquad \varrho((E, \nabla), 1) = \operatorname{Min}[1, \operatorname*{Min}_{e \in \Gamma(U_K, E)} (\limsup_k \|\partial_t^{[k]}(e)\|_{\mathrm{sp}}^{1/k})^{-1}].$$

On exige que le rayon soit borné par 1 essentiellement parce que la série de Taylor d'une section quelconque de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est de rayon 1. Il suffit en outre de considérer le minimum sur une famille génératrice de $\Gamma(U_K, E)$. Ce nombre dépend a priori du choix de t, mais s'il existe un choix de t pour lequel $\varrho((E, \nabla), 1) > |\theta|$, alors, comme $[X]_{\mathcal{X}^2, \lambda}$ est intrinsèque pour $\lambda > |\theta|$, $\varrho((E, \nabla), 1)$ est également intrinsèque. Enfin, (E, ∇) est *convergent* si et seulement si $\varrho((E, \nabla), 1) = 1$.

(1.5.4) Lorsque E est libre sur un U_K, on peut développer les composantes de $\partial_t^{[k]}(e)$ en série de Taylor ce qui permet d'écrire les solutions 1.5.1 sous la forme $\sum_k G_k(e)/k!\, \tau^k$ avec $G_k \in M_n(\Gamma(U_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}))$ défini par récurrence par

$$G_{n+1} = \partial_t(G_n) + G_n G\,, \qquad G_0 = I_n;$$

le système (E, ∂_t) s'écrivant $\partial_t - G$ dans la base $(e_i)_i$ choisie (ie $\partial_t(e_i) = -Ge_i$).

(1.5.5) Un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$-module cohérent E muni d'une flèche $E \to E \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \Omega^1_{\log}$ ($\Omega^1_{\log}$ étant le module des différentielles sur $\mathcal{X}$ à pôles logarithmiques en x) est appelé *isocristal à singularité logarithmique en x*. Au voisinage de x, sur un ouvert U_K comme en 1.2, il s'agit donc de la donnée d'une flèche K-linéaire ∇: $E \to E$ telle que $\nabla(fe) = t\partial_t(f)\, e + f\nabla(e)$. On peut définir également un rayon générique, noté $\varrho_{\log}(E, 1)$, mais calculé cette fois sur un ouvert affine U de $\mathcal{X}$ contenant x, en remplaçant $\partial_t^{[k]}(e)$ par $t^k \partial_t^{[k]}(e) \in \Gamma(U_K, E)$. On a $\varrho_{\log}(E, 1) \leqslant \varrho(E_{|]X \setminus x[}, 1)$, avec égalité lorsque E est libre. Je ne sais pas s'il y a égalité en général, E pouvant posséder des sections à support en x. Toutefois, cela serait sans doute vrai si l'on savait qu'un tel E puisse se décrire comme extension de modules du type $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}/(t^n)$ par des modules à connexion. Pour simplifier les preuves futu-

res, on n'envisagera ici que le cas des isocristaux à singularité logarithmique en x qui sont libres sur un ouvert affinoïde de la forme U_K, avec $x \in U$ et U comme en 1.2, on notera alors simplement $(E, t\partial_t)$ pour désigner un tel objet.

(1.5.6) Pour tout $\lambda < 1$ tel que $\lambda \in |\overline{K}|$ (sous-groupe de $\mathbb{R}_+$, image par la valeur absolue d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K), on peut également définir le *rayon de convergence sur la circonférence de rayon* λ noté $\varrho((E, \nabla), \lambda)$: si localement $\mathcal{X}$ s'écrit $\mathrm{Spf}(A)$, on construit un schéma formel $\mathcal{X}^{(\lambda)} := \mathrm{Spf}(A \otimes \mathcal{V}_\lambda\{T\}/(t - \xi_\lambda T)$, où $\xi_\lambda \in \overline{K}$, $|\xi_\lambda| = \lambda$ et $\mathcal{V}_\lambda$ est l'anneau de valuation d'une extension de K contenant ξ_λ; $\mathcal{X}^{(\lambda)}$ est lisse et isomorphe à $\mathrm{Spf}(\mathcal{V}_\lambda\{T\})$ et sa fibre générique est isomorphe au disque fermé de rayon λ. Il existe au-dessus de $\mathcal{V}_\lambda$ un morphisme de $\mathcal{V}_\lambda$-schémas formels $i^{(\lambda)}$: $\mathcal{X}^{(\lambda)} \to \mathcal{X} \times \mathrm{Spf}(\mathcal{V}_\lambda)$. On pose alors pour tout module à connexion (E, ∇) défini sur un voisinage strict V_μ et pour $\lambda \geqslant \mu$,

$$\varrho((E, \nabla), \lambda) := \lambda \varrho(i_K^{(\lambda)*}(E, \nabla), 1)\,. \tag{1.5.7}$$

Cela consiste à prendre la restriction de (E, ∇) à la circonférence de rayon λ, puis à travailler sur un disque générique de rayon λ au sens de l'analyse ultramétrique. D'après un résultat de Christol et Dwork, la fonction $\lambda \mapsto \varrho((E, \nabla), \lambda)$ est continue sur $[\mu, 1]$ [Ch-Dw1, 2.5]. On en déduit que (E, ∇) est *surconvergent* si et seulement si $\varrho((E, \nabla), \lambda)$ tend vers 1^- lorsque $\lambda \to 1^-$. On a aussi

$$\varrho((E, \nabla), \lambda) = \mathrm{Min}\,[\lambda, \operatorname*{Min}_{e \in E} (\limsup_k \|\partial_t^{[k]}(e)\|_\lambda^{1/k})^{-1}]\,, \tag{1.5.8}$$

où $\| - \|_\lambda$ désigne une norme spectrale sur la circonférence de rayon λ. Comme pour $\lambda > |\theta|$, la circonférence ne dépend pas du choix de la coordonnée t en x, le rayon $\varrho((E, \nabla), \lambda)$ est donc intrinsèque pour $\lambda \to 1^-$ dès qu'il existe un choix de t pour lequel $\varrho((E, \nabla), \lambda) > \lambda|\theta|$; c'est en particulier le cas lorsque (E, ∇) est surconvergent.

2. – Descente des isocristaux.

Le lien entre isocristaux et $\mathcal{D}$-modules est décrit par le lemme suivant. Rappelons également qu'un module à connexion défini sur un voisinage strict $U_K \cap V_\lambda$ ($x \in U$, U comme en 1.2) est libre quitte à diminuer U et augmenter λ [Crw1, 4.9]. De plus, $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$ est principal [Crw2, 4.5] si bien que tout isocristal défini sur $U_K \cap V_\lambda$ est libre sur la

couronne $[x]_\mu \cap V_\lambda$. A toute base d'un module libre sur un affinoïde V correspond une norme du Sup qui hérite des propriétés de la norme spectrale sur V. En particulier, pour $V := [x]_\mu \cap V_\lambda$, $e \mapsto \operatorname{Sup}_{\gamma \in [\lambda, \mu]} \|e\|_\gamma$ est une norme de Banach.

Enfin, $C_{[\lambda, \mu]}$ désigne pour $\mu \in [\lambda, 1[$, la couronne $V_\lambda \cap [x]_\mu = \{y \in \in]x[_{\mathcal{X}} / |t(y)| \in [\lambda, \mu]\}$.

LEMME 2.1. (i) *Soit* (E, ∇), *un isocristal sur* $\mathcal{X}_K$ *tel que* $\varrho(E, 1) > > \lambda_{m+1}$. *Alors* $\mathrm{sp}_*(E)$ *possède une structure de* $\widehat{\mathcal{D}}^{(m+1)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$*-module cohérent.*

(ii) *Soit* $(E, t\partial_t)$ *un* $\Gamma(U_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$*-module libre muni d'une connexion à singularité logarithmique en* x *(voir* 1.5.5) *avec* $x \in U$. *Si* $\varrho(E, 1) > \lambda_s$, *alors* $\varrho(E, \gamma)/\gamma > \lambda_s$ *pour tout* $\gamma \in]0, 1]$. *De plus les* $H_t^{(s)} t^{-r}$, $r < q$ *ainsi que les* $t^{qk}(\partial_t^{[k]})'$ *agissent sur* $\Gamma(U_K, E)$. *En particulier, si* $\varrho(E, 1) = 1$, *alors* $\varrho(E, \gamma) = \gamma$.

(iii) *Soit* (E, ∇) *un isocristal défini sur un voisinage strict* $U_K \cap \cap V_\lambda$ $(x \in U$, *tel que* $\operatorname{Min}(\varrho(E, 1), \varrho(E, \lambda)) > \lambda_{m+1}$. *Alors* $\mathrm{sp}_*(j_{\lambda *}(E))$ *possède une structure de* $\widehat{\mathcal{D}}^{(m+1)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$*-module.*

(iv) *Soit* (E, ∇) *un isocristal défini sur un voisinage strict* $U_K \cap V_\lambda$ $(x \in U)$ *tel que* $\varrho(E, \gamma)/\gamma > \lambda_s$ *pour tout* $\gamma \in [\lambda, 1]$. *Alors* $H_t^{(s)}$ *agit sur* $\Gamma(U_K \cap V_\lambda, E)$ *et sur* $\Gamma(C_{[\lambda, \mu]}, E)$.

PREUVE. (i) Ce premier point est bien connu. Il suffit de montrer que pour tout ouvert affine U de $\mathcal{X}$, $\Gamma(U_K, E)$ possède une structure de $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(m+1)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$-module. Choisissons $\varrho \in]\lambda_{m+1}, \varrho(E, 1)[$. On a

$$\|q_k^{(m+1)}!\partial_t^{[k]}(e)\|_{\mathrm{sp}} \leqslant (\lambda_{m+1}/\varrho)^k (|q_k^{(m+1)}!|/\lambda_{m+1}^k) \|\partial_t^{[k]}(e)\|_{\mathrm{sp}} \varrho^k \leqslant$$

$$\leqslant (\lambda_{m+1}/\varrho)^k |\pi|^{-\sigma(q_k^{(m+1)})-1} \|\partial_t^{[k]}(e)\|_{\mathrm{sp}} \varrho^k \qquad \text{(cf 1.2.1)}.$$

Comme $|\pi|^{-\sigma(q_k^{(m+1)})} \leqslant k/p^{m+1}$, $\lambda_{m+1}/\varrho < 1$ et $\|\partial_t^{[k]}(e)\|_{\mathrm{sp}} \varrho^k$ borné, on voit que lorsque k varie, $\|q_k^{(m+1)}!\partial_t^{[k]}(e)\|_{\mathrm{sp}}$ reste borné, $\Gamma(U_K, E)$ étant complet, le résultat en découle. D'après [Be1, 3.1.2], il existe un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m+1)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{E}^{(m+1)}$, cohérent en tant que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module et tel que $\mathcal{E}^{(m+1)} \otimes \mathbb{Q} \simeq \simeq \mathrm{sp}_*(E)$. On en déduit la cohérence de $\mathcal{E}^{(m+1)}$ sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(m+1)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$ puis celle de $\mathrm{sp}_*(E)$ sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(m+1)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$.

(ii) Comme E est libre sur U_K, il suffit de montrer que pour tout $\varphi \in \Gamma(V_\gamma \cap [x]_\gamma, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$, $e \in \Gamma(U_K, E)$ et $\varrho < \gamma\varrho(E, 1)$, on a $\lim_{k \to +\infty} \|\partial_t^{[k]}(\varphi e)\|_\gamma \varrho^k = 0$, $\|-\|_\gamma$ désignant une norme spectrale sur la cir-

conférence $V_\gamma \cap [x]_\gamma$. La formule de Leibnitz donne

$$\|\partial_t^{[k]}(\varphi e)\|_\gamma \varrho^k = \|\sum_{i=0}^{k} \partial_t^{[i]}(\varphi)\, \partial_t^{[k-i]} e\|_\gamma \varrho^k \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{Sup}_{i\in[1;k]} (\|\varphi\|_\gamma \gamma^{-i} \gamma^{-(k-i)} \|t^{k-i}\partial_t^{[k-i]} e\|_\gamma \varrho^k) \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_\gamma \operatorname*{Sup}_{i\in[1;k]} ((\varrho/\gamma)^i \|t^{k-i}\partial_t^{[k-i]} e\|_{\mathrm{sp}} (\varrho/\gamma)^{k-i}).$$

La dernière inégalité venant de ce que $t^k \partial_t^k = \prod_{i=0}^{k-1} (t\partial_t - i)$ opère sur $\Gamma(U_K, E)$. Compte tenu de ce que $\varrho/\gamma < \varrho(E, 1) \leqslant 1$, $\|t^k \partial_t^{[k]} e\|_{\mathrm{sp}} (\varrho/\gamma)^k \to \to 0$ lorsque $k \to +\infty$ si bien que $\lim_{k\to+\infty} \|\partial_t^{[k]}(\varphi e)\|_\gamma \varrho^k = 0$.

L'opérateur $H_t^{(s)}$ s'écrit $\sum_{k\geqslant 0} \nu_k t^k \partial_t^{[k]}$ avec $\nu_k \in \mathbb{Z}$ et $\lim_k |\nu_k \backslash q_k^{(s+1)}!| = 0$ (1.3.5); on a aussi $|\nu_k| \leqslant q\lambda_s^k$ car $|\zeta - 1| \leqslant \lambda_s^k$ si $\zeta^q = 1$. Pour tout $k \geqslant 0$ et $e \in (U_K, E)$, $t^k \partial_t^{[k]}(e) \in \Gamma(U_K, E)$, comme E est libre, la norme spectrale sur U_K et sur $(U\backslash\{x\})_K$ coïncident de sorte qu'il suffit de vérifier que $\lim_{k\to+\infty} \nu_k t^k \partial_t^{[k]}(e) = 0$ sur $U\backslash\{x\}$ ce qui résulte de $\varrho(E, 1) > \lambda_s$.

D'après la construction des opérateurs $(\partial_t^{[k]})'$, on a

$$t^{qk}(\partial_t^{[k]})' = (t^k \partial_t^{[k]})' = (\prod_{i=0}^{k-1} (t\partial_t - i))'/k! = q^{-k}/k! \prod_{i=0}^{k-1} (t\partial_t - qi)\, H_t^{(s)}.$$

Cet opérateur agit donc sur $\Gamma(U_K, E)$.

(iii) Il faut voir que $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}^{(m+1)})$ agit sur $\Gamma(U_K \cap V_\lambda, E)$. On sait qu'il existe $\mu \in [\lambda, 1[$ tel que E soit libre à la fois sur $U_K \cap V_\mu$ et sur $[x]_\mu \cap V_\lambda$. On en déduit, grâce aux propriétés de la norme spectrale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ que $e \mapsto \operatorname*{Sup}_{\gamma\in[\lambda,1]} (\|e\|_\gamma) = \operatorname{Max}(\|e\|_\lambda, \|e\|_{\mathrm{sp}})$ est une norme de Banach sur $\Gamma(U_K \cap V_\lambda, E)$. On a en outre, pour tout $\Gamma(U_K \cap V_\lambda, E)$,

$$\|e_\gamma\|_\gamma \leqslant \operatorname{Max}(\|e\|_\lambda, \|e\|_{\mathrm{sp}}) \quad \text{d'où} \quad \varrho(E, \gamma) \geqslant \operatorname{Max}(\varrho(E, 1), \varrho(E, \lambda)).$$

Il suffit alors de voir que $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}^{(m+1)})$ agit sur $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\lambda, E)$ et sur $\Gamma((U\backslash\{x\})_K, E)$. Cela se démontre comme en (i).

(iv) Ici encore, $e \mapsto \operatorname*{Sup}_{\gamma\in[\lambda,\mu]} (\|e\|_\gamma)$ ($\mu \in [\lambda, 1[$, resp. $\mu = 1$) est une norme de Banach sur $\Gamma(C_{[\lambda,\mu]}, E)$ (resp. $\Gamma(U_K \cap V_\lambda, E)$). Avec les notations de (ii), il vient alors pour tout $\gamma \in [\lambda, 1]$, $e \in \Gamma(V_\gamma \cap [x]_\gamma, E)$,

$$\|\nu_k t^k \partial_t^{[k]}(e)\|_\gamma \leqslant q(\gamma\lambda_s/\varrho)^k \|\partial_t^{[k]}(e)\|_\gamma \varrho^k.$$

En choisissant $\varrho \in]\gamma\lambda_s \varrho(E, \gamma)[$, on voit que $H_t^{(s)}$ opère sur $\Gamma(V_\gamma \cap \cap [x]_\gamma, E)$ (la convergence est même uniforme par rapport à γ).

(2.2) On supposera désormais que $F^*(t) = t^q$ afin de rendre la descente des isocristaux explicite. En fait, il ne s'agit là que d'une restriction mineure: si l'on se donne deux relèvements F_1 et F_2 de F tels que $\|F_1^*(t) - F_2^*(t)\|_{\mathrm{sp}} < \lambda_m$ et deux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}$-modules $\mathcal{E}_1^{(m)}$ et $\mathcal{E}_2^{(m)}$ tels que $F_1^* \mathcal{E}_1^{(m)} \simeq F_2^* \mathcal{E}_2^{(m)}$ alors $\mathcal{E}_1^{(m)} \simeq \mathcal{E}_2^{(m)}$. En effet, d'après un résultat classique, il existe un isomorphisme

$$F_1^* \mathcal{E}_1^{(m)} \xrightarrow{\sim} F_2^* \mathcal{E}_1^{(m)}, \quad 1 \otimes e \mapsto \sum_k (F_1^*(t) - F_2^*(t))^k / q_k^{(m)}! \otimes \partial_t^{\langle k \rangle_m}(e).$$

On en déduit l'isomorphisme cherché entre $\mathcal{E}_1^{(m)}$ et $\mathcal{E}_2^{(m)}$ par pleine fidélité du foncteur F_2^*.

PROPOSITION 2.3. *Supposons que $F^*(t) = t^q (q := p^{s+1})$. Soit (E, ∇) un module à connexion sur U_K tel que $\varrho(E, 1) > \lambda_s$. Alors, il existe un module à connexion (E', ∇') sur U_K' tel que $\varrho(E', 1) = \varrho(E, 1)^q$ et un isomorphisme horizontal Φ: $F_K^*(E', \nabla') \xrightarrow{\sim} (E, \nabla)$. De plus (E, ∇) possède une base composée de vecteurs de la forme $H_t(e)$. Enfin, pour tout $\lambda < \varrho(E, 1)$, la donnée de descente canonique sur $F_K^* E'$ est isomorphe à celle induite par l'isomorphisme ε_λ: $p_2^* E \xrightarrow{\sim} p_1^* E$ sur $[U]_{\mathcal{X}^2, \lambda}$.*

PREUVE. Comme $\varrho(E, 1) > \lambda_s$, H_t opère sur $\Gamma(U_K, E)$ d'après 2.1(ii). On peut donc définir E' par

$$\Gamma(U_K', E) := \mathrm{Im}\,(\Gamma(U_K, E) \xrightarrow{H_t} \Gamma(U_K, E)). \tag{2.3.1}$$

Comme H_t est $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$-linéaire, F fini et E $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$-cohérent, E' est $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K'}$-cohérent. L'action des dérivations sur E' se fait par l'intermédiaire des opérateurs $(\partial_t^{[k]})'$ comme en 1.4 puisque ces derniers agissent sur $\Gamma(U_K, E)$ d'après 2.1(ii) ce qui définit une connexion ∇' sur E'. Enfin, il existe une flèche canonique d'adjonction Φ: $F_K^*(E', \nabla') \to (E, \nabla)$ qui est un isomorphisme comme en 1.4, l'inverse étant décrit à l'aide des opérateurs $H_t t^{-r} (r < q)$.

Pour obtenir une base de E composée de vecteurs de la forme $H_t(e)$, il suffit de prendre l'image inverse d'une base de E'. Enfin, l'assertion sur les données de descente provient de la condition de cocycles pour ε_λ qui fournit l'égalité $\varepsilon_\lambda(H_t(e)) = H_t(e) \otimes_F 1 \in E \otimes_F \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ (cf [Ga2, 3.2.3]) et du fait que l'isomorphisme $F_K^* E' \xrightarrow{\sim} E$ est induit par la flèche naturelle $1 \otimes_F H_t(e) \mapsto H_t(e)$. Il reste à prouver la formule $\varrho(E', 1) = \varrho(E, 1)^q$.

On prouve d'abord $\varrho(E', 1) \geqslant \varrho(E, 1)^q$; il suffit de le voir pour $s = 0$, le cas général se déduisant par itération. L'isomorphisme Φ induit une inclusion $E' \hookrightarrow E$; comme pour tout ouvert affine U de $\mathcal{X}$, F définit une isométrie $\Gamma(U'_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}'_K}) \to \Gamma(U_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$, toute norme de Banach $\| - \|_U$ sur $\Gamma(U_K, E)$ induit une norme de Banach, notée $\| - \|_{U'}$, sur $\Gamma(U'_K, E')$. D'après 1.4.4, $t^{pk}(\partial_t^{[k]})'$ s'écrit $\sum_u \alpha_{u,k} t^u \partial_t^{[u]}$ avec $\alpha_{u,k} \in \mathbb{Z}$; mais on a aussi:

$$t^{pk}(\partial_t^{[k]})' = (t^k \partial_t^{[k]})' = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(t\partial_t - i)\right)' /k! = p^{-k}/k! \prod_{i=0}^{k-1}(t\partial_t - pi)\, H_t\,.$$

Un calcul élémentaire montre alors que $|\alpha_{u,k}| \leqslant p^{k+1} \lambda_0^{u-\sigma(u)-k+\sigma(k)}$ (voir par exemple [Ga2, 4.4.2]). On choisit ensuite $r \in]\lambda_0, \varrho(E, 1)[$ puis k assez grand pour que $\|t^u \partial_t^{[u]}(e)\|_U r^u$ soit petit pour tout $u \geqslant kp$. Il vient

$$\begin{aligned}\|t^k \partial_t^{[k]}(e)\|_{U'} r^{pk} &\leqslant \operatorname*{Sup}_{u \geqslant kp}(p^{k+1} \lambda_0^{u-\sigma(u)-k+\sigma(k)} r^{-(u-kp)} \|t^u \partial_t^{[u]}(e)\|_U r^u) \leqslant \\ &\leqslant \operatorname*{Sup}_{u \geqslant kp}(p(\lambda_0/r)^{u-kp}(p\lambda_0^{p-1})^k \lambda_0^{-\sigma(u)+\sigma(kp)} \|t^u \partial_t^{[u]}(e)\|_U r^u \leqslant \\ &\leqslant \operatorname*{Sup}_{u \geqslant kp}(p(\lambda_0/r)^{u-kp} \lambda_0^{-\sigma(u-kp)} \|t^u \partial_t^{[u]}(e)\|_U r^u)\,.\end{aligned}$$

Comme $\operatorname*{Sup}_{u \geqslant kp}(p(\lambda_0/r)^{u-kp} \lambda_0^{-\sigma(u-kp)})$ est borné, $\lim_k \|t^k \partial_t^{[k]}(e)\|_{U'} r^{pk} = 0$ et $\varrho(E', 1) \geqslant \varrho(E, 1)^p > \lambda_0^p$.

Pour λ tel que $\lambda^p \in [\lambda_0^p, \varrho(E', 1)[$, on a $\lambda^{p-1} \geqslant p^{-1}$ de sorte que $(F \times F)([X]_{\mathcal{X}^2, \lambda}) \subset [X']_{\mathcal{X}'^2, \lambda^p}$; en effet, si $|\tau(y)| \leqslant \lambda$, alors on a

$$\begin{aligned}(2.3.2)\qquad |\tau(F \times F(y))| &= |(F \times F)^*(\tau)(y)| = |(t^p \otimes 1 - 1 \otimes t^p)(y)| = \\ &= \left|\sum_{k=1}^{p} \partial_t^{[k]}(t^p)\, \tau^k(y)\right| = |\tau^p(y) \bmod (p)| \leqslant \lambda^p\,.\end{aligned}$$

Comme $\varrho(E', 1) > \lambda^p$, la série de Taylor de E' est induite par un isomorphisme ε_{λ^p}: $p_2^* E' \xrightarrow{\sim} p_1^* E'$ sur le tube $[X']_{\mathcal{X}'^2, \lambda^p}$. Pour un tel λ, on a

$$\begin{aligned}(F \times F)^*(p_2^* E'|_{[X']_{\mathcal{X}'^2, \lambda^p}}) &= (F \times F)^*(p_2^* E')_{[X']_{\mathcal{X}'^2, \lambda}} = \\ &= (p_2^* F^* E')|_{[X]_{\mathcal{X}^2, \lambda}} = (p_2^* E)|_{[X]_{\mathcal{X}^2, \lambda}}\,.\end{aligned}$$

En appliquant le foncteur $(F \times F)^*$ à ε_{λ^p}, on obtient donc un iso-

morphisme

$$(p_2^* E)\,|_{[X]_{\mathfrak{X}'^2,\lambda}} \xrightarrow{\sim} (p_1^* E)\,|_{[X]_{\mathfrak{X}'^2,\lambda'}},$$

d'où l'on déduit que $\varrho(E, 1) \geqslant (E', 1)^{1/p}$.

REMARQUE 2.3.3. Si on dispose de l'hypothèse plus forte $\varrho(E, 1) > \lambda_{s+1}$, alors $\mathcal{E}^{(s+1)} := \mathrm{sp}_*{}^*(E)$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(s+1)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-module. Comme $F^*(t) = t^q$, il existe donc un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}'\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{E}^{(0)}$ tel que $F^*(\mathcal{E}^{(0)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(s+1)}$ (1.4.1). On pose $E' := \mathrm{sp}^*(\mathcal{E}^{(0)})$; $\mathcal{E}^{(0)}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'\mathbb{Q}}$-cohérent de sorte que E' est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'_K}$-cohérent. De plus, d'après [Bel, 4.1.3], $\mathrm{sp}_*(E') \simeq \mathcal{E}^{(0)}$. Comme E' est muni d'une action de ∂_t provenant de celle de $\mathcal{E}^{(0)}$, il est localement libre de rang fini et $\mathcal{E}^{(0)}$ est localement projectif de type fini et même localement libre d'après [Crw1, 4.9]. En appliquant le foncteur sp* à l'isomorphisme $F^*(\mathcal{E}^{(0)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(s+1)}$, on obtient

$$F_K^* E' \xleftarrow{\sim} F_K^* \,\mathrm{sp}^*\, \mathrm{sp}_* E' = \mathrm{sp}^*\, F^*\, \mathrm{sp}_*\, E' \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}^*\, \mathrm{sp}_*\, E \xrightarrow{\sim} E\,.$$

Tous ces isomorphismes commutant à l'action des dérivations.

3. – Descente des isocristaux à singularité logarithmique.

(3.1) Supposons maintenant que $(E, t\partial_t)$ soit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}$-module muni d'une connexion à singularité logarithmique en x et qui soit libre au voisinage de x (voir 1.5.5) et tel que $\varrho(E, 1) > \lambda_s$. Comme $H_t^{(s)}$ est un opérateur en $t\partial_t$, il agit sur $\Gamma(U, \mathrm{sp}_*(E))$ (voir 2.1(ii)). On peut donc encore définir sur U'_K un module cohérent E' en posant

$$E' := \mathrm{Im}\,(F_* E \xrightarrow{H_t^{(s)}} F_* E)\,. \tag{3.1.1}$$

De plus, E' est muni d'une action de $t\partial_t$ car $t\partial_t$ commute à $H_t^{(s)}$. Par construction, il existe une flèche horizontale Φ: $F_K^* E' \to E$ mais qui n'est par bijective a priori car les opérateurs $H_t^{(s)} t^{-r}$ n'opèrent pas sur $\Gamma(U_K, E)$. On sait par contre grâce à 2.3 que Φ est un isomorphisme en dehors de $]x[_{\mathfrak{X}}$ et que $\varrho(E', 1) = \varrho(E, 1)^q$. Il n'est pas clair en revanche que E' soit encore libre sur U'_K. Le lemme suivant donne un critère pour que Φ soit bien un isomorphisme.

LEMME 3.2. *Dans le contexte précédent, avec $q := p^{s+1}$, il y a équivalence entre*

(i) *Il existe une base* $(e_i)_i$ *de* $\Gamma(U_K, E)$ *telle que* $H_t^{(s)}(t^r e_i) = 0$ *pour* $r \in [1, q-1]$.

(ii) *Il existe une base* $(e_i)_i$ *de* $\Gamma(U_K, E)$ *telle que* $H_t^{(s)}(e_i) = e_i$, $\forall i$.

Dans ce cas, $(H_t^{(s)}(e_i))_i$ *est une base de* $\Gamma(U_K, E)$ *et de* $\Gamma(U_K, E')$ *et* Φ *est un isomophisme.*

PREUVE. L'implication (ii)$\Rightarrow$(i) résulte de l'égalité $H_t^{(s)} t^r H_t^{(s)} = \delta_{0,r} H_t^{(s)}$ pour $r < q$. Réciproquement, supposons que $(e_i)_i$ soit une base de E telle que $H_t^{(s)}(t^r e_i) = 0$ pour $r \in [1, q-1]$. Montrons que la famille $(H_t^{(s)}(e_i))$ est une base de E': si $e \in \Gamma(U_K, E)$ s'écrit $e = \sum_i \lambda_i e_i$ alors $H_t^{(s)}(e) = \sum_{i,r} H_t^{(s)}(t^{-r}\lambda_i) H(t^r e_i)$ si bien que la famille $(H_t^{(s)}(e_i))_i$ engendre $\Gamma(U_K', E')$ et son déterminant est inversible génériquement sur $\mathcal{X}$ puisque E' est libre de même rang que E en dehors de $]x[$. Si maintenant $\sum_i \lambda_i H_t^{(s)}(e_i)$ est nul, avec $\lambda_i \in \Gamma(U_K', \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$, alors les λ_i sont nuls en dehors de $]x[$, donc nuls partout par prolongement analytique. Montrons que $(H_t^{(s)}(e_i))_i$ est également une base de $\Gamma(U_K, E)$. Tout $e = \sum_i \lambda_i e_i \in \Gamma(U_K, E)$ peut aussi se décomposer sous la forme $e = \sum_r (t^r H_t^{(s)} t^{-r})(e)$, $t^r H_t^{(s)} t^{-r}$ étant un opérateur en $t\partial_t$. On vérifie ensuite que

$$t^r H_t^{(s)} t^{-r}(e) - \sum_i t^r H_t^{(s)} t^{-r}(\lambda_i) H_t^{(s)}(e_i) = 0\,,$$

La famille $(H_t^{(s)}(e_i))_i$ engendre donc $\Gamma(U_K, E)$. Le fait qu'elle soit libre se démontre sans difficulté. On a bien sûr $H_t^{(s)}(H_t^{(s)}(e_i)) = H_t^{(s)}(e_i)$, d'où (ii).

Montrons que Φ est un isomorphisme, pour tout $e \in \Gamma(U_K, E)$ s'écrivant $\sum_i \lambda_i e_i$, on définit Φ^{-1} par

$$\Phi^{-1}(e) := \sum_r t^r \otimes \sum_i H_t^{(s)}(t^{-1}\lambda_i) H_t^{(s)}(e_i)\,. \tag{3.2.1}$$

Observons d'abord que $\sum_i H_t^{(s)}(e_i)(t^{-r}\lambda_i) H_t^{(s)}(e_i) \in E'$. La définition de $\Phi^{-1}(e)$ ne dépend pas du choix de la base de E: en effet, d'après le calcul effectué plus haut, $\sum_i t^r H_t^{(s)} t^{-r}(\lambda_i) H_t^{(s)}(e_i)$ est égal à $t^r H_t^{(s)} t^{-r}(e)$ de sorte que pour deux choix de base de E, les deux valeurs qu'on obtient pour $\Phi^{-1}(e)$ coïncident après multiplication par une puissance de t^q et sont donc égales puisque E est sans t-torsion. Pour les mêmes raisons, 3.2.1 définit bien un inverse à droite. Un raisonnement de la même veine

montre également que c'est un inverse à gauche, ce qui achève la preuve.

PROPOSITION 3.3. *Supposons que E soit un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$-module muni d'une connexion à singularité logarithmique en x, qui soit libre sur un ouvert U_K comme en* 1.2 *et tel que $\varrho(E, 1) > \lambda_s$. Alors quitte à effectuer une extension de degré fini de K, il existe un isocristal $\widetilde{E}$ se déduisant de E par des transformations de cisaillement et possédant les mêmes propriétés que E et vérifiant en outre*

$$\mathrm{sp}_*(j^\dagger E) \simeq \mathrm{sp}_*(j^\dagger \widetilde{E}),$$

et tel que si $\widetilde{E}'$ désigne l'isocristal sur U_K' associé à $\widetilde{E}$ en 3.1.1, *on ait des isomorphismes canoniques*

$$\Phi\colon F^*(\mathrm{sp}_* \widetilde{E}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_* \widetilde{E}, \quad F^*(\mathrm{sp}_* j^\dagger \widetilde{E}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_* j^\dagger \widetilde{E},$$

$$\Phi_K\colon F_K^*(\widetilde{E}') \xrightarrow{\sim} \widetilde{E}.$$

et l'égalité

$$\varrho(\widetilde{E}', 1) = \varrho(E, 1)^q,$$

PREUVE. Dans une base fixée $(e_i)_i$ de $\Gamma(U_K, E)$, l'isocristal E est décrit par un système de la forme $t\partial_t + M$. L'hypothèse sur le rayon de convergence de E entraîne que

$$\forall e \in E, \quad \lim_{k \to +\infty} \|t^k \partial_t^{[k]}\|_U \lambda_s^k = 0.$$

Comme E est libre et qu'on peut choisir comme norme spectrale, la norme du Sup dans la base $(e_i)_i$ et que d'autre part, le terme constant de la matrice des $(t^k \partial_t^{[k]}(e_i))_i$ est égal à $\prod_{l=0}^{k-1} |(M(0) - l)/k!|$, on a finalement

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \prod_{l=0}^{k-1} (M(0) - l)/k! \right| \lambda_s^k = 0.$$

D'après [B-Ch, 2.3], pour toute valeur propre λ de $M(0)$, on a alors $d(\lambda, \mathbb{Z}_p) < p^{-s}$. On considère la matrice H_G dont les vecteurs colonne sont les composantes des $H_t^{(s)}(e_i)$ dans la base $(e_i)_i$. On verra plus loin que $H_G(0)$ est idempotente. On aimerait en fait qu'elle soit égale à I_n,

n étant le rang de E. Pour qu'il en soit ainsi, toujours d'après [B-Ch, 2.3], il suffit que $|\lambda| < p^{-s}$, $\forall\lambda$. Pour s'y ramener, on effectue des transformations de cisaillement. Rappelons comment procéder: on commence par effectuer un changement de base dans $\mathrm{Gl}_n(\mathcal{V})$ pour rendre $M(0)$ triangulaire inférieure (ce qui nécessite une extension de degré fini de K pour récupérer les valeurs propres de $M(0)$; voir [DGS, V.4.2]). On peut alors supposer que M s'écrit sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_3 \\ tM_2 & M_4 \end{pmatrix},$$

matrice dans laquelle $M_1(0)$ ne possède qu'une seule valeur propre ν. On pose ensuite $e_i' := t^{-1}e_i$ pour les indices i correspondant aux colonnes de M_1 et $e_i' := e_i$ sinon. La matrice de $(E, t\partial_t)$ devient dans la base $(e_i')_i$

$$t\begin{pmatrix} tI & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t^{-2}I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tI & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 & M_3 \\ tM_2 & M_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1}I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -I + M_1 & tM_3 \\ M_2 & M_4 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit encore d'une matrice dans $M_n(\Gamma(U_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}))$ qui a mêmes valeurs propres que $M(0)$ en $t = 0$, excepté ν qui est changée en $\nu - 1$. Comme la matrice de changement de base est en fait à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}[t^{-1}]$, on peut considérer le sous $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$-module libre de rang n de $j^\dagger E$ engendré par les e_i', noté $\widetilde{E}$. On vérifie que $\widetilde{E}$ est encore muni d'une action de $t\partial_t$ et que $j^\dagger\widetilde{E} \simeq j^\dagger E$. On a également $\varrho(E, 1) = \varrho(\widetilde{E}, 1)$ puisque $\widetilde{E}$ est isomorphe à E en dehors de $]x[_{\mathcal{X}}$. On peut donc décaler les valeurs propres de $M(0)$ par des entiers positifs quelconques. Maintenant, si $d(\lambda, \mathbb{Z}_p) < p^{-s}$, on peut toujours décaler λ d'un entier positif de façon à ce que $|\lambda| < p^{-s}$. La matrice H_G associé au module ainsi obtenu possède un déterminant non nul et inversible sur un petit disque $D(0, r^+)$. On en déduit que la flèche Φ_K: $F_K^*(\widetilde{E}') \to \widetilde{E}$ est un isomorphisme en restriction au disque $D(0, r^+)$. Il suffit pour le voir de reprendre les arguments de la preuve de 3.2 en remarquant que si T est la coordonnée sur $\mathcal{X}_K^{(r)} \simeq D(0, r^+)$ (cf

1.5.6), on a $H_T^{(s)} = H_t^{(s)}$ si bien que Φ_K^{-1} peut se définir comme en 3.2.1:

$$\Phi_K^{-1}\left(\sum_i \lambda_i H_t^{(s)}(e_i)\right) := \sum_{r<p} t^r \otimes H_t^{(s)}(t^{-r}\lambda_i)\, H_t^{(s)}(e_i),$$

$$\lambda_i \in \Gamma(D(0, r^+), \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}).$$

D'autre part, pour tout voisinage strict V_λ, $H_t^{(s)}$ et les $H_t^{(s)} t^{-r}$ agissent sur $\Gamma(V_\lambda, \tilde{E})$ (2.1(ii, iv)). On peut donc poser $\Phi_K^{-1}(e) := \sum_{r<q} t^r \otimes \otimes H_t^{(s)} t^{-r}(e)$ sur $U_K \cap V_\lambda$, $\lambda < r$. Ces deux occurences de Φ_K^{-1} se recollent car $t^r H_t^{(s)}(t^{-r}\lambda_i)\, H_t^{(s)}(e_i)$ est égal à $t^r H_t^{(s)} t^{-r}(e)$ par les mêmes arguments qu'en 3.2. On construit ainsi Φ_K^{-1} sur tout $\Gamma(U_K, \tilde{E})$. Cela prouve que $F_K^*(\tilde{E}') \xrightarrow{\sim} \tilde{E}$, puis en appliquant sp_* et 1.2.3, qu'on a un isomorphisme $F^*(\mathrm{sp}_* \tilde{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(\tilde{E})$. Il vient ensuite

$$F^*(\mathrm{sp}_* j^\dagger \tilde{E}') \underset{(1.2.3)}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{sp}_*(F_K^*(j^\dagger \tilde{E}')) \underset{(1.2.4)}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{sp}_*(j^\dagger F_K^* \tilde{E}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(j^\dagger E).$$

Enfin, on a $\varrho(E, 1) = \varrho(\tilde{E}, 1) = \varrho(\tilde{E}', 1)^{1/q}$, ce qui termine la preuve.

On remarquera que l'énoncé reste vrai en remplaçant le foncteur $j^\dagger$ par $j_{\lambda *}$ (cf 1.2 pour les notations). L'énoncé reste valable même si E n'est pas libre, la preuve étant sensiblement plus compliquée car on doit tuer la composante de t-torsion de E.

(3.4) Au cours de la preuve de 3.3, on a introduit la matrice H_G dont les vecteurs colonne sont les composantes des $H_t^{(s)}(e_i)$ dans une base $(e_i)_i$ de E. Pour simplifier les notations, on suppose $s = 0$. Si H_G est inversible, la matrice de $(E, t\partial_t)$ dans la nouvelle base $(H_t(e_i))$ est à coefficients dans $\Gamma(\mathcal{U}_K' \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$. En effet, on a $t\partial_t(H_t(e_i)) = H_t(t\partial_t e_i) = = H_t\left(\sum_j a_{i,j} H_t(e_i)\right) = \sum_i H_t(a_{i,j})\, H_t(e_i)$. Réciproquement, on peut chercher à partir de $(e_i)_i$ une nouvelle base dans laquelle la matrice de $(E, t\partial_t)$ soit à coefficients dans $\Gamma(U_K', \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$. C'est la démarche suivie par Christol. Il introduit pour ce faire, la matrice

$$H_C := p^{-1} \sum_{\zeta^p = 1} \sum_{k \geq 0} G_k / k!(\zeta - 1)^k \in M_n(\Gamma(U_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})), \tag{3.4.1}$$

où la matrice $G_k \in M_n(\Gamma(U_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})[t^{-1}])$ est définie comme en 1.5.4:

$G_{n+1} = \partial_t(G_n) + G_n M/t$, $G_0 = I_n$ si le système s'écrit $t\partial_t - M$. Il faut voir H_C comme matrice des coordonnées de $(e_i)_i$ dans une base de E' et il est donc légitime de comparer $H_C H_G$ et I_n.

LEMME 3.4.2. *Avec les notations qui précèdent, si le système $(E, t\partial_t)$ s'écrit $t\partial_t - M$ dans la base $(e_i)_i$, on a*

$$H_C H_G = H_t(H_G) = H_t(H_C),$$

$$H_C(0) = H_G(0),$$

$H_t(H_G)$ (resp. $H_t(H_C)$) désignant la matrice obtenue à partir de H_G (resp. H_C) en appliquant H_t sur chaque coefficient. De plus, $H_G(0)$ est diagonalisable, de valeurs propres $\in \{0, 1\}$. Si pour toute valeur propre λ de $M(0)$, on a $|\lambda| < 1$, alors $H_G(0) = I_n$.

PREUVE. La condition de cocycles inverse pour E (en dehors de $]x[_{\mathcal{X}}$) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_i (Id \otimes G_i/i! \otimes Id)\left[\sum_k (t \otimes 1 - 1 \otimes t)^k \partial_t^{[k]}(e) \otimes 1\right](1 \otimes (1 \otimes t - t \otimes 1)^i) =$$

$$= \sum_k (t \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes t)^k \partial_t^{[k]}(e) = \sum_k G_k/k!(1 \otimes 1 \otimes t - t \otimes 1 \otimes 1)^k .$$

Si ζ et μ sont deux racines p-ième de l'unité, on applique à cette égalité la transformation $\mathcal{V}$-linéaire $a \otimes b \otimes c \mapsto T_{\mu t, t}(a)\, b T_{\zeta t, t}(c)$, e décrivant la base. On obtient

$$\sum_i G_i/i!(\zeta t - t)^i \sum_k (\mu t - t)^k \partial_t^{[k]}(I_n) = \sum_k (\mu t - \zeta t)^k T_{\zeta t, t}(\partial_t^{[k]}(I_n)) ,$$

l'expression $T_{\zeta t, t}((\partial_t^{[k]}(I_n))$ signifiant qu'on applique $T_{\zeta t, t}$ à chacun des coefficients de la matrice $\partial_t^{[k]}(I_n)$. En sommant sur ζ et μ, on en déduit

$$p^2 H_C H_G =$$

$$= \sum_{\zeta, \mu} (\mu - \zeta)^k t^k T_{\zeta t, t}(\partial_t^{[k]}(I_n)) = \sum_\zeta T_{\zeta t, t}\left[\sum_\mu (\mu - 1)^k t^k \partial_t^{[k]}(I_n)\right] = p^2 H_t(H_G).$$

On montre de même l'égalité $H_C H_G = H_t(H_C)$. Comme H_t est congru à 1 modulo (t) et que $H_t(H_C) = H_t(H_G)$, on a donc $H_C(0) = H_G(0)$ puis $H_C(0)\, H_G(0) = H_t(H_C(0)) = H_C(0)$ si bien que la matrice $H_C(0)$ est idempotente. Le reste de l'énoncé provient de [B-Ch, 2.3].

4. – Descente des isocristaux surconvergents.

(4.1) On traite maintenant le cas des isocristaux surconvergents. Pour tout $m \geqslant 0$, on note $K_m := K(\zeta_{m+1})$, ζ_{m+1} étant une racine primitive p^{m+1}-ième de l'unité et $\mathcal{V}_m$ l'anneau de valuation de K_m. On note $\xi_m := \zeta_{m+1} - 1$ dont la valuation p-adique est égale à $((p-1)\,p^m)^{-1}$ de sorte que $|\xi_m| = \lambda_m$. Le choix des λ_m peut se justifier par le fait que $\widehat{\mathcal{O}}^{(m)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$ opère sur V_λ pour $\lambda > \lambda_m$ et par le fait qu'on dispose d'inclusions $\mathcal{V}_m \subset \mathcal{V}_{m+1}$. Il faut prendre garde toutefois que $\xi^p_{m+1} \neq \xi_m$.

On supposera que $\mathcal{X}$ est affine de la forme $\mathrm{Spf}(A)$ comme en 1.2. Le schéma formel correspondant à λ_m (1.5.6) qui est donc un modèle formel du disque $D(0, \lambda_m^+)$ sera noté simplement $\mathcal{X}^{\langle m\rangle}$ (à ne pas confondre avec $\mathcal{X}^{(m)}$ défini en 1.1) et le morphisme canonique $\mathcal{X}^{\langle m\rangle} \to \mathcal{X} \times \mathrm{Spf}(\mathcal{V}_m)$ sera noté $i^{(m)}$. On supposera $s = 0$ pour simplifier, les résultats pour s quelconque se déduisant par itération, on a donc $F^*(t) = t^p$. On choisit enfin comme relèvement du Frobenius $\mathcal{X}^{\langle m\rangle} \to \mathcal{X}^{\langle m\rangle'}$, celui donné par $T \mapsto T^p$.

LEMME 4.2. *Il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{X}^{\langle m\rangle'} & \underset{\Delta^{(m)}}{\xrightarrow{\sim}} & \mathcal{X}'^{\langle m-1\rangle} \otimes \mathcal{V}_m & \xrightarrow[i^{(m-1)}]{} & \mathcal{X}' \\
\uparrow F_{\mathcal{X}^{\langle m\rangle}} & & \uparrow \varphi & & \uparrow F_{\mathcal{X}} \\
\mathcal{X}^{\langle m\rangle} & = & \mathcal{X}^{\langle m\rangle} & \xrightarrow{i^{(m)}} & \mathcal{X}
\end{array}$$

dans lequel φ $\Delta^{(m)}$ sont des morphismes de $\mathcal{V}_m$-schémas formels, φ_K étant égal à la flèche induite par F_K sur $D(0, \lambda_m^+)$.

PREUVE. On définit φ par $\varphi(f) := F^*(f)$ pour $f \in A'$, $\varphi(T) := (\xi^p_m/\xi_{m-1})\,T^p$. On vérifie que cela passe au quotient ainsi qu'au complété car $v_p(\xi^p_m/\xi_{m-1}) = 0$. Pour construire $\Delta^{(m)}$, on utilise l'isomorphisme $\mathcal{X}^{\langle m\rangle} \simeq \mathrm{Spf}(\mathcal{V}_m\{T\})$. Il s'agit donc de construire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{V}_m\{T\}' & \underset{\Delta^{(m)*}}{\xleftarrow{\sim}} & \mathcal{V}_{m-1}\{T\}' \otimes_{\mathcal{V}_{m-1}} \mathcal{V}_m \\
\downarrow F^*_{\mathcal{X}^{\langle m\rangle}} & & \downarrow \varphi^* \\
\mathcal{V}_m\{T\} & = & \mathcal{V}_m\{T\}
\end{array}$$

On définit alors $\Delta^{(m)*}$ par $\Delta^{(m)*}(T) := (\xi^p_m/\xi_{m-1})\,T$.

PROPOSITION 4.3. *Sous les hypothèses de* 4.1, *soit* (E, ∇) *un module à connexion sur un voisinage strict* V_μ *de* $]X\backslash x[_{\mathcal{X}}$ *dans* $\mathcal{X}_K$ *tel que* $\operatorname{Inf}_{\lambda\in[\mu,1]} \lambda^{-1}\varrho(E,\lambda) > \lambda_s$. *Il existe alors un module à connexion* E' *sur le voisinage strict* V_{μ^p} *de* $\mathcal{X}'_K$ *tel que*

$$\Phi_K\colon F_K^*(E') \xrightarrow{\sim} E\,,$$

$$\forall\lambda\in[\mu,1],\quad \varrho(E',\lambda^p)/\lambda^p = (\varrho(E,\lambda)/\lambda)^p > \lambda_s^p = \lambda_{s-1}\,.$$

$\Delta^{(n)*}\circ i_K^{(n-1)*}(E') \xrightarrow{\sim} (i_K^{(n)*}E)'$ *sur* $\mathcal{X}^{(n)'}$, *pour tout* n *tel que* $\lambda_n \geqslant \mu$.

Si en outre, $\operatorname{Inf}_{\lambda\in[\mu,1]} \varrho(E,\lambda) > \lambda_{s+1}$, *on note* $\mathcal{E}^{(s+1)} := \mathrm{sp}_*(j_{\mu*}E)$. *Le* $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$*-module* $\mathcal{E}^{(s)} := \operatorname{Im}(F_*\mathcal{E}^{(s+1)} \xrightarrow{H_t} F_*\mathcal{E}^{(s+1)})$ *possède une structure de* $\widehat{\mathcal{D}}^{(s)}_{\mathcal{X}'\mathbb{Q}}$*-module et on a*

$$\Phi\colon F^*(\mathcal{E}^{(s)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(s+1)}\,,\qquad \mathcal{E}^{(s)} \simeq \mathrm{sp}_*(j_{\mu^p*}E')\,.$$

PREUVE. Remarquons tout d'abord que $F(V_\lambda) = V_{\lambda^p}$ car pour $y\in\mathcal{X}_K$, on a $|t(y)|^p = |F^*(t)(y)| = |t(F(y))|$. Comme avec l'hypothèse de l'énoncé, l'opérateur H_t opère sur les V_λ d'après 2.1(iv), on peut poser

$$E' := \operatorname{Im}(F_{K*}E \xrightarrow{H_t} F_{K*}E)\,. \tag{4.3.1}$$

Comme V_μ est affinoïde, E cohérent et F_K fini, $F_{K*}E$ est cohérent sur l'affinoïde $F(V_\mu) = V_{\mu^p}$ de $\mathcal{X}'_K$. D'après les théorèmes de Khiel et de EGA1 § 10, le foncteur sp_* est exact sur les objets cohérents sur les affinoïdes, ce qui entraîne

$$\mathrm{sp}_*(j_{\mu^p*}E') = \operatorname{Im}(\mathrm{sp}_* F_{K*}j_{\mu*}E \xrightarrow{H_t} \mathrm{sp}_* F_{K*}j_{\mu*}E)\,.$$

Sous l'hypothèse $\operatorname{Inf}_{\lambda\in[\mu,1]} \varrho(E,\lambda) > \lambda_{s+1}$, $\mathrm{sp}_* j_{\mu*}E$ est muni d'une structure de $\widehat{\mathcal{D}}^{(s+1)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$-module (2.1(iii)). Comme $\mathrm{sp}_* F_{K*}j_{\mu*}E = F_*\mathrm{sp}_* j_{\mu*}E$, on a $\mathrm{sp}_*(j_{\mu^p*}E') \simeq \mathcal{E}^{(s)}$. D'après 2.3, la flèche canonique $\Phi\colon F^*\mathcal{E}^{(s)} \to \mathcal{E}^{(s+1)}$, est un isomorphisme en dehors de $]x[_{\mathcal{X}}$, mais comme les opérateurs $H_t t^{-r}$ opèrent sur les V_λ pour λ assez proche de 1^- (2.1(iv)), Φ est en fait également un isomorphisme au voisinage de x, $\widehat{\mathcal{D}}^{(s+1)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$-linéaire, l'action de $\widehat{\mathcal{D}}^{(s)}_{\mathcal{X}'\mathbb{Q}}$ sur $\mathcal{E}^{(s)}$ étant donnée par l'action des $(\partial_t^{\langle k\rangle_m})'$

sur $\mathcal{E}^{(s+1)}$. Pour les mêmes raisons, si $\operatorname{Inf}_{\lambda \in [\mu, 1]} \varrho(E, \lambda)/\lambda > \lambda_s$, Φ_K induit un isomorphisme horizontal sur V_{μ^p}: $F_K^*(E') \xrightarrow{\sim} E$.

Les foncteurs image inverse étant exacts à droite et d'après 4.2, on obtient successivement:

$$\varphi_K^* \circ i_K^{(n-1)*}(E') \simeq \operatorname{Im}[\varphi_K^* \circ i_K^{(n-1)*} F_{K*} E \xrightarrow{H_t} \varphi_K^* \circ i_K^{(n-1)*} F_{K*} E],$$

$$\varphi_K^* \circ i_K^{(n-1)*} F_{K*} E = i_K^{(n)*} F_K^* F_{K*} E .$$

On compose cette dernière flèche avec le morphisme d'adjonction pour obtenir une flèche injective et fonctorielle en E, $\varphi_K^* \circ i_K^{(n-1)*} F_{K*} E \to \to i_K^{(n)*} E$. On applique ensuite le foncteur $(F_{\mathcal{X}^{(n)}})_{K*}$. Mais $\varphi_K^* = = (F_{\mathcal{X}^{(n)}})_K^* \circ \Delta_K^{(n)*}$ (4.2) et l'on dispose de la flèche d'adjonction $\mathrm{Id} \to \to (F_{\mathcal{X}^{(n)}})_{K*}(F_{\mathcal{X}^{(n)}})_K^*$ qui est injective car $F_{\mathcal{X}^{(n)}}$ est fidèlement plat, d'où finalement une flèche injective et fonctorielle en E

$$\Delta_K^{(n)*} \circ i_K^{(n-1)*}(F_{K*} E) \hookrightarrow (F_{\mathcal{X}^{(n)}})_{K*}(i_K^{(n)*} E),$$

puis, en notant T une coordonnée sur $\mathcal{X}^{(m)}$ compte tenu de l'égalité $H_T = H_t$, un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\Delta_K^{(n)*} \circ i_K^{(n-1)*}(F_{K*} E) & \xrightarrow{H_t} & \Delta_K^{(n)*} \circ i_K^{(n-1)*}(F_{K*} E) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(F_{\mathcal{X}^{(n)}})_{K*}(i_K^{(n)*} E) & \xrightarrow{H_T} & (F_{\mathcal{X}^{(n)}})_{K*}(i_K^{(n)*} E)
\end{array}$$

Ce diagramme induit une flèche injective $\Delta_K^* \circ i_K^{(n-1)*}(E') \hookrightarrow (i_K^{(n)*} E)'$. Pour se convaincre de la surjectivité, considérons $e \in \Gamma(V_\mu, E)$ et $\varphi \in \in \Gamma(D(0, \lambda_n^+), \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$. On a alors

$$H_T(\varphi e) = \sum_{r<p} H_T(T^{-r}\varphi)\, H_T(T^r e).$$

Pour tout $r < p$, $H_T(T^{-r}\varphi)$ converge sur $D(0, \lambda_{n-1}^+)$ de sorte que $H_T(\varphi e)$ est dans l'image de $\Delta_K^{(n)*} \circ i_K^{(n-1)*}(F_{K*} E) \hookrightarrow (F_{\mathcal{X}^{(n)}})_{K*}(i_K^{(n)*} E)$, on en déduit l'isomorphisme $\Delta_K^* \circ i_K^{(n-1)*}(E') \hookrightarrow (i_K^{(n)*} E)'$ il vient alors d'après 2.3, pour tout n tel que $\lambda_n \geqslant \mu$,

$$\varrho(E', \lambda_{n-1}) = \varrho(i_K^{(n-1)*} E', 1) = \varrho(\Delta_K^* \circ i_K^{(n-1)*} E', 1) = \varrho(i_K^{(n)*} E)', 1) =$$

$$= \varrho(i_K^{(n)*} E, 1)^p = \varrho(E, \lambda_n)^p .$$

On peut du reste démontrer l'égalité $\varrho(E', \lambda^p) = \varrho(E, \lambda)^p$ pour $\lambda \geqslant \mu$, par les mêmes arguments qu'en 2.3. La preuve utilisée ici fonctionne aussi pour tout $\lambda \geqslant \mu$, à condition de recourir à un isomorphisme Δ convenable.

COROLLAIRE 4.4. *Soit (E, ∇) un module à connexion défini sur un voisinage strict V_μ tel que $j^\dagger(E, \nabla)$ soit surconvergent (cf 1.5.6). Si E' est l'isocristal*

$$E' := \operatorname{Im}(F_{K*}E \xrightarrow{H_t} F_{K*}E)$$

défini sur V_{μ^p} alors, $j^\dagger E'$ est surconvergent. Si de plus, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\varrho(E, \lambda) = \lambda^r$ lorsque $\lambda \geqslant \mu$, alors on a également $\varrho(E', \lambda) = \lambda^p$ pour $\lambda \geqslant \mu^p$. En particulier, si E est fuchsien, c'est à dire $\varrho(E, \lambda) = \lambda$, il en est de même de E'.

PREUVE La condition de surconvergence assure que $\lim_{\lambda \to 1^-} \varrho(E, \lambda) = 1 = \varrho(E, 1)$. Par conséquent, pour tout s, il existe μ convenable pour lequel les hypothèses de 4.3 sont satisfaites pour $j_{\mu*}E$. On obtient alors que $\varrho(E', \lambda') = \varrho(E, \lambda^{1/p})^p \to 1^- = \varrho(E', 1)$. Cela entraîne la surconvergence de $j^\dagger E'$ (on n'a pas besoin ici de la continuité de la fonction $\varrho(-, \lambda)$ en $\lambda = 1$). La dernière assertion résulte aussi de la formule $\varrho(E', \lambda) = \varrho(E, \lambda^{1/p})^p$ valable pour $\lambda \geqslant \mu^p$. Dans ce cas, si l'on peut choisir $\mu = \lambda_{s+1}^{1/r}$, alors $\varrho(E, \lambda) > \lambda_{s+1}$ pour $\lambda > \lambda_{s+1}^{1/r}$ (de sorte que $\mathrm{sp}_*(j_{\mu*}E)$ est un $\widehat{\mathcal{O}}_{X\mathbb{Q}}^{(s+1)}$-module) et $\varrho(E', \lambda) = \lambda^r$.

5. – Décomposition de Jordan des isocristaux surconvergents fuchsiens.

(5.1) Récemment, G. Christol et Z. Mebkhout ont défini une notion d'exposants associé à tout isocristal surconvergent E *fuchsien* en x (c'est à dire tel que $\varrho(E, \lambda) = \lambda$ pour λ proche de 1^-) [Ch-M1]. Lorsque l'exposant de E a des *différences non Liouville*, il se représente par un n-uplet d'éléments de $\mathbb{Z}_p$, dans ce cas, E se décompose comme extension successive d'isocristaux de rang un, la décomposition ayant lieu sur l'analogue p-adique des séries formelles méromorphes en x [Ch-M1]. Pour un changement de base approprié, la matrice de E est même alors à coefficients dans K et possède donc une décomposition de Jordan (on dira alors que E possède une *décomposition de Jordan en x*).

On propose ici un critère de nature topologique pour qu'un isocristal surconvergent en x possède une décomposition de Jordan ce qui jette un nouvel éclairage sur le résultat de Christol et Mebkhout. Je leur emprunte l'idée de considérer la suite des antécédents par Frobenius ce qui revient en terme d'opérateurs à étudier la suite $(H_t^{(s)}(E))_{s \geqslant 0}$. Dans une prépublication récente, Dwork a amélioré la construction de l'exposant d'un module fuchsien. Les résultats présentés ici recoupent en partie ceux de Dwork bien que la présentation en soit différente.

(5.2) La K-algèbre R définie par

$$(5.2.1) \qquad R := \varinjlim_{\lambda < 1} \Gamma(V_\lambda \cap]x[, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}) =$$

$$= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k t^k,\ \forall \eta < 1,\ \lim_{k \to +\infty} |\alpha_k| \eta^k = 0;\ \exists \lambda < 1,\ \lim_{k \to -\infty} |\alpha_k| \lambda^k = 0 \right\},$$

remplace dans la théorie des équations différentielles p-adique, l'algèbre des séries formelles méromorphes complexes (voir par exemple [Ga1, § 2.1]) sur laquelle tout module à connexion possède une décomposition de Jordan [Lev].

(5.2.2) On dira qu'un module à connexion défini sur une couronne $[x]_\mu \cap V_\lambda$ (resp. sur R) possède une décomposition de Jordan s'il existe une base dans laquelle sa matrice relativement à $t\partial_t$ est sous forme réduite de Jordan.

Comme on s'intéresse uniquement à la décomposition sur R, on suppose que X est affine comme en 1.2. Soit (E, ∇) un isocristal surconvergent fuchsien en x défini sur un voisinage strict V_λ. On cherche à décomposer (E, ∂_t) sur R. Comme X est ici une courbe, on peut éventuellement supposer, quitte à augmenter λ, que E est libre sur V_λ [Crw1, 4.9]. On ne précise pas a priori de relèvement du Frobenius. On s'attend à ce que $E \otimes R$ possède un sous-module à connexion de rang un de la forme $t\partial_t + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ (la surconvergence entraîne qu'un tel α est forcément dans $\mathbb{Z}_p$) et que tous les sous-modules de rang un soient de cette forme.

(5.2.3) Commençons par quelques remarque concernant la topologie de R, pour l'essentiel tirées de [Crw2]. Considérons un module à connexion E défini sur V_λ. Comme pour $\mu \geqslant \lambda$,

$$\Gamma(]x[\cap V_\mu, E) \simeq \Gamma(V_\mu, E) \otimes \Gamma]x[\cap V_\mu, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}) \simeq \Gamma(V_\lambda, E) \otimes \Gamma(]x[\cap V_\mu, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}),$$

on a $\varinjlim_{\mu} \Gamma(]x[\cap V_\mu, E) \simeq \Gamma(V_\lambda, E)\otimes R$. Comme $\Gamma(V_\lambda, E)\otimes R$ est de présentation finie sur R et que X est une courbe, il résulte de [Crw2, 6.1] que c'est un R-module libre. De même pour $\mu \geqslant \lambda$, $\Gamma(]x[\cap V_\lambda, E)$ et $\Gamma([x]_\mu \cap \cap V_\lambda, E)$ sont libres de même rang et on a un isomorphisme canonique $\Gamma(]x[\cap V_\lambda, E) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mu} \Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$.

On munit $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$ d'une norme de Banach provenant d'une présentation de $\Gamma(V_\lambda, E)$ (toutes les normes sont équivalentes) puis on munit $\Gamma(]x[\cap V_\lambda, E)$ de la topologie limite inverse si bien que $\Gamma(V_\lambda, R)\otimes \otimes R$ est de façon naturelle un espace $\mathcal{LF}$.

On note $\| - \|_{[\lambda,\mu]}$ une norme de Banach sur $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$ qu'on suppose construite à partir d'une présentation de E.

LEMME 5.2.4. *Pour tout s, il existe μ_s tel que pour tout $\mu \geqslant \mu_s$, $\widehat{\mathcal{D}}^{(s+1)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$ opère sur $\Gamma(V_\mu, E)$. Si λ est tel que $\varrho(E, \gamma) > \lambda_{s+1}$ pour $\gamma \in \in [\lambda, \mu_s]$, alors $\widehat{\mathcal{D}}^{(s+1)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$ opère sur $\Gamma(V_\lambda, E)$ Si λ est tel que $\varrho(E, \gamma)\gamma^{-1} > \lambda_s$ pour $\gamma \in [\lambda, \mu_s]$, alors $H_t^{(s)}$ ainsi que les $t^\alpha H_t^{(s)} t^{-\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{Z})$ opèrent sur $\Gamma(V_\lambda, E)$.*

PREUVE. On sait que pour tout $\eta < 1$, $\lim_k \|\partial_t^{[k]}(e)\| V_\mu \eta^k = 0$ pour tout μ proche de 1^- et $e \in \Gamma(V_\lambda, E)$. Par conséquent, pour $\eta > \lambda_{s+1}$, il existe μ_s tel que pour tout $\mu \geqslant \mu_s$, on ait

$$\|q_k^{(s+1)}!\partial_t^{[k]}(e)\|_{V_\mu} \leqslant (\lambda_{s+1}/\eta)^k (|q_k^{(s+1)}!|/\lambda_{s+1}^k)\|\partial_t^{[k]}(e)\|_{V_\mu}\eta^k \to 0\,,$$

car $|q_k^{(s+1)}!|/\lambda_{s+1}^k \leqslant |\pi|^{-\sigma(k)}$ (1.2.1). Quant à la deuxième partie du lemme, elle résulte de 2.1(iii, iv).

(5.3) Dorénavant E désigne un isocristal défini sur V_λ tel que $j^\dagger E$ soit surconvergent et fuchsien en x. Comme $\varrho(E, \gamma) = \gamma$, $t^\alpha H_t^{(s)} t^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, opère sur $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$ pour tout $s \geqslant 0$ et $\mu \in [\lambda, 1[$.

LEMME 5.3.1. *Si E est fuchsien en x, l'opérateur K-linéaire $\mapsto t^\alpha H_t^{(s)} t^{-\alpha}(e)$ défini sur $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$ est continu mais sa norme dépend a priori de s, mais pas de $\alpha \in \mathbb{N}$.*

PREUVE. Posons $q := p^{s+1}$, remarquons que $t^r H_t^{(s)} t^{-r}$ ne dépend que de r modulo q puisque t^q commute à $H_t^{(s)}$. Comme on a l'égalité $\sum_{r<q} t^r H_t^{(s)} t^{-r} = 1$ dans, $\widehat{\mathcal{D}}^{(s+1)}_{\mathcal{X}}$ on peut définir une norme de Banach sur

$\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$ en posant

$$\|e\|_\infty := \operatorname*{Sup}_{r<q} \|t^r H_t^{(s)} t^{-r}(e)\|_{[\lambda,\mu]}. \tag{5.3.2}$$

Les deux normes $\| - \|_\infty$ et $\| - \|_{[\lambda,\mu]}$ sont donc équivalentes, d'où la continuité de $e \mapsto t^\alpha H_t^{(s)} t^{-\alpha}$, la norme ne dépendant pas de $\alpha \in \mathbb{N}$.

Il est apparu a postériori que les opérateurs $t^\alpha H_t^{(s)} t^{-\alpha}$ se comportent de façon similaire aux matrices $R_{s+1,D,G}$ définis par Dwork [Dw, 3.1], l'isocristal E étant décrit par le système différentiel $\partial_t - G$ dans une base $(e_i)_i$ fixée, $D := \operatorname{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$, n étant le rang de E. Par définition, on a

$$R_{s+1,D,G}(t) := q^{-1} \sum_{\zeta^q=1} \zeta^{-D} \mathcal{Y}(t, \zeta t),$$

$$\mathcal{Y}(t, w) := \sum_{k \geqslant 0} G_k(t)(w-t)^k/k!.$$

Les matrices $G_k(t)$ ayant été définies en 1.5.4, la notation $G_k(t)$ plutôt que G_k indiquant que les matrices sont calculées par récurrence à l'aide de la dérivation ∂_w puis évaluées en t (dans l'article de Dwork, K est algébriquement clos de sorte que variables et points sont constamment confondus). Ici, t et w sont deux paramètres uniformisants en x, on adoptera donc plutôt comme définition

$$\mathcal{Y}(t, w) := \sum_{k \geqslant 0} T_{t,w}(G_k)(w-t)^k/k!, \tag{5.3.3}$$

l'opérateur de translation $T_{t,w}$ étant défini en 1.3.3 et la famille $(G_k)_k$ étant construite à l'aide de la dérivation ∂_w, lorsqu'on réduit modulo $(t-\alpha)$, $\alpha \in K$, $|\alpha| < 1$, on retrouve la formule de Dwork $\mathcal{Y}(\alpha, w)$. On remarquera que $\mathcal{Y}(t, w)$ se déduit des matrices de solutions génériques:

$$\left(\sum_k (-\tau)^k \otimes \partial_w^{[k]}(e_i)\right)_i = \sum_k G_k \tau^k/k!, \qquad (\tau := 1 \otimes w - \omega \otimes 1) \tag{5.3.4}$$

par la transformation $a \otimes b \otimes e \mapsto T_{t,w}(a)\, be$. On a donc

$$(5.3.5)\quad \begin{cases} \mathcal{Y}(t, w) = \left(\sum_k (t-w)^k \partial_w^{[k]}(e_i)\right)_i = (T_{t,w}(e_i))_i\,, \\ R_{s+1,-D,G}(t) = \left(q^{-1} \sum_{\zeta^q=1} \zeta^{a_i} T_{t,\zeta t}(e_i)\right)_i = \\ \qquad\qquad = \left(q^{-1} \sum_{\zeta^q=1} \zeta^{-a_i} T_{\zeta t,t}(e_i)\right)_i = (t^{a_i} H_t^{(s)} t^{-a_i}(e_i))_i\,. \end{cases}$$

car $T_{t,\xi t} = T_{\zeta^{-1}t,t}$ et $T_{\zeta t,t}\, t^{-a_i} = t^{-a_i} \zeta^{-a_i} T_{\zeta t,t}$. Pour $a \in \mathbb{Z}_p$, a_s désigne l'entier tel que $a \equiv a_s$ modulo p^{s+1} et tel que $a_s \in [0, p^{s+1}[$. On pose alors

$$(5.3.6)\qquad H_a^{(s)} := t^{a_s} H_t^{(s)} t^{-a_s}\,,$$

et si $\underline{e}$ (resp. $\underline{a}$) désigne la base $(e_i)_i$ (resp. $(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)})$, $n := \operatorname{rang}(E)$), alors on définit

$$H_{\underline{a}}^{(s)}(\underline{e}) := (H_{a^{(i)}}^{(s)}(e_i))_i = R_{s+1,-D,G}(t)\,, \qquad D := \operatorname{Diag}(a^{(i)})\,.$$

Ecrivons maintenant la condition de cocycle (inverse) pour E: on a successivement pour tout $e \in E$, grâce à 5.3.4,

$$\sum_k (t \otimes 1 \otimes -1 \otimes 1 \otimes t)^k \otimes \partial_t^{[k]}(e) =$$

$$= \sum_{k,l} ((t \otimes 1 - 1 \otimes t)^k \otimes 1)(1 \otimes (t \otimes 1 - 1 \otimes t)^l) \otimes \partial_t^{[l]} \partial_t^{[k]}(e)\,,$$

$$\sum_k G_k(e)/k!(1 \otimes 1 \otimes t - t \otimes 1 \otimes 1)^k =$$

$$= \sum_l (Id \otimes G_l/l! \otimes Id) \left(\sum_k G_k(e)/k!(1 \otimes t - t \otimes 1)^k \otimes 1\right) (1 \otimes (1 \otimes t - t \otimes 1)^l)\,.$$

On choisit ensuite trois paramètres uniformisants en x, t_1, t_2, $t_3 := t$ et on applique la transformation $a \otimes b \otimes c \otimes e \mapsto T_{t_1,t_3}(a)\, T_{t_2,t_3}(b)\, ce$, e parcourant la base $\underline{e}$. On obtient

$$\sum_k T_{t_1,t_3}(G_k/k!)(t_3 - t_1)^k = \sum_l T_{t_2,t_3}(G_l/l!) \sum_k T_{t_1,t_3}(G_k/k!)(t_2 - t_1)^k (t_3 - t_2)^l\,,$$

formule dans laquelle les matrices G_k sont calculées à l'aide de la dérivation ∂_{t_3} et où $T_{t_1,t_3}(G_k/k!)$ désigne la matrice obtenue en appliquant T_{t_1,t_3} aux composantes de la matrice $G_k/k!$. On obtient en définitive avec la dé-

finition 5.3.3

$$\mathcal{Y}(t_1, t_3) = \mathcal{Y}(t_2, t_3) \sum_k T_{t_1, t_3}(G_k/k!)(t_2 - t_1)^k . \tag{5.3.7}$$

Cette formule s'apparente à celle de [Dw, 2.2] à ceci près que dans le second membre on n'obtient pas tout à fait $\mathcal{Y}(t_1, t_2)$ puisque G_k se calcule à l'aide de ∂_{t_3} et non de ∂_{t_2}. Ces formules ont un sens sur toute couronne pour lesquelles $\|t_1 - t_3\|$ et $\|t_2 - t_3\|$ sont assez petits afin que T_{t_1, t_3} et T_{t_2, t_3} agissent sur la base de $\underline{e}$ de E sur la couronne. Remarquons enfin que 5.3.7 montre que $\mathcal{Y}(t_2, t_3) = T_{t_2, t_3}(\underline{e})$ est inversible.

Traduisons maintenant à l'aide des opérateurs $H_\alpha^{(s)}$ la formule $\zeta^D R_{s+1, D}(t) = R_{s+1, D}(\zeta t))Y(t, \zeta t)$ [Dw, 3.1.3]. On a, compte tenu de l'égalité $T_{t_1, t_2} = T_{\zeta t_1, \zeta t_2}$ valable pour toute racine de l'unité ζ,

$$T_{\zeta t, t} H_\alpha^{(s)} = T_{\zeta t, t} q^{-1} \sum_{\mu^q = 1} \mu^{-\alpha_s} T_{\mu t, t} = q^{-1} \sum_{\mu^q = 1} \mu^{-\alpha_s} T_{\mu \zeta t, t} = \zeta^{\alpha_s} H_\alpha^{(s)} .$$

D'où, en faisant opérer sur la base $\underline{e}$, l'égalité $\zeta^{\alpha_s} H_{\underline{\alpha}}^{(s)}(\underline{e}) = = T_{\zeta t, t}(\underline{e})\, T_{\zeta t, t}(H_{\underline{\alpha}}^{(s)}(\underline{e}))$.

(5.3.8) Comme pour $u \geqslant s$, $H_t^{(u)} t^k H_t^{(s)}$ est nul si k est non nul modulo p^{s+1} et est égal à $H_t^{(u)} t^k$ lorsque p^{s+1} divise k (cela vient de la semi-linéarité par rapport à F), on a en utilisant 1.3.6,

$$H_\alpha^{(s)} = \sum_{r < p^{s+2}} t^r H_t^{(s+1)} t^{-r+\alpha_s} H_t^{(s)} t^{-\alpha_s} = \sum_{r < p} t^{rp^{s+1} + \alpha_s} H_t^{(s+1)} t^{-(rp^{s+1} + \alpha_s)} .$$

On peut alors reprendre l'argument de Dwork [Dw, 3.2]: on construit de proche en proche $\underline{\alpha} \in \mathbb{Z}_p^n$ à partir de la suite $(\underline{\alpha}_s)_s$ avec la propriété $\|\det(H_{\underline{\alpha}}^{(s)}(\underline{e}))\|_{\mathrm{sp}} \geqslant 1$. On démarre pour cela avec l'égalité $I_n = = \sum_{r < p} t^{\underline{r}} H_t^{(0)} t^{-\underline{r}}(\underline{e})$ qui montre qu'il existe un vecteur $\underline{r} < p$ (ie $r_i < p$, $\forall i$) tel que $\|\det(t^{\underline{r}} H_t^{(0)} t^{-\underline{r}}(\underline{e}))\|_{\mathrm{sp}} \geqslant 1$; on conclut par récurrence sur s grâce à la formule ci-dessus et à la multilinéarité du déterminant: si $\underline{r} < p$ est tel que

$$\|\det(t^{\underline{r}p^{s+1} + \alpha_s} H_t^{(s+1)} t^{-(\underline{r}p^{s+1} + \alpha_s)}(\underline{e}))\|_{\mathrm{sp}} \geqslant \|\det(H_{\underline{\alpha}}^{(s)}(\underline{e}))\|_{\mathrm{sp}} \geqslant 1 ,$$

alors on pose $\underline{\alpha}_{s+1} := \underline{r}p^{s+1} + \underline{\alpha}_s$.

(5.4) On a vu en 5.2.4 que $H_\alpha^{(s)}$ (définition 5.3.6) opère sur $\Gamma([x]_\mu \cap \cap V_\lambda, E)$. On peut se demander si pour $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ et $e \in \Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$ fixés, la suite $(H_\alpha^{(s)}(e))_{s \geqslant 0}$ possède une limite. Supposons que $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$ possède un sous-module de rang un, c'est à dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ et un vec-

teur $e \in \Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$ tels que $t\partial_t(e) = \alpha e$. En se plaçant dans la base $\{e\}$, le système différentiel s'écrit $t\partial_t + \alpha$ (on a donc $G := -\alpha/t$ en 5.3). On calcule alors pour $\beta \in \mathbb{N}$:

$$(5.4.1) \quad t^\beta H_t^{(s)} t^{-\beta}(e) = q^{-1} \sum_{\zeta^q = 1,\, k \geq 0} (\zeta - 1)^k \prod_{i=0}^{k-1} (t\partial_t - i - \beta)/k!(e) =$$

$$= q^{-1} \sum_{\zeta^q = 1,\, k \geq 0} (\zeta - 1)^k \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - \beta - i)/k!\, e =$$

$$= q^{-1} \sum_{\zeta^q = 1} \sum_{k \geq 0} (\zeta - 1)^k \binom{\alpha - \beta}{k} e =$$

$$= q^{-1} \sum_{\zeta^q = 1} (1 + \zeta - 1)^{\alpha - \beta} e = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha - \beta \not\equiv 0 \mod q \\ e & \text{si } \alpha - \beta \equiv 0 \mod q \end{cases} \quad \text{[B-Ch, 2.6]}.$$

En prenant pour β l'entier α_s, on trouve $t^{\alpha_s} H_t^{(s)} t^{-\alpha_s}(e) = e$. En particulier $\lim_s H_\alpha^{(s)}(e) = e$. Plus généralement, on a le résultat suivant:

PROPOSITION 5.4.2. *Soit E un isocristal surconvergent et fuchsien en x et qui possède une décomposition de Jordan en x (voir* 5.1). *Alors pour λ assez proche de 1^-, pour tout $\mu \geq \lambda$, $e \in \Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$ et $\beta \in \mathbb{Z}_p$, la limite $\lim_s H_\beta^{(s)}(e)$ existe dans $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$. De plus, la famille d'opérateurs K-linéaires sur $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$, $(e \mapsto H_\alpha^{(s)}(e))_{s,\alpha}$ est uniformément équicontinue. Les valeurs de $\beta \in \mathbb{Z}_p$ modulo $\mathbb{Z}$, pour lesquelles il existe e tel que $\lim_s H_\beta^{(s)}(e)$ soit non nul, sont précisément les valeurs propres (relativement à $t\partial_t$) de la décomposition de Jordan.*

PREUVE. Puisque E possède une décomposition de Jordan sur R, il en est de même sur une couronne $]x[\cap V_\lambda$ pour λ proche de 1^-. Choisissons alors une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$ dans laquelle la matrice de $(E, t\partial_t)$ soit sous forme de Jordan. Il suffit de considérer le cas où cette matrice s'écrit $\alpha I_n + J$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, et J la matrice nilpotente dont le coefficient d'indice (i, j) est nul si $i \neq j + 1$ et égal à 1 sinon. Notons $P_k(X)$ le polynôme $X(X-1)\ldots(X-k+1)/k!$ $(P_0(X) = 1)$. On va montrer par récurrence sur $k \geq 1$ et récurrence descendante sur j que

$$(5.4.3) \qquad \prod_{i=0}^{k-1} (t\partial_t - i)/k!(e_j) = \sum_{l=0}^{n-j} P_k^{(l)}(\alpha)/l! e_{j+l}.$$

La formule est vraie pour $j=n$ car $t\partial_t(e_n)=\alpha e_n$ et on a $\prod_{i=0}^{k-1}(t\partial_t-i)/$ $/k!(e_n)=\binom{\alpha}{k}e_n$ et vraie également pour $k=1$. Supposons la formule vérifiée pour les couples $(j+1, k\geqslant 0)$ et $(j,\{1,\ldots,k-1\})$. On écrit

$$\prod_{i=0}^{k-1}(t\partial_t-i)/k!(e_j)=\prod_{i=1}^{k-1}(t\partial_t-i)/k!(\alpha e_j+e_{j+1})=$$

$$=t\prod_{i=0}^{k-2}(t\partial_t-i)/k!(t^{-1}(\alpha e_j+e_{j+1}))\,.$$

Mais dans la base $\{t^{-1}e_1,\ldots,t^{-1}e_n\}$, la matrice de $(E, t\partial_t)$ reste sous forme de Jordan avec $\alpha-1$ au lieu de α sur la diagonale. On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence aux rangs $(j, k-1)$ et $(j+1, k-1)$, ce qui nous donne

$$\prod_{i=0}^{k-1}(t\partial_t-i)/k!(e_j)=$$

$$=k^{-1}t\left[\alpha\sum_{l=0}^{n-j}P_{k-1}^{(l)}(\alpha-1)/l!\,t^{-1}e_{j+l}+\sum_{l=0}^{n-j-1}P_{k-1}^{(l)}(\alpha-1)/l!\,t^{-1}e_{j+1+l}\right]=$$

$$=k^{-1}\sum_{l=0}^{n-j}[lP_{k-1}^{(l-1)}(\alpha-1)/l!+\alpha P_{k-1}^{(l)}(\alpha-1)/l!]\,e_{j+l}\,.$$

Pour conclure au rang (j, k), il suffit maintenant de prouver l'égalité suivante

$$lP_{k-1}^{(-1)}(X-1)/l!+XP_{k-1}^{(l)}(X-1)/l!=kP_k^{(l)}(X)\,.$$

Il suffit pour cela de remarquer que $XP_{k-1}(X-1)=X(X-1)\ldots(X-$ $-k+1)/(k-1)!=kP_k(X)$ puis de dériver l fois en utilisant la formule de Leibnitz. La formule 5.4.3 permet alors d'écrire

$$H_\beta^{(s)}(e_j)=e_jq^{-1}\sum_{\zeta^q=1}\sum_{k\geqslant 1}(\zeta-1)^k\sum_{l=0}^{n-j}P_k^{(l)}(\alpha-\beta_s)/l!\,e_{j+l}\,.$$

Les deux séries formelles en X et Y, $\sum_{k\geqslant 0}P_k(X)\,Y^k$ et $\sum_{j\geqslant 0}X^j/j!\log(1+Y)^j$ sont égales [Ch-Dw2, 2.8]. La seconde converge dans le polydisque $\{|x|<|\pi|\,;\ |y|<1\}$; quant à la première, elle converge dans le polydisque $\{|x|<|p^s|\,;\ |y|<\lambda_s^+)$ avec $\lambda_s^+>\lambda_s$. En dérivant l fois $(l>0)$ les

deux séries formelles par rapport à X, on trouve

$$\sum_{k\geq 1} P_k^{(l)}(X)\, Y^k = (\log(1+Y))^l \sum_{j\geq 0} X^j/j!\, \log(1+Y)^j =$$

$$= (\log(1+Y))^l \sum_{k\geq 0} P_k(X)\, Y^k .$$

Lorsque $x \in \mathbf{Z}_p$, les deux séries en Y: $\sum_{k\geq 0} P_k^{(l)}(x)\, Y^k$ et $(\log(1+Y))^l \sum_{k\geq 0} P_k(x)\, Y^k$ convergent pour $|y| < 1$. On peut donc les évaluer en $y = \zeta - 1$ si bien qu'on a pour $l > 0$

$$\sum_{k\geq 1} (\zeta-1)^k P_k^{(l)}(\alpha-\beta_s) = \log(1+(\zeta-1))^l \sum_{k\geq 0} P_k(\alpha-\beta_s)(\zeta-1)^k = 0 .$$

Il reste finalement

$$H_\beta^{(s)}(e_j) = e_j + q^{-1} \sum_{\zeta^q=1} \sum_{k\geq 1} (\zeta-1)^k P_k(\alpha-\beta_s)\, e_j =$$

$$= q^{-1} \sum_{\zeta^q=1} (1+\zeta-1)^{\alpha-\beta_s} e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha-\beta_s \not\equiv 0 \mod q \\ e_j & \text{si } \alpha-\beta_s \equiv 0 \mod q \end{cases} \quad \text{[B-Ch, 2.6]}.$$

Cela montre que $\lim_s H_\beta^{(s)}(e_j)$ existe pour tout $\beta \in \mathbb{Z}_p$ et $\|H_\beta^{(s)}(e_j)\| \leq \|e_j\|$ pour tout α, s. Il reste à étudier $\lim_s H_\beta^{(s)}(e)$ lorsque e s'écrit $\sum_i f_i e_i$ avec $f_i := \sum_{r\in\mathbb{Z}} \lambda_{r,i} t^r$ dans $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$. D'après le lemme 5.4.5 (voir plus loin), on a

$$\sum_i \lim_s H_\beta^{(s)}(f_i e_i) = \sum_i \sum_{r\in\mathbb{Z}} \lambda_{r,i} t^r \lim_s H_{\beta-r}^{(s)}(e_i) .$$

Mais $\lim_s H_{\beta-r}^{(s)}(e_i)$ est nul sauf pour $\beta - r = \alpha$. Donc, $\lim_s H_\beta^{(s)}(e)$ est nul sauf si $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}$ et dans ce cas, on trouve que la limite est égale à

$$\lim_s H_\beta^{(s)}(e) = \sum \lambda_{\beta-\alpha,i} e_i . \qquad (\beta - \alpha \in \mathbb{Z}).$$

Enfin, comme les normes de Banach sont équivalentes sur $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$, on peut supposer que $\| - \|$ est la norme du Sup dans la base de Jordan. On a alors

$$\|\lim_s H_\beta^{(s)}(e)\| = \operatorname{Sup} |\lambda_{\beta-\alpha,i}| \leq \operatorname{Sup} \|f_i\| = \|e\| .$$

REMARQUE 5.4.4. 1) La convergence n'est pas uniforme par rapport à α car si par exemple, $\beta := \alpha + p^{u+1}$, alors $H_\beta^{(s)}(e_j)$ est nul si $s > u$ et égal à e_j si $s \leqslant u$.

2) Si on travaille avec la norme du Sup dans une base de $\Gamma(U_K \cap \cap V_\lambda, E)$, 5.4.2 affirme qu'il existe une constante κ telle que $\|\lim_s H_\beta^{(s)}(e)\| \leqslant \leqslant \kappa\|e\|$ pour tout $\beta \in \mathbb{Z}_p$ et tout $e \in \Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$; mais la constante κ dépend a priori de λ et μ.

LEMME 5.4.5. *Soit* $e \in \Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$; *supposons que* $\lim_s H_\beta^{(s)}(e)$ *existe pour tout* $\beta \in \mathbb{Z}_p$, *et qu'il existe* κ *tel que* $\|H_\beta^{(s)}(e)\| \leqslant \kappa\|e\|$ *pour tout* s *et* β, *alors pour* $f = \sum_{r \in \mathbf{Z}} \lambda_r t^r \in \Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$, $\lim_s H_\beta^{(s)}(fe)$ *existe également et cette limite est donnée par*

$$\lim_s H_\beta^{(s)}(fe) = \sum_{r \in \mathbf{Z}} \lambda_r t^r (\lim_s t^{\beta_s - r} H_t^{(s)} t^{-\beta_s + r}(e)) . \tag{5.4.6}$$

De plus, $H_\beta^{(s)}(fe)\| \leqslant \kappa\|fe\|$.

PREUVE. Comme $\|H_\beta^{(s)}(e)\| \leqslant \kappa\|e\|$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$ et que par ailleurs, $\lambda_r t^r$ tend vers zéro dans $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$ lorsque $|r|$ tend vers $+\infty$, on voit que le second membre définit bien un élément de $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$; on le note e'. D'après 1.3.6, on a:

$$H_\beta^{(s)}(fe) = H_\beta^{(s)}\left(\sum_{|r| \leqslant (q-1)/2} (t^r H_t^{(s)} t^{-r})(f)\, e\right) =$$

$$= \sum_{|r| \leqslant (q-1)/2} t^{\beta_s - r}(t^r H_t^{(s)} t^{-r}(f)) H_t^{(s)} t^{-\beta_s + r}(e) .$$

On en déduit que $\|H_\beta^{(s)}(fe)\| \leqslant \kappa\|e\| \operatorname{Sup}_{|r| \leqslant (q-1)/2} \|t^r H_t^{(s)} t^{-r}(f)\| = \kappa\|f\|\|e\|$. Mais comme E est libre sur $[x]_\mu \cap v_\lambda$, on peut choisir $\| - \|$ de telle sorte qu'on ait $\|f\|\|e\| = \|fe\|$. Il vient ensuite,

$$H_\beta^{(s)}(fe) - e' = \sum_{r \in \mathbf{Z}} \lambda_r t^r (H_{\beta - r}^{(s)}(e) - \lim_s H_{\beta - r}^{(s)}(e)) +$$

$$+ \sum_{|r| \leqslant (q-1)/2} (t^r H_t^{(s)} t^{-r}(f) - \lambda_r t^r) H_{\beta - r}^{(s)}(e) - \sum_{|r| > (q-1)/2} \lambda_r t^r (H_{\beta - r}^{(s)}(e)) ,$$

avec

$$(t^r H_t^{(s)} t^{-r})(f) - \lambda_r t^r = \sum_{i \in \mathbb{Z}^*} \lambda_{r+iq} t^{r+iq}.$$

Comme $\| \sum_{r > (q-1)/2} \lambda_r t^r \|_{[\lambda, \mu]}$ est petit pour s assez grand et que $\mathrm{Min}(r+q, r-q) \geqslant (q+1)/2$, on voit que des trois sommes composant $H_\beta^{(s)}(fe) - e'$, les deux dernières sont petites dès que s est assez grand. Quant à la première somme, elle est également uniforme petite (par rapport à β et r) lorsque s tend vers $+\infty$, d'où le résultat.

(5.4.6) On peut dès lors espérer que pour un isocristal surconvergent fuchsien en x, les sous-modules de rang un de $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$ peuvent s'obtenir par un procédé limite analogue à celui de 5.4.2. Cependant la limite $\lim_s H_\beta^{(s)}(e)$ peut ne pas exister ce qui correspond, conformément au résultat de Christol et Mebkhout au cas où l'exposant possède des différences Liouville. Voici un exemple où une telle obstruction apparaît:

EXEMPLE 5.4.7. *Considérons l'isocristal surconvergent fuchsien donné par*

$$t\partial_t + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f & \beta \end{pmatrix}$$

avec $f := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n t^n \in R$ *et* $\beta \in \mathbb{Z}_p \backslash \mathbb{Z}$. *Alors* $\lim_s H_\alpha^{(s)}(e)$ *existe pour tout* $e \in R \otimes R$ *si et seulement si* $\sum \lambda_n / (\beta + n)\, t^n \in R$. *En particulier, si* β *est Liouville et* f convenablement choisi, cette condition n'est pas remplie.

PREUVE. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}_p$; remarquons tout d'abord que si $\sum \lambda_n / (\beta + n)\, t^n \in R$, alors dans la nouvelle base $(e_1 - \sum \lambda_n / (\beta + n)\, t^n e_2, e_2)$, la matrice de l'isocristal devient $\mathrm{Diag}(0, \beta)$, de sorte que la limite existe d'après 5.4.2. Pour voir la réciproque, on commence par calculer pour $i \geqslant 1$

$$t^i \partial_t^{[i]}(e_1) = (t/i)\, t^{i-1} \partial_t^{[i-1]}(f/t\, e_2) = \frac{1}{i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n t^n \binom{\beta + n - 1}{i - 1} e_2.$$

Il vient ensuite à l'aide de la formule de Leibnitz (pour développer

$t^i \partial_t^{[i]} t^{-\alpha_s}$), q désignant p^{s+1},

$H_\alpha^{(s)}(e_1) =$

$$= q^{-1} \sum_{\zeta^q=1} \sum_{k \geq 0} (\zeta - 1)^k \left[\binom{-\alpha_s}{k} e_1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\beta + n} \binom{\beta + n}{i} \binom{-\alpha_s}{k-i} \lambda_n t^n e_2 \right] =$$

$$= \left(q^{-1} \sum_{\zeta^q=1} \zeta^{-\alpha_s} \right) e_1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\lambda_n t^n}{\beta + n} q^{-1} \sum_{\zeta^q=1} \sum_{i \geq 1} \binom{\beta + n}{i} \sum_{i \geq i} (\zeta - 1)^k \binom{-\alpha_s}{k-i} e_2 =$$

$$= \left(q^{-1} \sum_{\zeta^q=1} \zeta^{-\alpha_s} \right) e_1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\lambda_n t^n}{\beta + n} q^{-1} \sum_{\zeta^q=1} \zeta^{-\alpha_s} (\zeta^{\beta+n} - 1)\, e_2 =$$

$$= \begin{cases} e_1 - \sum\limits_{n \neq -\beta_s \bmod q} \lambda_n t^n / (\beta + n)\, e_2 & \text{si } \alpha_s \equiv 0 \mod q\,, \\ \sum\limits_{n \equiv \alpha_s - \beta_s \bmod q} \lambda_n t^n / (\beta + n)\, e_2 & \text{si } \alpha_s \neq 0 \mod q\,. \end{cases}$$

D'où, en tenant compte de ce que $\beta \notin \mathbb{Z}$,

$$\lim_s H_\alpha^{(s)}(e_1) = \begin{cases} e_1 - \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n t^n / (\beta + n)\, e_2 & \text{si } \alpha = 0\,, \\ \lambda_n t^n / (\beta + n)\, e_2 & \text{si } \alpha - \beta = n \in \mathbb{Z}\,, \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Lorsque $\alpha = 0$, l'existence de la limite exige donc que la série $\sum\limits_n \lambda_n / /(\beta + n)\, t^n$ soit dans R. Si $g := \sum\limits_n \mu_n t^n \in R$, on calcule $\lim\limits_s H_\alpha^{(s)}(g e_1)$ à l'aide de 5.4.5, on trouve

$\lim\limits_s H_\alpha^{(s)}(g e_1) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \mu_n t^n (\lim\limits_s H_{\alpha - n}^{(s)}(e_1)) =$

$$= \begin{cases} \mu_\alpha t^\alpha \left(e_1 - \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n t^n / (\beta + n)\, e_2 \right) & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}\,, \\ \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \mu_n t^n \lambda_{\alpha - \beta - n} t^{\alpha - \beta - n} / (\alpha - n)\, e_2 & \text{si } \alpha - \beta \in \mathbb{Z}\,, \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Dans le cas où $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$, la limite est en fait égale au terme en $t^{\alpha - \beta}$ dans le produit de g par $\sum\limits_n \lambda_n / (\beta + n)\, t^n$. Les deux valeurs de $\alpha \in \mathbb{Z}_p / \mathbb{Z}$ pour lesquelles l'obstruction à l'existence de la limite apparaît sont 0 et β qui sont précisément les exposants présumés du système.

(5.5) On va s'attacher maintenant à prouver la réciproque de 5.4.2. Soit E un isocristal surconvergent fuchsien en x. On fait désormais l'hypothèse (voir la définition de $H_\alpha^{(s)}$ en 5.3.6):

(5.5.1) $\exists \lambda < 1,\ \forall \mu \in [\lambda, 1[,\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_p,\ \forall e \in \Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, E),\ \lim_s H_\alpha^{(s)}(e)$ existe dans $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, E)$ et la famille $(e \mapsto H_\alpha^{(s)}(e))_{s,\alpha}$ est uniformément équicontinue.

Il suffit d'après 5.4.5 de vérifier l'existence de la limite pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ pour un système générateur de $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, E)$. Il suffit en fait de trouver une base $\underline{e}$ et $\underline{\alpha} \in \mathbb{Z}_p^n$ pour lesquels $\lim_s H_{\underline{\alpha}}^{(s)}(\underline{e})$ existe avec $\lim_s \det(H_{\underline{\alpha}}^{(s)}(\underline{e})) \neq 0$: comme $T_{\zeta t, t}(\underline{e})$ est inversible (5.3.7), la formule $\zeta^{\alpha_s} H_{\underline{\alpha}}^{(s)}(\underline{e}) = T_{\zeta t, t}(\underline{e})\, T_{\zeta t, t}(H_{\underline{\alpha}}^{(s)}(\underline{e}))$ montre que si z est un zéro de $\det(\lim_s H_{\underline{\alpha}}^{(s)}(\underline{e}))$ sur la couronne $C_{[\lambda, \mu]}$, alors ζz l'est aussi pour toute racine p^{s+1}-ième de l'unité. Lorsque $s \to +\infty$, on voit donc que le déterminant aurait une infinité de zéros sur la couronne fermée $C_{[\lambda, \mu]}$, et serait donc nul contrairement à l'hypothèse. Par conséquent $\lim_s H_{\underline{\alpha}}^{(s)}(\underline{e})$ définit une base de E sur la couronne qu'on substitue à $\underline{e}$. Comme $H_\beta^{(s)} = q^{-1} \sum_{\zeta^q = 1} \zeta^{-\beta_s} T_{\zeta t, t}$ et $T_{\zeta t, t} H_\alpha^{(u)} = \zeta^{\alpha_s} H_\alpha^{(u)}$ lorsque $\zeta^q = 1, q := p^{s+1}, u \geqslant s$, on en déduit que $T_{\zeta t, t}(e_i) = \zeta^{\alpha_s} = \zeta^{\sigma_s} e_i$ puis

$$H_\beta^{(s)}(e_i) = q^{-1} \sum_{\zeta^q = 1} \zeta^{-\beta_s + \alpha_s} e_i,$$

si bien que $H_\beta^{(s)}(e_i)$ est nul pour s assez grand si $\beta \neq \alpha$. Par 5.4.5 on conclut alors que $\lim_s H_\beta^{(s)}(e)$ existe pour tout $e \in E$. Par conséquent, il suffit de montrer l'existence de la limite pour le vecteur $\underline{\alpha}$ associé à la base $\underline{e}$ construit en 5.3.8.

Je ne sais pas dans quelle mesure l'hypothèse d'uniforme équicontinuité serait équivalente à l'existence de la limite. On remarquera que 5.5.1 ne dépend pas d'un cadre matriciel et est de nature différentielle. On suppose dans 5.5.1 que le λ est tel que $\varrho(E, \mu) = \mu$ pour tout $\mu \in [\lambda, 1]$. On notera $\mathcal{L}_\alpha(E) \subset E$ le K-espace des limites donné par $\{\lim_s H_\alpha^{(s)}(e) / e \in \Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, E)\}$. Si cela s'avère nécessaire, on peut préciser l'intervalle $I := [\lambda, \mu]$ sur lequel on travaille en notant $\mathcal{L}_{\alpha, I}(E)$; de même $\| - \|_I$ désigne une norme de Banach sur $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, E)$.

LEMME 5.5.2. *L'action de ∂_t sur E induit une action de $t\partial_t$ sur $\mathcal{L}_\alpha(E)$. L'opérateur K-linéaire $e \mapsto \lim_s H_\beta^{(s)}(e)$ agit par l'identité sur $\mathcal{L}_\alpha(E)$ lorsque $\beta = \alpha$ et par 0 sinon. Si t' est une autre coordonnée locale en x, alors il existe pour λ assez proche de 1^-, un isomorphisme $(\mathcal{L}_\alpha^t(E), t\partial_t) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{L}_\alpha^{t'}(E), t'\partial_{t'})$, entre les deux sous K-espace des limites, $\mathcal{L}_\alpha^t$ et $\mathcal{L}_\alpha^{t'}$ obtenus respectivement à l'aide de $H_t^{(s)}$ et $H_{t'}^{(s)}$.*

PREUVE. Pour voir que l'action de ∂_t sur E induit une action de $t\partial_t$ sur $\mathcal{L}_\alpha(E)$, on part de l'égalité suivante dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(s+1)}$ qui provient de la commutation de $H_t^{(s)}$ avec $t\partial_t$:

$$t\partial_t H_\alpha^{(s)} = t^{\alpha_s}(t\partial_t + \alpha_s)\, H_t^{(s)} t^{-\alpha_s} = t^{\alpha_s} H_t^{(s)}(t\partial_t + \alpha_s)\, t^{-\alpha_s} = H_\alpha^{(s)} t\partial_t\,.$$

Comme ∂_t agit de façon continue sur $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, E)$, on obtient $t\partial_t(\lim_s H_\alpha^{(s)}(e)) = \lim_s H_\alpha^{(s)}(t\partial_t(e)) \in \mathcal{L}_\alpha(E)$.

L'opérateur $H_\alpha^{(s)}$ agit également de manière continue sur $\Gamma(V_\lambda \cap \cap [x]_\mu, E)$, (5.3.1) si bien qu'on peut écrire

$$\text{(5.5.3)} \quad \lim_s H_\beta^{(s)}(\lim_{u \geqslant s} H_\alpha^{(u)}(e)) = \lim_s \lim_{u \geqslant s} t^{\beta_s} H_t^{(s)} t^{\beta_u - \alpha_s} H_t^{(u)} t^{-\beta_u}(e)\,.$$

Si $\beta = \alpha$, alors pour $u \geqslant s$, $\beta_u - \alpha_s$ est multiple de p^{s+1} de sorte que $t^{\beta_u - \alpha_s}$ commute à $H_t^{(s)}$. On vérifie en outre que pour $u \geqslant s$, $H_t^{(s)} H_t^{(u)} = = H_t^{(u)} H_t^{(s)} = H_t^{(u)}$. Si en revanche $\beta \neq \alpha$, alors $\beta_u - \alpha_s \equiv \beta_s - \alpha_s \bmod p^{s+1}$ qui est non nul pour s assez grand et on sait alors que $H_t^{(s)} t^{\beta_u - \alpha_s} H_t^{(u)}$ est nul. On en déduit donc que 5.5.3 est nul lorsque $\beta \neq \alpha$ et que lorsque $\beta = \alpha$, on a

$$\lim_s H_\alpha^{(s)}(\lim_{u \geqslant s} H_\alpha^{(u)}(e)) = \lim_s \lim_{u \geqslant s} t^{\alpha_u} H_t^{(u)} t^{-\alpha_u}(e) = \lim_u H_\alpha^{(u)}(e)\,.$$

Si $t' - t \in m\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ alors on a l'égalité $T_{t',t} H_\alpha^{(s)} = t'^{\alpha_s} H_{t'}^{(s)} t'^{-\alpha_s} T_{t',t}$ dans $\mathcal{D}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}^\dagger$. En effet $T_{t',t} T_{\zeta t,t} = T_{t',t} T_{t,\zeta^{-1}t} = T_{t',\zeta^{-1}t} = T_{\zeta t',t'} T_{t',t}$. De plus, E étant fuchsien et $T_{t',t}$ étant un opérateur en $t^k \partial_t^{[k]}$ dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}^{(s+1)}$ (pour s assez grand), $T_{t',t}$ opère de manière continue sur $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, E)$, (2.1(iv)). L'opérateur inversible $T_{t',t}$ induit donc un isomorphisme $\mathcal{L}_\alpha^t(E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_\alpha^{t'}(E)$. La relation $T_{t',t} t\partial_t = t'\partial_{t'} T_{t',t}$ montre enfin que cet isomorphisme commute à l'action de $t\partial_t$.

Il reste à examiner le cas où $t' = ut$ avec $u \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\times$ et $\partial_{t'}(t) \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\times$. Cela exige que $\|u\|_{\mathrm{sp}} = 1$. Si $u \in \mathcal{V}$, on a $t\partial_t = t'\partial_{t'}$ et $H_t^{(s)} = H_t^{(s)}$ et on a fini. Comme x est k-rationnel, on peut dès lors supposer que $u(0) = 1$ et donc

que $\|u-1\|_I < 1$ (où $I := [\lambda, \mu]$). On ne peut pas parler de $T_{t',t}$ dans $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$. mais en revanche $\lim_n \sum_{k \leq n} (u-1)^k t^k \partial_t^{[k]}(e)$ existe dans $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, E)$ car E est fuchsien. En effet, on a pour tout $\gamma \in [\lambda, \mu]$, et ϱ proche de γ^-,

$$\|(u-1)^k t^k \partial_t^{[k]}(e)\|_\gamma = (\|(u-1)\|_\gamma \gamma/\varrho)^k \|\partial_t^{[k]}(e)\|_\gamma \varrho^k \to 0 .$$

On définit ainsi un opérateur K-linéaire sur $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, E)$ et il suffit ensuite de vérifier qu'il est continu, inversible (cela résulte de ce que u est inversible) et qu'il commute à $t\partial_t$.

LEMME 5.5.4. (i) *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la multiplication par t^n induit un isomorphisme de K-espaces vectoriels entre $\mathcal{L}_\alpha(E)$ et $\mathcal{L}_{\alpha+n}(E)$. Les sous-modules à connexion fuchsiens de E, $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}) \otimes_K \mathcal{L}_\alpha(E)$ et $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}) \otimes_K \mathcal{L}_{\alpha+n}(E)$ sont donc égaux.*

(ii) *$\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}) \otimes_K \mathcal{L}_\alpha(E)$ et $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}) \otimes_K \mathcal{L}_\beta(E)$ sont isomorphes en tant que sous-$\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})$-modules de E si et seulement si $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$ ou bien si $\mathcal{L}_\alpha(E)$ et $\mathcal{L}_\beta(E)$ sont simultanément nuls.*

PREUVE. Si $e \in \mathcal{L}_\alpha(E)$, alors $\lim_s H^{(s)}_{\alpha+n}(t^n e) = t^n \lim_s H^{(s)}_\alpha(e) = t^n e$ d'après 5.5.2, on a donc $t^n e \in \mathcal{L}_{\alpha+n}(E)$, d'où (i).

Supposons $\mathcal{L}_\alpha(E)$ et $\mathcal{L}_\beta(E)$ non nuls et soit $(e_i)_i$, $(f_j)_j$ des bases (éventuellement infinies) des K-espaces vectoriels $\mathcal{L}_\alpha(E)$ et $\mathcal{L}_\beta(E)$. Si les sous-$\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})$-modules de E engendrés par $\mathcal{L}_\alpha(E)$ et $\mathcal{L}_\beta(E)$ sont isomorphes, alors il existe une famille finie $(g_i)_i$ d'éléments de $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})$ telle que $e_1 = \sum_i g_i f_i$. Quitte à multiplier cette relation par une puissance de t, et à changer α en $\alpha + n$, on peut supposer qu'il existe i tel que $g_{i,0}$ soit non nul dans K. Il suffit de montrer qu'on a alors $\alpha = \beta$. D'après 5.4.5, on a, en notant $g_i = \sum_r g_{i,r} t^r$,

$$\lim_s H^{(s)}_\beta(e_1) = \sum_i \sum_{r \in \mathbb{Z}} g_{i,r} t^r \lim_s H^{(s)}_{\beta-r}(f_i) .$$

Comme $f_i \in \mathcal{L}_\beta(E)$, $\lim_s H^{(s)}_{\beta-r}(f_i)$ est nul d'après 5.5.2, sauf si r est nul, ce qui donne la relation $\lim_s H^{(s)}_\beta(e_1) = \sum_i g_{i,0} f_i$ qui est non nul. A nouveau par 5.5.2, cela exige que $\alpha = \beta$.

LEMME 5.5.5. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, $\dim_K \mathcal{L}_\alpha(E) \leq \mathrm{rg}(E)$. Si $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(k)}$ sont des éléments distincts de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$, alors les $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}) \otimes_K$*

$\otimes_K \mathcal{L}_{\alpha^{(i)}}(E)$ sont en somme directe dans E. En particulier, il n'existe qu'un nombre fini de valeurs de $\alpha \in \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ pour lesquelles $\mathcal{L}_\alpha(E)$ soit non nul.

PREUVE. Soit $(e_{i,j})_j$ une base du K-espace vectoriel $\mathcal{L}_{\alpha^{(i)}}(E)$. Supposons qu'il existe une famille finie $(f_{i,j})_{i,j}$ de $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$ telle que $\sum_j f_{i,j} e_{i,j} = \sum_{k \neq j} \sum_j f_{k,j} r_{k,j}$. En écrivant $f_{i,j} = \sum_{r \in \mathbb{Z}} f_{i,j,r} t^r$ et en appliquant $\lim_s H^{(s)}_{\alpha^{(i)}}$ à cette égalité, on obtient grâce à 5.4.5:

$$\sum_j \sum_{r \in \mathbb{Z}} f_{i,j,r} t^r \lim_s H^{(s)}_{\alpha^{(i)}-r} t^r(r_{i,j}) = \sum_{k \neq i} \sum_j \sum_{r \in \mathbb{Z}} (f_{k,j,r} t^r \lim_s H^{(s)}_{\alpha^{(i)}-r}(e_{k,j}).$$

Mais d'après 5.5.2, $\lim_s H^{(s)}_{\alpha^{(i)}-r}(e_{i,j})$ est nul sauf si $r=0$ et comme par hypothèse $\alpha^{(i)} - r \neq \alpha^{(k)}$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a aussi $\lim_s H^{(s)}_{\alpha^{(i)}-r}(e_{k,j}) = 0$ pour tout j et $k \neq i$. En définitive, on obtient $\sum_j f_{i,j,0} e_{i,j} = 0$. Si la famille $(f_{i,j})_{i,j}$ était non nulle, on pourrait supposer, quitte à multiplier par une puissance de t, que dans la relation de départ, il existe (i,j) tel que $f_{i,j,0} \neq 0$, d'où une contradiction. Les $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}) \otimes_K \mathcal{L}_{\alpha^{(i)}}(E)$ sont donc en somme directe dans E.

Notons $r := \mathrm{rg}(E)$, soient $(u_1, \ldots, u_{r+1})$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}_\alpha(E)$. Comme E est libre sur la couronne $V_\lambda \cap [x]_\mu$, la famille $(u_1, \ldots, u_{r+1})$ est liée sur $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$ et il existe $(f_i)_{i \leq r+1}$ tel que $\sum_{i \leq r+1} f_i u_i = 0$ et on peut supposer qu'il existe i tel que $f_{i,0} \neq 0$. On procède ensuite comme ci-dessus en appliquant $e \mapsto \lim_s H^{(s)}_\alpha(e)$ ce qui donne $\sum_{i \leq r+1} f_{i,0} u_i = 0$, d'où une relation sur K entre les u_i.

REMARQUE 5.5.6. Supposons qu'on ait choisi un relèvement F du Frobenius de X comme en §. 1. Notons $E^{(s+1)}_\alpha := \{H^{(s)}_\alpha(e)/e \in \Gamma(V_\lambda \cap \cap [x]_\mu E)\} \subset \Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu E,)$ c'est un $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, F^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$-module tel que $F^* F_* E^{(s+1)}_\alpha \xrightarrow{\sim} E$; en particulier, $E^{(s+1)}_\alpha$ est libre de même rang que E. On a alors $\mathcal{L}_\alpha(E) = \bigcap_{s \geq 0} E^{(s)}_\alpha$.

PROPOSITION 5.5.7. *Sous l'hypothèse* (5.5.1), *il existe $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ tel que $\mathcal{L}_\alpha(E) \neq 0$.*

PREUVE. Il s'agit d'une forme faible de l'argument de Dwork (5.3.8). On note $I := [\lambda, \mu]$. On fixe e non nul dans $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu E)$. Supposons qu'on ait trouvé $\alpha_s < q := p^{s+1}$ tel que $\|t^{\alpha_s} H^{(s)}_t t^{-\alpha_s}(e)\|_I \geq \|e\|_I$. Si $r \in$

$\in [0, p-1]$ est tel que $\|t^{\alpha_s + rp^{s+1}} H_t^{(s)} t^{-\alpha_s - rp^{s+1}}(e)\|_I$ soit maximal, on a alors,

$$\|t^{\alpha_s + rp^{s+1}} H_t^{(s)} t^{-\alpha_s - rp^{s+1}}(e)\|_I = \operatorname*{Max}_{u < p^{s+1}} \|t^u H_t^{(s+1)} t^{-u} (t^{\alpha_s} H_t^{(s)} t^{-\alpha_s}(e))\|_I \geqslant$$

$$\geqslant \|t^{\alpha_s} H_t^{(s)} t^{-\alpha_s}(e)\|_I \geqslant \|e\|_I .$$

On construit ainsi de proche en proche à partir de e un élément $\alpha := \lim_s \alpha_s$ de $\mathbb{Z}_p$ en projetant à chaque étape sur l'une des composantes de norme maximale. On a alors $\|\lim_s t^{\alpha_s} H_t^{(s)} r^{-\alpha_s}(e)\|_I \geqslant \|e\|_I$ si bien qu'on obtient ainsi un élément non nul de $\mathcal{L}_\alpha(E)$.

(5.6) E étant un isocristal surconvergent fuchsien en x vérifiant l'hypothèse 5.5.1, on a vu que $\mathcal{L}_\alpha(E)$ est un sous-K-espace vectoriel de $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, E)$ de dimension finie et stable par l'action de $t\partial_t$. Lorsque l'exposant de E possède des différences non Liouville au sens de Christol et Mebkhout, on a vu en 5.4.2 que les seuls $\mathcal{L}_\alpha(E)$ non nuls sont ceux correspondant aux valeurs $\alpha \in \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ figurant sur la diagonale de la décomposition de Jordan. On est donc amené à définir l'exposant de E en x, noté $\operatorname{Exp}(E)$ par

$$\operatorname{Exp}(E) := \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}} \operatorname{Sp}(t\partial_{t|\mathcal{L}_\alpha(E)}) . \tag{5.6.1}$$

Si $\alpha - \beta = n \in \mathbb{Z}$, alors on obtient les valeurs propres de l'action de $t\partial_t$ sur $\mathcal{L}_\alpha(E)$ en translatant celles de l'action de $t\partial_t$ sur $\mathcal{L}_\beta(E)$ par n. On en déduit que $\operatorname{Exp}(E)$ est une partie finie non vide de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$. Si $\alpha \in \operatorname{Exp}(E)$, alors, en effectuant un changement de base constant sur $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}) \otimes_K \mathcal{L}_\alpha(E)$ on peut mettre la matrice de l'action de $t\partial_t$ sous forme de Jordan. Si β est une valeur propre de cette matrice, associée à un vecteur propre $e \in \mathcal{L}_\alpha(E)$, alors $t\partial_t(e) = \beta e$. Comme $\varrho(E, \gamma) = \gamma$ pour $\gamma \in [\lambda, \mu]$, on a $\lim_k \left\| \binom{\beta}{k} / t^k \right\|_\gamma \varrho^k = 0$ pour tout $\varrho < \gamma$. Par conséquent $t\partial_t + \beta$ définit un isocristal surconvergent ce qui exige que β soit dans $\mathbb{Z}_p$. Comme $e \in \mathcal{L}_\alpha(E)$, $\lim_s H_\alpha^{(s)}(e) = e$, ce qui entraîne $\beta = \alpha$ par 5.5.2. Les exposants de E sont donc les éléments α de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ tels que $\mathcal{L}_\alpha(E)$ est non nul, ou encore les α de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ tels que $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, E)$ possède un sous-module de rang un isomorphe à $t\partial_t + \alpha$. Cette dernière caractérisation est la même que sur $\mathbb{C}$ et tout comme dans la situation complexe, les

exposants apparaissent comme valeurs propres modulo $\mathbb{Z}$ de l'action de $t\partial_t$ sur un K-espace vectoriel de dimension finie, les opérateurs $e \mapsto \lim_s H_\alpha^{(s)}(e)$ faisant ici office de réduction modulo (t). Les propriétés des exposants, notamment le comportement par suite exacte, vont s'en trouver éclaircies. Remarquons enfin que la condition 5.5.1 peut-être satisfaite même si l'exposant possède des différences Liouville (voir 5.4.7).

Il reste à examiner le comportement de l'exposant par suite exacte pour achever la preuve de la réciproque de 5.4.2.

PROPOSITION 5.6.2. *Pour $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, le foncteur $E \mapsto \mathcal{L}_\alpha(E)$ est exact de la catégorie des isocristaux surconvergents fuchsiens en x dans la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie.*

PREUVE. Soit $0 \to F \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} G \to 0$ une suite exacte d'isocristaux surconvergents fuchsiens en x satisfaisant la condition 5.5.1. Comme $V_\lambda \cap \cap [x]_\mu$ est affinoïde, on obtient encore une suite exacte en appliquant le foncteur $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, -)$. Comme u et v sont $\mathcal{O}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$-linéaires, ils commutent à $H_\alpha^{(s)}$ puis à $\lim_s H_\alpha^{(s)}(-)$ par continuité, d'où une suite $0 \to \mathcal{L}_\alpha(F) \xrightarrow{u} \mathcal{L}_\alpha(E) \xrightarrow{v} \mathcal{L}_\alpha(G) \to 0$. La flèche $\mathcal{L}_\alpha(F) \xrightarrow{u} \mathcal{L}_\alpha(E)$ est injective car $\mathcal{L}_\alpha(F) \subset F$. Si $\lim_s H_\alpha^{(s)}(y) \in \mathcal{L}_\alpha(G)$ avec $y \in G$, alors il existe $x \in E$, tel que $v(x) = y$. Il vient alors

$$v(\lim_s H_\alpha^{(s)}(s)) = \lim_s H_\alpha^{(s)}(v(x)) = \lim_s H_\alpha^{(s)}(y) = y \tag{5.6.2}$$

d'où la surjectivité de $\mathcal{L}_\alpha(E) \xrightarrow{v} \mathcal{L}_\alpha(G)$. Enfin, si $\lim_s H_\alpha^{(s)}(x) \in \operatorname{Ker}(v)$ il existe $z \in F$ tel que $u(z) = \lim_s H_\alpha^{(s)}(x)$ de sorte que $u(\lim_s H_\alpha^{(s)}(z)) = = \lim_s H_\alpha^{(s)}(\lim_{u \geqslant s} H_\alpha^{(u)}(x)) = \lim_u H_\alpha^{(u)}(x)$. La suite $0 \to \mathcal{L}_\alpha(F) \xrightarrow{u} \mathcal{L}_\alpha(E) \xrightarrow{v} \to \mathcal{L}_\alpha(G) \to 0$ est donc exacte.

COROLLAIRE 5.6.3. *Si $0 \to F \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} G \to 0$ est une suite exacte d'isocristaux surconvergents en x, alors E est fuchsien en x si et seulement si F et G le sont, si E satisfait la condition* 5.5.1, *il en est de même de F et G et on a alors* $\operatorname{Exp}(E) = \operatorname{Exp}(F) \cup \operatorname{Exp}(G)$.

PREUVE. La première assertion est due à Robba (voir [Ch-M, 3.1]). Il y a un sens facile: si E est fuchsien en x, alors toute norme de Banach $\| - \|_E$ sur $\Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, E)$ induit une norme de Banach

$\| - \|_F$ sur le sous-espace F et une norme quotient $\| - \|_G$ sur G telle que $\| - \|_G \leq \| - \|_E$. On en déduit que F et G sont également fuchsiens en x. Compte tenu de ce que u et v sont $\mathcal{D}$-linéaires, on voit également que si la condition 5.5.1 est satisfaite par E, elle l'est aussi par F et G.

D'après 5.6.2, on a une suite exacte $0 \to \mathcal{L}_\alpha(F) \xrightarrow{u} \mathcal{L}_\alpha(E) \xrightarrow{v} \mathcal{L}_\alpha(G) \to 0$ qui est en outre horizontale. On a donc $\mathrm{Sp}(t\partial_{t|\mathcal{L}_\alpha(F)}) = \mathrm{Sp}(t\partial_{t|\mathcal{L}_\alpha(F)}) \cup \cup \mathrm{Sp}(t\partial_{t|\mathcal{L}_\alpha(G)})$; d'où $\mathrm{Exp}(E) = \mathrm{Exp}(F) \cup \mathrm{Exp}(G)$.

THÉORÈME 5.7. *Soit E un isocristal surconvergent fuchsien en x. Alors E possède une décomposition de Jordan sur R (déf. 5.2.2) si et seulement s'il vérifie la condition 5.5.1. Dans ce cas, si 5.5.1 est vérifiée sur $V_\lambda \cap [x]_\mu$ pour tout $\mu \in [\lambda, 1[$, les $\mathcal{L}_\alpha(E)$ ne dépendent pas de μ et on a la décomposition $R \otimes E \simeq \bigotimes_{\alpha \in \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}} R \otimes \mathcal{L}_\alpha(E)$. La somme*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lim_s H^{(s)}_{\alpha+n}(e)$$

converge dans $R \otimes E$, c'est la composante de e dans $R \otimes \mathcal{L}_\alpha(E)$.

PREUVE. On a vu en 5.4.2 que la condition 5.5.1 est satisfaite si E possède une décomposition de Jordan. Réciproquement, sous l'hypothèse 5.5.1, on va montrer l'existence d'une décomposition sur $V_\lambda \cap [x]_\mu$, en procédant par récurrence sur $\mathrm{rg}(E)$. On sait que les $\Gamma(U_K \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}) \otimes \otimes \mathcal{L}_\alpha(E)$ sont en somme directe (5.5.5) et que $\Gamma(U_K \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}) \otimes \mathcal{L}_\alpha(E)$ est un module fuchsien de rang $\dim_K \mathcal{L}_\alpha(E)$ (voir preuve de 5.5.5) et dont l'exposant est α, compté avec la multiplicité $\dim_K \mathcal{L}_\alpha(E)$. Posons

$$G := \Gamma([x]_\lambda \cap V_\lambda, E)/\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}) \otimes \mathcal{L}_\alpha(E);$$

d'après 5.6.3 et l'hypothèse de récurrence, on a $|\mathrm{Exp}(G)| = \mathrm{rg}(E) - - \dim_K \mathcal{L}_\alpha(E)$ puis $|\mathrm{Exp}(E)| = \mathrm{rg}(E)$; $\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E)$ est donc somme directe des $\Gamma(U_K \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}) \otimes \mathcal{L}_\alpha(E)$ et possède donc une décomposition de Jordan en mettant la matrice de $(\mathcal{L}_\alpha(E), t\partial_t)$ sous forme réduite de Jordan à l'aide d'un changement de base constant (on peut voir aussi que les seuls $\mathcal{L}_\alpha(E)$ non nuls sont ceux obtenus pour les composantes α_i (modulo $\mathbb{Z}$) du vecteur $\underline{\alpha}$ contruit par l'argument de Dwork en 5.3.8).

Pour montrer que la somme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lim_s H^{(s)}_{\alpha+n}(e)$ converge dans $\Gamma([x]_\mu \cap \cap V_\lambda, E)$, on peut donc utiliser les calculs de 5.4.2. Si $\{e_{\alpha,1}, \ldots, e_{\alpha,r}\}$ est une base de Jordan pour $\Gamma(U_K \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}) \otimes \mathcal{L}_\alpha(E)$ on a d'après 5.4.6,

$$\lim_s H^{(s)}_{\alpha+n}(fe_i) = \lambda_n t^n e_i \quad \text{si} \quad f = \sum_n \lambda_n t^n .$$

La convergence de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lim_s H^{(s)}_{\alpha+n}(fe_i)$ s'en déduit aussitôt, si $e = \sum_\alpha \sum_i f_{\alpha,i} e_{\alpha,i}$ est la décomposition de e dans $\bigotimes_{\alpha\in\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}} \Gamma(U_K \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}) \otimes \mathcal{L}_\alpha(E)$, alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lim_s H^{(s)}_{\alpha+n}(e) = \sum_i f_{\alpha,i} e_{\alpha,i}$ est la composante de e dans $\Gamma(U_K \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}) \otimes \mathcal{L}_\alpha(E)$. Si maintenant $e \in R \otimes E$, et si 5.5.1 est vérifiée pour tout $\mu \in [\lambda, 1[$, alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lim_s H^{(s)}_{\alpha+n}(e)$ est défini dans $R \otimes E$, (attention, la somme ne commute pas à la limite!). Il reste à voir la décomposition sur R, notons $\mathcal{L}_{\alpha,I}(E)$, où $I := [\lambda, \mu]$ pour préciser qu'on travaille sur la couronne $[x]_\mu \cap V_\lambda$. Si $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_1 \leq \mu_2$, alors on a les inclusions,

$$\mathcal{L}_{\alpha,[\lambda_1,\mu_1]}(E) \hookrightarrow \mathcal{L}_{\alpha,[\lambda_2,\mu_1]}(E) \hookleftarrow \mathcal{L}_{\alpha,[\lambda_2,\mu_2]}(E).$$

Comme $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}} \dim_K(\mathcal{L}_{\alpha,I}(E)) = \mathrm{rg}(E)$ pour tout I, on voit que ces inclusions sont des isomorphismes et $\dim_K(\mathcal{L}_{\alpha,I}(E))$ ne dépend pas de I. Si on note $\mathcal{L}_\alpha(E) := \{\lim_s H^{(s)}_\alpha(e)/e \in R \otimes R\}$, alors toute famille de $\mathcal{L}_\alpha(E)$ possédant $\dim_K(\mathcal{L}_{\alpha,I}(E)) + 1$ éléments est liée de sorte que $\mathcal{L}_\alpha(E)$ est de dimension finie, une base étant définie sur une couronne $V_\lambda \cap]x[$ pour λ convenable, on voit que $\mathcal{L}_\alpha(E)$ est isomorphe à $\mathcal{L}_{\alpha,I}(E)$. On peut donc écrire en utilisant 5.2.3,

$$R \otimes E \simeq \lim_{\substack{\rightarrow \\ \lambda<1}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ \mu\geq\lambda}} \Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, E) \simeq$$

$$\simeq \bigotimes_{\alpha\in\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ \lambda<1}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ \mu\geq\lambda}} (\Gamma([x]_\mu \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}) \otimes \mathcal{L}_{\alpha,[\lambda,\mu]}(E)) \simeq \bigotimes_{\alpha\in\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}} R \otimes \mathcal{L}_\alpha(E).$$

Cela termine la peuve du théorème. On remarquera encore que si $\{e_1, \ldots, e_r\}$ est une base de $R \otimes E$, alors $\{\lim_s H^{(s)}_{\alpha+n}(e_i), n \in \mathbb{Z}, i \in [1, r]\}$ est une famille génératrice de $R \otimes \mathcal{L}_\alpha(E)$.

Lorsque E possède une structure de Frobenius, les exposants sont rationnels [Ch-M, 5.5.3]. Donnons en une nouvelle preuve à l'aide des outils développés dans ce papier:

PROPOSITION 5.7.1. *Soit E un isocristal surconvergent fuchsien en x possédant une structure de Frobenius (pour le relèvement $F^*(t) = t^q$, $q := p^{s+1}$). Alors, si $\mathcal{L}_\alpha(E)$ est non nul, on a $(q-1)\,\alpha \in \mathbb{Z}$.*

PREUVE. Notons $E^{(s+1)} := \{H^{(s)}_t(e)/e \in \Gamma(V_\lambda \cap [x]_\mu, E)\}$. On sait que $F^* E^{(s+1)} \simeq E$. Comme par hypothèse, $F^* \circ \sigma^* E \simeq E$ (avec σ: $\mathfrak{X}^{(s+1)} \rightarrow$

$\to \mathcal{X}$), il existe donc un isomorphisme $\Phi\colon E^{(s+1)} \xrightarrow{\sim} \sigma^* E$. Comme $\Phi \circ \partial_t = \partial_t \circ \Phi$, on a

$$\Phi(\lim_u t^{a_u} H_t^{(u)} t^{-a_u}(H_t^{(s)}(e))) = \lim_u t^{a_u} H_t^{(u)} t^{-a_u}(\Phi(H_t^{(s)}(e))) \in \mathcal{L}_a(\sigma^* E),$$

D'où,

$$\mathcal{L}_a(E) \simeq \mathcal{L}_a(\sigma^* E) \simeq \mathcal{L}_a(E^{(s+1)}).$$

Mais on a aussi $\mathcal{L}_a(E^{(s+1)}) \simeq \mathcal{L}_{qa}(E)$; en effet, avec les notations de 1.4.2, $t^{a_u} H_t^{(u)} t^{-a_u}$ étant vu comme opérateur sur $\mathcal{X}^{(s+1)}$, on a

$$t^{a_u} H_t^{(u)} t^{-a_u}(H_t^{(s)}(e)) = (t^{a_u} H_{t'}^{(u)} t^{-a_u})^{(s)}(e) =$$

$$= t^{qa_u}(H_{t'}^{(u)})^{(s)} t^{-qa_u}(e) = t^{qa_u} H_t^{(u+s)(s)} t^{-qa_u}(e).$$

Et comme $(qa)_{u+s} = qa_u$, on a bien $\lim_u t^{a_u} H_t^{(u)} t^{-a_u}(H_t^{(s)}(e)) \in \mathcal{L}_{qa}(E)$. On en déduit donc d'après 5.5.4(ii) que $a - qa \in \mathbb{Z}$ (autrement dit $a = \sum_{k \geqslant 0} a_k q^k$ possède un développement périodique).

REFRENCES

[And] Y. ANDRÉ, *G-functions and geometry*, Aspects of Mathematics, Vol. E13, Publ. of the Max-Plank-Institut für Mathematik (1989).

[B-Ch] F. BALDASSARRI - B. CHIARELLOTTO, *On André's theorem*, Contemp. Math., **133** (1992) pp. 25-37.

[Be1] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, Prépublication 96-03, Université Rennes I (1996).

[Be2] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules*, Proc. Conf. p-adic analysis (Trento 1989), Lect. Notes in Math., 1454, Springer-Verlag (1990).

[Be3] P. BERTHELOT, *$\mathcal{D}^\dagger$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., t. 29, fasc. 2 (1996), p. 185-272.

[Be4] P. BERTHELOT, *$\mathcal{D}^\dagger$-modules airthmétiques II*, en préparation.

[BGR] S. BOSCH - U. GUNTZER - R. REMMERT, *Non archimedean analysis*, Grundlehren der Math. Wissenschaften, **261**, Springer-Verlag (1984).

[Ch-Dw1] G. CHRISTOL - B. DWORK, *Modules différentiels sur des couronnes*, Ann. Inst. Fourier, **44** (1994), pp. 663-701.

[Ch-Dw2] G. CHRISTOL - B. DWORK, *Effective p-adic bounds at regular singular points*, Duke Math. J., **62**, 2 (1991).

[Ch-M1] G. CHRISTOL - Z. MEBKHOUT, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques* II, Ann. of Math., **146** (1997).

[Ch-M2] G. CHRISTOL - Z. MEBKHOUT, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques* III, Prépublication Université Paris 6 (1995).

[Crw1] R. CREW, *F-isocrytals and p-adic representations*, in *Alg. Geometry, Bowdoin 1985*, PSPM 46, part 2 (1987), pp. 11-138.

[Crw2] R. CREW, *Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve*, préprint (1994).

[Dw] B. DWORK, *On exponents of* p-*adic differential modules*, prépublication (1996).

[DGS] B. DWORK - G. GEROTTO - F. J. SULLIVAN, *An introduction to G-functions*, An. Math. Studies, **133**, Princeton University Press (1994).

[Ga1] L. GARNIER, *Correspondance de Katz et irrégularité des isocristaux surconvergents de rang un*, Manuscripta Math., **87** (1995), pp. 327-348.

[Ga2] L. GARNIER, *Descente par Frobenius explicite pour les $\mathcal{D}^\dagger$-modules*, prépublication (à pareûtre dans "Journal of Algebra").

[Lev] A. H. M. LEVELT, *Jordan decomposition for a class of singular differential operators*, Arkiv für Mathematik, **13** (1979), pp. 1-27.

[Hu] C. HUYGHE, *Construction et étude de la transformée de Fourier des d-modules arithmétiques*, Thèse, Université de Rennes I (1995).

[SGAV] *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, Cohomologie l-adique et fonctions L*, Lect. Notes in Math., **589**, Springer-Verlag (1977).

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 gennaio 1997