

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

M. AKKAR

C. NACIR

Structure m -convexe d'une algèbre limite inductive localement convexe d'algèbres de Banach

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 95 (1996), p. 107-126

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1996__95__107_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Structure m -convexe d'une algèbre limite inductive localement convexe d'algèbres de Banach.

M. AKKAR - C. NACIR (*)

ABSTRACT - We show that an algebra, locally convex inductive limit of a sequence of Banach algebras, is a locally multiplicatively convex algebra; and that is not the case if the inductive limit is not countable.

Introduction.

Soit (A, τ) une algèbre limite inductive localement convexe d'une famille d'algèbres normées $((A_i, \|\cdot\|_i))_{i \in I}$. Dans ([5], p. 349), Arosio pose la question suivante:

(**) Est-ce que (A, τ) est toujours une algèbre localement multiplicativement convexe ($a.l.m.c.$)?

C'est en fait une question sur la correspondance topologie-bornologie; en effet, si $(E, \mathcal{B})$ est un espace bornologique convexe ($e.b.c.$), on lui associe par cette correspondance l'espace localement convexe ($e.l.c.$) $T_{(E, \mathcal{B})}$ dont une base de voisinages de 0 est formée par ses disques bornivores. Nous allons montrer que, si $(A, \mathcal{B})$ est une algèbre bornologique convexe ($a.b.c.$), alors l' $e.l.c.$ $T_{(A, \mathcal{B})}$ est une algèbre localement convexe ($a.l.c.$); et que la question (**) est en fait équivalente à la suivante: si $(A, \mathcal{B})$ est une algèbre bornologique localement multiplicativement convexe ($a.b.m.c.$), au sens de [1] ou de [10], l' $a.l.c.$ $T_{(A, \mathcal{B})}$ est-elle toujours une $a.l.m.c.$?

Nous répondons à cette question affirmativement dans le cas d'une

(*) Adresse des auteurs: UFR de Mathématiques et d'Informatique, Unité associée au CNRS n° 226, Université de Bordeaux 1, 351 cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France.

a.b.m.c. à base dénombrable de bornés (c'est-à-dire le cas où I est dénombrable), et exhibons une famille d'exemples d'*a.b.m.c.* non nécessairement commutatives montrant que la réponse à cette question est négative dans le cas général.

Rappels algébriques, topologiques et bornologiques.

Dans la suite E (resp. A) désigne un espace vectoriel (resp. une algèbre unitaire d'unité e) sur le corps K ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), sauf mention contraire.

Une algèbre topologique (A, τ) est une algèbre A munie d'une topologie τ compatible avec sa structure d'espace vectoriel et pour laquelle la multiplication est séparément continue. Si (A, τ) est en plus un *e.l.c.*, on dit que (A, τ) est une *a.l.c.* Si τ est définie par la famille des semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, on note aussi (A, τ) par $(A, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$.

Une algèbre topologique (A, τ) est dite une Q -algèbre topologique si le groupe A^* des éléments inversibles de A est ouvert dans A .

Une *a.l.c.* (A, τ) est dite une algèbre localement multiplicativement convexe (*a.l.m.c.*) si, $(A, \tau) = (A, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ avec $p_\lambda(xy) \leq p_\lambda(x)p_\lambda(y)$ pour tout $x, y \in A$, et pour tout $\lambda \in \Lambda$. La multiplication dans A est alors globalement continue. Si en plus (A, τ) est un espace de Fréchet, on dit que (A, τ) est une *a.l.m.c.* de Fréchet ou seulement une algèbre de Fréchet et en abrégé une algèbre $\mathcal{F}$; dans ce cas τ peut être définie par une suite croissante de semi-normes $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que: $p_i(xy) \leq p_i(x)p_i(y)$ pour tout $x, y \in A$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$. Une algèbre de Fréchet qui est une Q -algèbre topologique est dite une Q -algèbre de Fréchet et en abrégé une algèbre $Q\mathcal{F}$.

Une algèbre bornologique $(A, \mathcal{B})$ est une algèbre A munie d'une bornologie $\mathcal{B}$ compatible avec sa structure d'espace vectoriel et pour laquelle le produit de deux bornés est borné. Si $(A, \mathcal{B})$ est en plus un *e.b.c.*, on dit que $(A, \mathcal{B})$ est une *a.b.c.*

Une base d'une bornologie $\mathcal{B}$ sur E est une sous-famille $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{B}$ telle que tout élément de $\mathcal{B}$ est contenu dans un élément de $\mathfrak{J}$.

Une pseudo-base d'une bornologie $\mathcal{B}$ sur E est une sous-famille $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{B}$ telle que tout élément de $\mathcal{B}$ est absorbé par un élément de $\mathfrak{J}$.

Une *a.b.c.* $(A, \mathcal{B})$ est dite localement multiplicativement convexe si $\mathcal{B}$ admet une pseudo-base formée de disques idempotents.

Il y a une correspondance entre les topologies localement convexes et les bornologies convexes. En effet: soit (E, τ) un *e.l.c.*, ses bornés forment une bornologie convexe sur E appelée bornologie de Von-Neumann de (E, τ) , on note $\mathcal{B}_{(E, \tau)}$ cet *e.b.c.*; et si $(E, \mathcal{B})$ est un *e.b.c.*, ses di-

sques bornivores forment un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie d'*e.l.c.* sur E , on note $T_{(E, \mathcal{B})}$ cet *e.l.c.*

En général, la topologie de $T_{\mathcal{B}(E, \tau)}$ (resp. la bornologie de $\mathcal{B}_{T(E, \mathcal{B})}$) sur un *e.l.c.* (resp. un *e.b.c.*) E est strictement plus fine (resp. moins fine) que la topologie (resp. la bornologie) initiale. Les espaces localement convexes bornologiques au sens usuel sont précisément ceux pour lesquels $T_{\mathcal{B}(E, \tau)} = (E, \tau)$.

Un système inductif d'espaces vectoriels est la donnée:

- (i) d'un ensemble d'indices I ordonné filtrant à droite.
- (ii) d'une famille $(E_i)_{i \in I}$ d'espaces vectoriels.
- (iii) de morphismes d'espaces vectoriels $f_{j,i}: E_i \rightarrow E_j$ (pour les i, j tels que $i \leq j$), vérifiant $f_{k,i} = f_{k,j} \circ f_{j,i}$ (pour les i, j, k tels que $i \leq j \leq k$) et $f_{i,i}$ étant l'application identique de E_i .

L'ensemble E limite inductive des E_i ($i \in I$), est le quotient de l'ensemble somme des E_i par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ suivante:

$$(\forall x \in E_i) (\forall y \in E_j), \quad (x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists k \geq i, j \text{ } f_{k,i}(x) = f_{k,j}(y)).$$

Soit f_i l'application canonique de E_i dans E ; on a $E = \bigcup_{i \in I} f_i(E_i)$. On munit E des lois suivantes:

$$(\forall x, y \in E) (\forall \alpha \in K) (\exists k \in I), \quad f_k(x) = x_k, \quad f_k(y) = y_k.$$

On pose:

$$x + y = f_k(x_k + y_k) \quad \text{et} \quad \alpha x = f_k(\alpha x_k).$$

Ces définitions sont indépendantes du choix de $k \in I$; alors E muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur K ; E est dit l'espace limite inductive des espaces E_i ($i \in I$) et on note $E = \varinjlim (E_i, f_i)_{i \in I}$.

Pour définir les systèmes inductifs d'algèbres $\vec{A}_i$ ($i \in I$), on exige en plus que les $f_{j,i}$ soient des morphismes d'algèbres. L'espace $\varinjlim (A_i, f_i)_{i \in I}$ est alors muni d'une structure d'algèbre.

→ Pour définir les systèmes inductifs d'espaces vectoriels topologiques, d'algèbres topologiques, d'*e.l.c.*, d'*a.l.c.*, d'*a.l.m.c.*, (resp. d'espaces vectoriels bornologiques, d'*e.b.c.*, d'*a.b.c.*, d'*a.b.m.c.*), on exige en plus que les morphismes $f_{j,i}$ soient continus, et on munit alors $\varinjlim (E_i, f_i)_{i \in I}$ ou $\varinjlim (A_i, f_i)_{i \in I}$ de la topologie vectorielle ou de la topologie localement convexe τ (resp. de la bornologie vectorielle ou de la bornologie convexe $\mathcal{B}$) la plus fine rendant continus (resp. bornés) les morphismes f_i ($i \in I$); on note $(E, \tau) = t - \varinjlim ((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$ ou $(A, \tau) = t - \varinjlim ((A_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$ (resp. $(E, \mathcal{B}) = b - \varinjlim ((E_i, \mathcal{B}_i), f_i)_{i \in I}$ ou $(A, \mathcal{B}) = b - \varinjlim ((A_i, \mathcal{B}_i), f_i)_{i \in I}$).

Dans le cas topologique localement convexe, un système fondamental de voisinages de 0 est formé par les enveloppes convexes équilibrées des réunions $\bigcup_{i \in I} V_i$ où pour tout $i \in I$, V_i parcourt un système fondamental de voisinages de 0 de (E_i, τ_i) .

Dans le cas bornologique convexe, une partie B est bornée dans $(E, \mathcal{B})$ si et seulement si il existe $i \in I$ tel que $B \in \mathcal{B}_i$.

Une limite inductive localement convexe (resp. bornologique convexe) se présente souvent sous la forme suivante (et on verra dans la suite qu'on peut s'y ramener dans certains cas) : $((E_i, \tau_i))_{i \in I}$ (resp. $((E_i, \mathcal{B}_i))_{i \in I}$) est une famille filtrante croissante par des injections continues (resp. bornées) d'e.l.c. (resp. d'e.b.c.), sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E , de réunion égale à E ; on dira qu'on a une réunion filtrante croissante d'e.l.c. (resp. d'e.b.c.), et on notera:

$(E, \tau) = \bigcup_t (E_i, \tau_i)_{i \in I}$ (resp. $(E, \mathcal{B}) = \bigcup_b (E_i, \mathcal{B}_i)_{i \in I}$); pour $i \in I$, on désigne dans ce cas par φ_i l'injection canonique de E_i dans E . On a les mêmes remarques dans le cas d'une limite inductive d'a.l.c. (resp. d'a.b.c.).

La notion de limite projective est la notion duale de celle de limite inductive; pour obtenir la définition d'un système projectif, il suffit de remplacer $f_{j,i}: E_i \rightarrow E_j$ par $p_{i,j}: E_j \rightarrow E_i$ et $f_{k,i} = f_{k,j} \circ f_{j,i}$ par $p_{i,k} = p_{i,j} \circ p_{j,k}$. L'ensemble limite projective est le sous ensemble E de l'ensemble produit des E_i ($i \in I$), formé des familles $(x_i)_{i \in I}$ vérifiant $x_i = p_{i,j}(x_j)$ pour tout couple (i, j) tel que $i \leq j$. Suivant les structures considérées, E est muni de la structure induite par celle du produit des E_i ($i \in I$). On note $(E, \tau) = t - \lim_{\leftarrow} (E_i, \tau_i)_{i \in I}$ (resp. $(E, \mathcal{B}) = b - \lim_{\leftarrow} (E_i, \mathcal{B}_i)_{i \in I}$).

On peut voir facilement, en utilisant les définitions, que les limites inductives et projectives ne changent pas quand on remplace l'ensemble des indices I par un sous-ensemble cofinal J , c'est-à-dire tel que tout élément de I soit majoré par un élément de J .

Une algèbre limite inductive localement convexe d'une famille dénombrable d'algèbres de Banach (resp. de Fréchet) est dite une algèbre $\mathcal{LB}$ (resp. $\mathcal{LF}$).

Une algèbre $\mathcal{LB}$ (resp. $\mathcal{LF}$ avec une suite de définition formée d'algèbres Q - $\mathcal{F}$) qui est une Q -algèbre topologique est dite une algèbre Q - $\mathcal{LB}$ (resp. Q - $\mathcal{LF}$).

On montre ([13], théorème 5.1) ou ([19], théorème 11.4), qu'une a.l.c. complète (A, τ) est une a.l.m.c. si et seulement si (A, τ) est une limite projective d'algèbres de Banach; plus précisément si $(p_\lambda)_{\lambda \in A}$ est une famille de semi-normes sous-multiplicatives définissant τ , alors (A, τ) est la limite projective des algèbres de Banach $(\hat{A}_\lambda, \hat{p}_\lambda)$ ($\lambda \in A$),

$(\widehat{A}_\lambda, \widehat{p}_\lambda)$ étant l'algèbre de Banach complétée de $(A/N_\lambda, p_\lambda)$ et N_λ l'annulateur de p_λ .

On montre d'autre part ([11], théorème I.3.1) ou ([4], proposition 1.2), qu'une *a.b.c.* séparée (resp. complète) $(A, \mathcal{B})$ est une *a.b.m.c.* si et seulement si $(A, \mathcal{B})$ est une réunion filtrante croissante bornologique convexe d'algèbres normées (resp. d'algèbres de Banach); plus précisément si $(B_i)_{i \in I}$ est une pseudo-base de la bornologie $\mathcal{B}$, formée de bornés idempotents (resp. de bornés idempotents complétants), alors $(A, \mathcal{B})$ est la réunion filtrante croissante bornologique convexe des algèbres normées (resp. de Banach) (A_{B_i}, p_{B_i}) ($i \in I$), où pour tout $i \in I$, A_{B_i} est la sous-algèbre de A engendrée par B_i , et p_{B_i} la jauge de B_i dans A_{B_i} . On déduit que, si en outre $(A, \mathcal{B})$ admet une base dénombrable de bornés, elle est une réunion croissante bornologique convexe d'une suite d'algèbres normées (resp. de Banach).

1. – Resultats preliminaires.

Les propositions 1.1 et 1.2 qui suivent sont utilisées dans la plupart des travaux sur les limites inductives et projectives; nous les rappelons en précisant leurs démonstrations.

PROPOSITION 1.1. *Toute limite inductive (resp. projective) d'une famille dénombrable d'ensembles, d'espaces vectoriels, d'e.l.c., d'a.l.c., ..., est aussi une limite inductive (resp. projective), d'une suite d'ensembles, d'espaces vectoriels, d'e.l.c., d'a.l.c., ...*

PREUVE. Ceci résulte du fait que tout ensemble dénombrable ordonné filtrant à droite $(I, \leq)$, admet un sous-ensemble cofinal $(J, \leq)$ bien ordonné, c'est-à-dire admet un sous-ensemble cofinal isomorphe à l'ensemble $\mathbb{N}$ muni de son ordre naturel.

PROPOSITION 1.2. *Soit (E, τ) un espace séparé limite inductive localement convexe d'espaces normés; alors (E, τ) est une réunion filtrante croissante localement convexe d'espaces normés.*

PREUVE. Soient $((E_i, \|\cdot\|_i))_{i \in I}$ une famille de définition de (E, τ) , et pour tout $i \in I$, f_i le morphisme canonique de E_i dans E . Par définition d'un espace vectoriel limite inductive, la famille $(f_i(E_i))_{i \in I}$ des sous espaces vectoriels de E est filtrante croissante pour l'inclusion, et elle est de réunion égale à E . Pour tout $i \in I$, on munit $f_i(E_i)$ de la topologie τ_i localement convexe finale de la topologie de $(E_i, \|\cdot\|_i)$ par la seule application f_i ; ceci revient à identifier algébriquement et topologique-

ment $f_i(E_i)$ à $E_i/f_i^{-1}(0)$. Puisque $f_i^{-1}(0)$ est un sous espace vectoriel fermé de $(E_i, \|\cdot\|_i)$, $E_i/f_i^{-1}(0)$ est une espace normé, par suite $(f_i(E_i), \tau_i)$ l'est également. D'après ([6], II, p. 31), $(E, \tau) = \bigcup_t (f_i(E_i), \tau_i)_{i \in I}$.

REMARQUES. 1) Le résultat de la proposition précédente reste vrai pour toute classe d'espaces topologiques (resp. d'algèbres topologiques), qui est stable par passage au quotient par un sous espace fermé (resp. par un idéal fermé). On a la même remarque dans le cas bornologique.

2) On déduit des deux propositions précédentes que, si (E, τ) est un espace réunion filtrante croissante localement convexe d'une famille dénombrable d'e.l.c., alors (E, τ) est une réunion croissante localement convexe d'une suite d'e.l.c.

On a la même remarque dans le cas des réunions dénombrables d'algèbres localement convexes et dans le cas bornologique convexe.

Nous démontrons maintenant certains résultats sur la correspondance topologie-bornologie.

PROPOSITION 1.3. Soit $(E, \mathcal{B}) = b - \lim_{\rightarrow} ((E_i, \mathcal{B}_i), f_i)_{i \in I}$, alors $T_{(E, \mathcal{B})} = t - \lim_{\rightarrow} (T_{(E_i, \mathcal{B}_i)}, f_i)_{i \in I}$.

PREUVE. Soit V un voisinage de 0 dans $T_{(E, \mathcal{B})}$: c'est-à-dire V contient un disque bornivore D de $(E, \mathcal{B})$. Soit $i \in I$ et B_i un borné de $(E_i, \mathcal{B}_i)$. Alors $f_i(B_i)$ est un borné de $(E, \mathcal{B})$; il existe alors $\alpha > 0$ tel que $D \supset \alpha f_i(B_i)$ et par suite $f_i^{-1}(D) \supset \alpha f_i^{-1}(f_i(B_i)) \supset \alpha B_i$. On obtient alors que, pour tout $i \in I$, $f_i^{-1}(D)$ est un disque qui absorbe tout borné de $(E_i, \mathcal{B}_i)$; donc $f_i^{-1}(D)$ est un voisinage de 0 dans $T_{(E_i, \mathcal{B}_i)}$. On déduit que D (et à fortiori V) est un voisinages de 0 dans $t - \lim_{\rightarrow} (T_{(E_i, \mathcal{B}_i)}, f_i)_{i \in I}$. Réciproquement, si V est un voisinage de 0 dans $t - \lim_{\rightarrow} (T_{(E_i, \mathcal{B}_i)}, f_i)_{i \in I}$ et B est un borné de $(E, \mathcal{B})$, alors il existe $i \in I$ et un borné B_i de $(E_i, \mathcal{B}_i)$ tel que $B \subset f_i(B_i)$ et par suite il existe $\alpha > 0$ tel que $f_i^{-1}(V) \supset \alpha B_i$. On déduit que $V \supset f_i(f_i^{-1}(V)) \supset \alpha f_i(B_i) \supset B$ et par suite V est un voisinage de 0 dans $T_{(E, \mathcal{B})}$.

PROPOSITION 1.4. Soit $(A, \mathcal{B})$ une a.b.c., alors $T_{(A, \mathcal{B})}$ est une a.l.c.

PREUVE. $T_{(A, \mathcal{B})}$ est un e.l.c. par définition. Pour tout $y \in A$, les applications $\varphi_y: x \rightarrow xy$ et $\psi_y: x \rightarrow yx$ sont linéaires bornées de $(A, \mathcal{B})$ dans $(A, \mathcal{B})$; d'après ([10], p. 53), elles sont continues de $T_{(A, \mathcal{B})}$ dans $T_{(A, \mathcal{B})}$.

PROPOSITION 1.5. *Soit $(A, \mathcal{B})$ une a.b.c. limite inductive bornologique convexe d'une famille d'a.b.c. $(A_i, \mathcal{B}_i)$ ($i \in I$); alors $t - \varinjlim (T_{(A_i, \mathcal{B}_i)}, f_i)_{i \in I}$ est une a.l.c., et on a*

$$T_{(A, \mathcal{B})} = t - \varinjlim (T_{(A_i, \mathcal{B}_i)}, f_i)_{i \in I}, \text{ égalité en tant qu'a.l.c..}$$

PREUVE. D'après la Proposition 1.4, $T_{(A, \mathcal{B})}$ est une a.l.c. ainsi que $T_{(A_i, \mathcal{B}_i)}$ pour tout $i \in I$. Soient $i, j \in I$ tel que $i \leq j$, l'application de transition $f_{j,i}: (A_i, \mathcal{B}_i) \rightarrow (A_j, \mathcal{B}_j)$ est un morphisme d'algèbres borné, d'après ([10], p. 53) elle est continue en tant qu'application de $T_{(A_i, \mathcal{B}_i)}$ dans $T_{(A_j, \mathcal{B}_j)}$. On déduit que $(T_{(A_i, \mathcal{B}_i)}, f_i)_{i \in I}$ est un système inductif d'a.l.c.; par suite $t - \varinjlim (T_{(A_i, \mathcal{B}_i)}, f_i)_{i \in I}$ a une structure d'a.l.c. D'après la Proposition 1.3, $T_{(A, \mathcal{B})} = t - \varinjlim (T_{(A_i, \mathcal{B}_i)}, f_i)_{i \in I}$ en tant qu'e.l.c.; ces deux espaces égaux ont chacun une structure d'a.l.c., et ils sont munis d'une même multiplication puisqu'on a $(A, \mathcal{B}) = b - \varinjlim ((A_i, \mathcal{B}_i), f_i)_{i \in I}$. On déduit que $T_{(A, \mathcal{B})} = t - \varinjlim (T_{(A_i, \mathcal{B}_i)}, f_i)_{i \in I}$ en tant qu'a.l.c.

REMARQUE. 1) D'après la proposition 1.5, la question (**) devient: Si $(A, \mathcal{B})$ est une a.b.m.c. séparée, $T_{(A, \mathcal{B})}$ est-elle toujours une a.l.m.c.?

2) La proposition suivante qui est facile à démontrer permet de ramener l'étude de certaines questions au cas où l'espace localement convexe considéré est séparé; elle permet aussi, à l'aide de la Proposition 1.5 et de la proposition 1 de [5], de supprimer l'hypothèse séparée dans la question précédente.

PROPOSITION 1.6. *Soient (A, τ) une a.l.c. et $\{\bar{0}\}$ la fermeture de $\{0\}$ dans A pour la topologie τ ; on désigne par $\bar{\tau}$ la topologie quotient de A par $\{\bar{0}\}$, alors on a:*

(i) $(A/\{\bar{0}\}, \bar{\tau})$ est une a.l.c. à multiplication continue si et seulement si (A, τ) l'est aussi.

(ii) $(A/\{\bar{0}\}, \bar{\tau})$ est une a.l.m.c. si et seulement si (A, τ) l'est aussi.

(iii) $\mathcal{B}_{(A/\{\bar{0}\}, \bar{\tau})}$ est une a.b.m.c. si et seulement si $\mathcal{B}_{(A, \tau)}$ l'est aussi.

2. - Structure d'a.l.m.c. d'une algèbre $\mathcal{LB}$.

La proposition 12 de [5] montre qu'une algèbre commutative limite inductive localement convexe d'une famille dénombrable d'algèbres

normées est une *a.l.m.c.* La preuve de cette proposition utilise effectivement l'hypothèse de commutativité; le théorème suivant montre que le résultat reste vrai sans cette hypothèse.

THÉOREME 2.1. *Soit (A, τ) une algèbre limite inductive localement convexe d'une famille dénombrable d'algèbres normées; alors (A, τ) est une *a.l.m.c.**

PREUVE. D'après les propositions 1.1 et 1.2 et la proposition 1.6, on peut se ramener à (A, τ) séparée et réunion croissante localement convexe d'une suite d'algèbres normées. Soit donc $(A_n, \|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de définition de (A, τ) et considérons $(A, \mathcal{B}) = \bigcup_b ((A_n, \|\cdot\|_n), \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$; alors $(A, \mathcal{B})$ est une *a.b.m.c.* ayant pour pseudo-base de bornologie la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des boules unités fermées des algèbres $(A_n, \|\cdot\|_n)$, $n \in \mathbb{N}$. D'après ([15], Théorème 4), $(A, \mathcal{B})$ admet une pseudo-base de bornologie $(B'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formée de disques idempotents, et telle que $B'_n \subset B'_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $(A'_n, \|\cdot\|'_n)$ la sous-algèbre de A engendrée par B'_n , munie de la jauge $\|\cdot\|'_n$ de B'_n dans A'_n ; puisque B'_n est absorbé par un élément de $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\|\cdot\|'_n$ est une norme sur A'_n . Nous avons alors $(A, \mathcal{B}) = \bigcup_b ((A'_n, \|\cdot\|'_n), \varphi'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ'_n est l'injection canonique de A'_n dans A . Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $B'_n \subset B'_{n+1}$ on a $\varphi'_n: (A'_n, \|\cdot\|'_n) \rightarrow (A'_{n+1}, \|\cdot\|'_{n+1})$ est une injection continue de norme ≤ 1 . D'après ([5], proposition 11), $\bigcup_t ((A'_n, \|\cdot\|'_n), \varphi'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *a.l.m.c.*; et d'après la proposition 1.5,

$$\bigcup_t ((A'_n, \|\cdot\|'_n), \varphi'_n)_{n \in \mathbb{N}} = T_{(A, \mathcal{B})} = \bigcup_t ((A_n, \|\cdot\|_n), \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} = (A, \tau)$$

avec des égalités en tant qu'*a.l.c.* On déduit que (A, τ) est une *a.l.m.c.*

REMARQUES. 1) Sous les hypothèses du théorème 2.1, la multiplication dans (A, τ) est globalement continue et, si A est unitaire, l'application $x \rightarrow x^{-1}$ de A^* dans A^* est continue, ces propriétés étant vraies dans toute *a.l.m.c.*

2) Le théorème 2.1 et la proposition 11 de [5] restent vrais si (A, τ) est une limite inductive localement convexe d'une famille dénombrable d'algèbres semi-normées, et on a les mêmes démonstrations.

COROLLAIRE 2.2. *Soit (A, τ) une algèbre limite inductive localement convexe d'une famille dénombrable d'algèbres normées; alors $\mathcal{B}_{(A, \tau)}$ est une *a.b.m.c.* admettant une pseudo-base dénombrable de bornologie et donc aussi une base dénombrable de bornologie.*

PREUVE. D'après les propositions 1.1 et 1.2 et la Proposition 1.6, on peut se ramener à (A, τ) séparée et réunion croissante localement convexe d'une suite d'algèbres normées. Soient donc $(A_n, \|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de définition de (A, τ) et pour tout $n \in \mathbb{N}$ B_n la boule unité fermée de $(A_n, \|\cdot\|_n)$. Par définition $\mathcal{B}_{(A, \tau)}$ est un *e.b.c.*; d'après la remarque 1 du théorème 2.1, la multiplication dans (A, τ) est continue, donc le produit de deux bornés est un borné; par suite $\mathcal{B}_{(A, \tau)}$ est une *a.b.c.* D'après la Proposition 8 de [5], si (A, τ) est séparée, alors pour tout borné B de (A, τ) , il existe $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ tels que $B \subset \alpha D_n$ (où D_n désigne la fermeture de B_n dans (A, τ)); par suite l'*a.b.c.* $\mathcal{B}_{(A, \tau)}$ est une *a.b.m.c.*

EXEMPLES. 1) Soit $\mathcal{O}(K, E)$ l'algèbre des germes de fonctions analytiques au voisinage du compact K de $\mathbb{C}$, à valeurs dans une algèbre de Banach E non nécessairement commutative, qu'on munit de la topologie τ limite inductive localement convexe définie par les algèbres de Fréchet $H(U, E)$ des fonctions analytiques dans le voisinage ouvert U de K . Soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante d'ouverts relativement compacts de $\mathbb{C}$, formant un système fondamental de voisinages de K , et tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fermeture de Ω_{n+1} soit contenue dans Ω_n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{H}^\infty(\Omega_n)$ l'algèbre de Banach des fonctions holomorphes sur Ω_n , continues sur sa fermeture, à valeurs dans E . Les injections canoniques de $H(\Omega_n, E)$ dans $\mathcal{H}^\infty(\Omega_{n+1})$ et de $\mathcal{H}^\infty(\Omega_{n+1})$ dans $H(\Omega_{n+1}, E)$ sont continues; par suite $(\mathcal{O}(K, \tau) = t - \lim_{\rightarrow} (\mathcal{H}^\infty(\Omega_n)))$. D'après le théorème 2.1, $(\mathcal{O}(K, E), \tau)$ est une *a.l.m.c.* D'après le corollaire 2.2, $\mathcal{B}_{(\mathcal{O}(K, E), \tau)}$ est une *a.b.m.c.*

2) Si (A, τ) est une algèbre non nécessairement commutative, somme directe localement convexe d'une famille dénombrable d'algèbres normées ou d'algèbres limites inductives de suites d'algèbres normées, alors (A, τ) est une *a.l.m.c.* et $\mathcal{B}_{(A, \tau)}$ est une *a.b.m.c.*; ceci car de telles sommes directes se ramènent à des limites inductives de suites d'algèbres normées.

3. – Un exemple d'algèbre limite inductive localement convexe d'algèbres de Banach qui n'est pas une *a.l.m.c.*

La plupart des algèbres limites inductives localement convexes d'algèbres de Banach qu'on rencontre en analyse sont des *a.l.m.c.* L'exemple typique est l'algèbre $\mathcal{K}(X, E)$ des fonctions continues sur un espace localement compact X , à support compact, à valeurs dans une algèbre de Banach E , qu'on munit de la topologie limite inductive localement convexe des sous-algèbres de Banach de fonctions à support dans un compact K fixé de X . D'après ([17], exemple 7), $\mathcal{K}(X, E)$

est une *a.l.m.c.* Ce n'est pas toujours le cas, comme le montre l'exemple suivant:

Soit $(A, \mathfrak{C})$ une *a.l.c.* métrisable, unitaire d'unité e , et telle que $\mathfrak{C}$ ne se réduit pas à la topologie d'un espace normé. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de semi-normes sur A définissant la topologie $\mathfrak{C}$; on peut choisir cette suite de semi-normes telle que $p_n(e) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ p_n soit non équivalente à p_{n+1} ; ceci est possible d'après notre hypothèse τ ne se réduit pas à une algèbre normée. Soit $A^{(\mathbb{N})}$ l'algèbre des suites d'éléments de A qui sont nuls à partir d'un certain rang, qu'on munit des semi-normes suivantes:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (\forall \Psi = (\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A^{(\mathbb{N})}), \quad q_n(\Psi) = \sup_{i \in \mathbb{N}} [p_n(\Psi_i)].$$

Pour $i \in \mathbb{N}$, soit A^i l'algèbre naturelle produit $i + 1$ fois de l'algèbre A . On identifie A^i à l'idéal de $A^{(\mathbb{N})}$ formé par les suites d'éléments de A qui sont nuls à partir du rang $i + 1$; après cette identification on a $A^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i$; $(A^{(\mathbb{N})}, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et $(A^i, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ ($i \in \mathbb{N}$) sont des *a.l.c.* métrisables non unitaires. On pose $(A^{(\mathbb{N})}, \tau_0) = \bigcup_t (A^i, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})_{i \in \mathbb{N}}$, alors $(A^{(\mathbb{N})}, \tau_0)$ est une *a.l.c.* car c'est une limite inductive localement convexe d'*a.l.c.*

Sur l'*e.l.c.* produit $A^{(\mathbb{N})} \times A$ on définit le produit suivant:

$$(\forall \Psi = (\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A^{(\mathbb{N})}) \quad (\forall \chi = (\chi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A^{(\mathbb{N})}) \quad (\forall a, b \in A)$$

$$(\Psi, a)(\chi, b) = (\Psi\chi + \Psi b + a\chi, ab) \quad \text{où } \Psi b = (\Psi_i b)_{i \in \mathbb{N}} \text{ et } a\chi = (a\chi_i)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Avec cette multiplication, $A^{(\mathbb{N})} \times A$ (resp. $A^i \times A$ ($i \in \mathbb{N}$)) est une algèbre complexe unitaire d'unité $(0, e)$. Dans toute la suite $A^{(\mathbb{N})} \times A$ (resp. $A^i \times A$ ($i \in \mathbb{N}$)) sera muni de cette structure d'algèbre. On pose:

$$(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1) = (A^{(\mathbb{N})}, \tau_0) \times (A, \mathfrak{C})$$

$$(\text{resp. } (A^i \times A, \tau_{1,i}) = (A^i, (q_n)_{n \in \mathbb{N}}) \times (A, \mathfrak{C})).$$

REMARQUE. L'étude qu'on fera dans la suite avec $A^{(\mathbb{N})}$ peut être faite également avec l'algèbre $\mathcal{K}(\mathbb{R}, A)$ (resp. $D_k(\mathbb{R}, A)$) des fonctions continues (resp. k -fois dérivables) sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans A , à support compact, munie de la topologie τ_0 limite inductive stricte définie par les *a.l.c.* de Fréchet $(\mathcal{K}([-i, i], A))_{i \geq 1}$ ((resp. $(D_k([-i, i], A))_{i \geq 1}$) des fonctions de $\mathcal{K}(\mathbb{R}, A)$ (resp. de $D_k(\mathbb{R}, A)$) à support dans $[-i, i]$.

PROPOSITION 3.1. $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$ (resp. $(A^i \times A, \tau_{1,i})$) est une a.l.c. (resp. une a.l.c. métrisable).

PREUVE. On sait ([6], 2, proposition 5) que pour qu'une application linéaire f d'une limite inductive localement convexe $(E, \tau) = t - \lim_{\rightarrow} ((E_i, \tau_i), f_i)_{i \in I}$ dans un e.l.c. quelconque F soit continue, il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, $f \circ f_i$ soit continue. Il suffit donc de montrer que:

$$(\forall j \in \mathbb{N}) (\forall \chi(\chi_l)_{l \in \mathbb{N}} \in A^j) (\forall b \in A) (\forall i \in \mathbb{N})$$

les applications suivantes: $(\Psi_l)_{l \in \mathbb{N}} \rightarrow (b\Psi_l)_{l \in \mathbb{N}}$ et $(\Psi_l)_{l \in \mathbb{N}} \rightarrow (\Psi_l b)_{l \in \mathbb{N}}$ de $(A^i, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ dans $(A^i, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et $a \rightarrow (a\chi_l)_{l \in \mathbb{N}}$ et $a \rightarrow (\chi_l a)_{l \in \mathbb{N}}$ de $(A, \mathfrak{T})$ dans $(A^j, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ sont continues. Ce qui est vrai car $(A, \mathfrak{T})$ est une a.l.c. et pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, $(A^i, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et $(A^j, (q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ le sont également.

PROPOSITION 3.2. L'application $(a, \Psi) \rightarrow a\Psi$ de $(A, \mathfrak{T}) \times (A^{(\mathbb{N})}, \tau_0)$ dans $(A^{(\mathbb{N})}, \tau_0)$ est une application non continue.

PREUVE. La démonstration est directe. Puisque cette application est bilinéaire il suffit de montrer qu'elle n'est pas continue en $(0, 0)$.

Soit $W = \text{conv} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i \right)$ où pour tout $i \in \mathbb{N}$, $W_i = \{ \Psi \in A^i : q_i(\Psi) \leq 1/2^{i+1} \}$; alors W est un voisinage de 0 dans $(A^{(\mathbb{N})}, \tau_0)$. Nous allons montrer que si $U\{a \in A : p_s(a) < \varepsilon\}$ est un voisinage quelconque de 0 dans $(A, \mathfrak{T})$, et si $V = \text{conv} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ où pour tout $i \in \mathbb{N}$, $V_i = \{ \Psi \in A^i : q_{n_i}(\Psi) < \varepsilon_i \}$ est un voisinage quelconque de 0 dans $(A^{(\mathbb{N})}, \tau_0)$, alors UV n'est pas contenu dans W . Soit $a \in A$ tel que $p_s(a) < \varepsilon/2$ et $p_{s+1}(a)(\varepsilon_s + 1)/2 > 2$, a existe car les semi-normes p_s et p_{s+1} ne sont pas équivalentes. Soit $\Psi = (\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A^{s+1}$ telle que, $\Psi_i = 0$ pour $i \geq s+2$, et $\Psi_i = ((\varepsilon_s + 1)/2)e$ pour $i \leq s+1$. On a $\Psi \in A^{s+1}$ et $q_{n_{s+1}}(\Psi) = (\varepsilon_s + 1)/2 < \varepsilon_{s+1}$, donc $\Psi \in V_{s+1} \subset V$. Alors $a\Psi \notin W$; en effet, dans le cas contraire on aura $a\Psi = \sum_{l=1}^p \alpha_l w_{i_l} + \alpha_r w_{i_r}$, avec $w_{i_l} \in W_{i_l}$ pour $1 \leq l \leq r$ et $\sum_{l=1}^p \alpha_l = 1$. On aura d'une part $p_{s+1}(a\Psi_{s+1})(\varepsilon_{s+1}/2)p_{s+1}(a) > 2$; et d'autre part $p_{s+1}(w_{i_{s+1}}) = 0$ si $i_l \leq s$, et $p_{s+1}(w_{i_{s+1}}) \leq p_{i_l}(w_{i_{s+1}}) \leq 1/2^{i_l+1}$ si $i_l \geq s+1$, par suite $p_{s+1}(a\Psi_{s+1}) \leq \sum_{i=0}^{\infty} 1/2^{i+1} \leq 2$; d'où une contradiction.

COROLLAIRE 3.3. La multiplication dans $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$ n'est pas continue.

PREUVE. Si la multiplication est continue dans $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$, sa restriction à l'espace

$$(\{0\} \times A) \times (A^{(\mathbb{N})} \times \{0\})$$

serait continue, ce qui n'est pas le cas d'après la proposition 3.2.

REMARQUE. On verra dans la suite que la multiplication dans $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$ est bornée.

PROPOSITION 3.4. *On suppose en outre que $(A, \mathfrak{T})$ est une Q -algèbre topologique; alors $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$ et $(A^i \times A, \tau_{1,i})$ ($i \in \mathbb{N}$) sont des Q -algèbres topologiques.*

PREUVE. Puisque la topologie τ_0 est plus fine que la topologie définie par les semi-normes q_n ($n \in \mathbb{N}$) sur $A^{(\mathbb{N})}$, il suffit de montrer que l'a.l.c. $(A^{(\mathbb{N})}, (q_n)_{n \in \mathbb{N}}) \times (A, \mathfrak{T})$ est une Q -algèbre topologique. $(A, \mathfrak{T})$ étant une Q -algèbre topologique, on a

$$(\exists n \geq 1) (\exists \varepsilon > 0) \quad \{a \in A: p_n(a - e) < \varepsilon\} \subset A^*.$$

Soit

$$V = \left\{ \Psi \in A^{(\mathbb{N})}: q_n(\Psi) < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \times \left\{ a \in A: p_n(a - e) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Alors V est un voisinage de $(0, e)$ dans $(A^{(\mathbb{N})}, (q_n)_{n \in \mathbb{N}}) \times (A, \mathfrak{T})$ et $V \subset (A^{(\mathbb{N})} \times A)^*$. On a aussi $V \cap (A^i \times A)$ est un voisinage de $(0, e)$ dans $(A^i \times A, \tau_{1,i})$, et $V \cap (A^i \times A) \subset (A^i \times A)^*$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

PROPOSITION 3.5. *On suppose en outre que $(A, \mathfrak{T})$ est une a.l.m.c. complète et une Q -algèbre topologique; alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$. $(A^i \times A, \tau_{1,i})$ est une algèbre Q - $\mathcal{F}$, et $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$ est une algèbre Q - $\mathcal{LF}$ stricte, complète, qui n'est pas une a.l.m.c.*

PREUVE. On peut choisir sur A une suite croissante $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de semi-normes définissant la topologie $\mathfrak{T}$, et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $p_n(e) = 1$, p_n non équivalente à p_{n+1} , et $p_n(xy) \leq p_n(x)p_n(y)$ pour tout $x \in A$ et $y \in A$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(A^i \times A, \tau_{1,i})$ est une a.l.c. métrisable d'après la proposition 3.1; elle est complète car c'est un produit d'espaces complets; elle est une a.l.m.c. car

$$(\forall \Psi, \chi \in A^{(\mathbb{N})}) (\forall a, b \in A) (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$q_n(\Psi\chi + a\chi + \Psi b) + p_n(ab) \leq (q_n(\Psi) + p_n(a))(q_n(\chi) + p_n(b));$$

d'après la proposition 3.4, elle est une Q -algèbre topologique; donc c'est

une algèbre $Q\mathcal{F}$; et il est clair que la topologie induite par $\tau_{1,i+1}$ sur $A^i \times A$ est identique à $\tau_{1,i}$ de sorte que $\bigcup_i (A^i \times A, \tau_{1,i})_{i \in \mathbb{N}}$ est une limite inductive stricte d'algèbres $Q\mathcal{F}$, et donc elle est complète. D'autre part $A^{(\mathbb{N})} \times A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i \times A$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'injection canonique de $(A^i \times A, \tau_{1,i})$ dans $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$ est continue, donc l'application identique $\mathfrak{J}$ de $\bigcup_i (A^i \times A, \tau_{1,i})_{i \in \mathbb{N}}$ dans $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$ est continue. $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$ est un espace bornologique et complet car c'est un produit de deux espaces vérifiant ces deux propriétés; donc c'est un espace strictement bornologique au sens de ([9], p. 199); d'après ([9], chap.4, théorème 2), l'application $\mathfrak{J}$ est ouverte et donc elle est bicontinue. D'après la proposition 3.4, $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$ est aussi une Q -algèbre topologique. On déduit que $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1) = \bigcup_i (A^i \times A, \tau_{1,i})_{i \in \mathbb{N}}$, donc c'est une algèbre $Q\mathcal{LF}$ stricte, complète, et ce n'est pas une *a.l.m.c.* car la multiplication n'y est pas continue d'après le corollaire 3.3.

REMARQUES. 1) La multiplication dans chaque $(A^i \times A, \tau_{1,i})$ est continue donc bornée; comme la limite inductive est stricte, tout borné de $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau)$ est un borné d'un espace $(A^i \times A, \tau_{1,i})$; on déduit que la multiplication dans $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_{1,i})$ est bornée.

2) La proposition 3.5 montre que le résultat du théorème 2.1 n'est plus vrai dans le cas d'une limite inductive localement convexe d'une suite algèbres de Fréchet; et ceci même dans le cas commutatif.

3) La proposition 3.5 montre que dans le cas commutatif, une limite inductive localement convexe stricte d'une suite d'*a.l.c.* métrisables complètes à inverses continus au sens de ([16], chap. 5, § 3), n'est pas toujours une algèbre à inverse continu.

Cas commutatif.

PROPOSITION 3.6. *On suppose en outre que $(A, \mathcal{C})$ est commutative, complète, et une Q -algèbre topologique; alors $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$ est une algèbre commutative, réunion filtrante croissante localement convexe d'une famille non dénombrable d'algèbres de Banach qui n'est pas une *a.l.m.c.**

PREUVE. Il est clair que les algèbres $A^{(\mathbb{N})} \times A$ et $A^i \times A$ ($i \in \mathbb{N}$) sont commutatives.

D'après ([16], chap. 7, proposition 3), pour tout $i \in I$ $(A^i \times A, \tau_{1,i})$ est une *a.l.m.c.* D'après la proposition 3.5, $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1) = \bigcup_i (A^i \times A, \tau_{1,i})_{i \in \mathbb{N}}$, avec pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(A^i \times A, \tau_{1,i})$ est une algèbre $Q\mathcal{F}$, et

la limite inductive est stricte. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{B}_i$ la famille des parties convexes, équilibrées, fermées, bornées, idempotentes de $(A^i \times A, \tau_{1,i})$; et pour $B \in \mathcal{B}_i$, soit $\mathcal{A}_B$ la sous-algèbre de $A^i \times A$ engendrée par B , qu'on munit de sa jauge p_B ; alors $(\mathcal{A}_B, p_B)$ est une algèbre de Banach. D'après ([5], proposition 16), pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(A^i \times A, \tau_{1,i}) = \bigcup_t (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}_i}$. Soit $\mathcal{B}_\infty$ la famille des parties convexes, équilibrées, fermées, bornées, idempotentes de $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$, puisque la limite inductive des algèbres complètes $(A^i \times A, \tau_{1,i})$ est stricte, d'après ([7], théorème 8), $\mathcal{B}_\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i$, et le système $((\mathcal{A}_B, p_B))_{B \in \mathcal{B}_\infty}$ est un système inductif de $(A^{(\mathbb{N})} \times A)$. On a d'une part, pour tout $B \in \mathcal{B}_\infty$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $B \in \mathcal{B}_i$, et donc les injections canoniques $(\mathcal{A}_B, p_B) \rightarrow (A^i \times A, \tau_{1,i}) \rightarrow (A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$ sont continues ainsi que leurs composées, par suite l'application identique

$$\bigcup_t (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}_\infty} \rightarrow (A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$$

est continue ([6], 2, proposition 5); d'autre part, pour tout $i \in \mathbb{N}$, les injections canoniques

$$(A^i \times A, \tau_{1,i}) \rightarrow \bigcup_t (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}_i} \rightarrow \bigcup_t (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}_\infty}$$

sont continues et donc leur composée aussi, par suite l'application identique

$$(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1) \rightarrow \bigcup_t (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}_\infty}$$

est continue ([6], 2, Proposition 5); on déduit que $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1) = \bigcup_t (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}_\infty}$; et cette algèbre n'est pas une *a.l.m.c.* d'après la proposition 3.5; et d'après le théorème 2.1 la famille $\mathcal{B}_\infty$ ne peut pas être dénombrable.

REMARQUES. 1) Comme exemple d'algèbres $(A, \mathfrak{C})$ dans ce cas commutatif, on a:

(i) l'*e.l.c.* produit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres complexes, muni du produit de convolution. C'est une algèbre locale.

(ii) l'algèbre $\mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{C})$ des fonctions indéfiniment différentiables sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, munie de la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de toutes leurs dérivées sur $[0, 1]$. C'est une algèbre semi-simple.

2) Dans ce cas commutatif, on a d'après ([5], proposition 10), l'application $x \rightarrow x^{-1}$ de A^* dans A^* n'est pas continue.

Cas non nécessairement commutatif.

Utilisant un résultat de [8], on montre dans [14], que l'a.b.m.c. $\mathcal{B}(E)$ de [2], des opérateurs fortement bornés d'un espace de Fréchet non normable E , répond négativement à la question (**) dans le cas non commutatif. Nous allons voir dans ce qui suit, que notre exemple s'adapte aussi dans le cas non commutatif. Pour avoir une proposition analogue à la proposition 3.6 dans le cas non commutatif, il suffit d'avoir dans ce cas, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(A^i \times A, \tau_{1,i}) = \bigcup_t (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}_i}$ sans utiliser la proposition 16 de [5], dont le résultat est ignoré dans le cas non commutatif. Nous allons montrer que ceci est vrai dans le cas particulier suivant qui est une généralisation de l'exemple (ii) de la remarque précédente.

Soit $A = C^\infty([0, 1], E)$ l'algèbre des fonctions indéfiniment différentiables sur $[0, 1]$, à valeurs dans une algèbre de Banach unitaire $(E, \|\cdot\|)$, d'unité e , munie de la topologie $\mathcal{T}$ de la convergence uniforme des fonctions et de toutes leurs dérivées sur $[0, 1]$; $\mathcal{T}$ est définie sur A par la suite des semi-normes telles que:

$$(\forall f \in A) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad p_n(f) = \sup_{t \in [0, 1]} \|f^{(n)}(t)\|.$$

Il est facile de voir que $(A, \mathcal{T})$ est une algèbre $Q\mathcal{F}$, et on convient de noter aussi e son élément unité. On désignera par $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties convexes équilibrées bornées fermées idempotentes de $(A, \mathcal{T})$.

LEMME 3.7. Soit $B\{f_i, i \in I\}$ une partie bornée de $(A, \mathcal{T})$ telle que $M_0 = p_0(B) \leq \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < 1$; et soit

$$D = \left\{ h \prod_{j=1}^k f_{i_j}, k \in \mathbb{N}^*, f_{i_j} \in B, \forall 1 \leq j \leq k \right\};$$

alors D est une partie bornée idempotente de $(A, \mathcal{T})$ qui contient B .

PREUVE. Il est clair que D est idempotente et qu'elle contient B . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $M_n = p_n(B)$; puisque B est borné, $M_n < +\infty$. D est bornée si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\sup_{t \in [0, 1], h \in D} \|h^{(n)}(t)\| < +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, il suffit de montrer que cette borne supérieure existe pour les éléments $h \prod_{j=1}^k f_{i_j} \in D$ tels que $k > n$; soit h un tel élément,

on a

$$h^{(n)}(t) = \sum_{r_0 = n \geq r_1 \geq \dots \geq r_{k-1} \geq 0} C_n^{r_1} C_{r_1}^{r_2} \dots C_{r_{k-2}}^{r_{k-1}} f_{i_1}^{(n-r_1)} \dots f_{i_{k-1}}^{(r_{k-2}-r_{k-1})} f_{i_k}^{(r_{k-1})}.$$

Puisqu'on dérive n fois et $k > n$, on a pour tout $t \in [0, 1]$

$$\|f_{i_1}^{(n-r_1)}(t) \dots f_{i_{k-1}}^{(r_{k-2}-r_{k-1})}(t) f_{i_k}^{(r_{k-1})}(t)\| \leq [\sup(M_1, \dots, M_n)]^n \varepsilon^{k-n}.$$

Il suffit alors de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sup_{k > n} \left[\varepsilon^{k-n} \sum_{r_0 = n \geq r_1 \geq \dots \geq r_{k-1} \geq 0} C_n^{r_1} C_{r_1}^{r_2} \dots C_{r_{k-2}}^{r_{k-1}} \right] < +\infty.$$

Nous allons montrer cette propriété par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, $S_0 = \sup_{k > 0} (\varepsilon^k) < +\infty$ car $0 < \varepsilon < 1$.

Pour $n = 1$, $S_1 = \sup_{k > 1} (k\varepsilon^k) < +\infty$ car $\lim_{k \rightarrow +\infty} k\varepsilon^{k-1} = 0$.

Supposons la propriété vraie jusqu'à la valeur n .

Soit $k > n + 1$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon^{k-(n+1)} &= \sum_{r_0 = n+1 \geq r_1 \geq \dots \geq r_{k-1} \geq 0} C_{n+1}^{r_1} \dots C_{r_{k-2}}^{r_{k-1}} \leq \\ &\leq \varepsilon^{-1} \sum_{s=0}^{n+1} C_{n+1}^s \left[\varepsilon^{k-n} \sum_{r_0 = n \geq r_1 \geq \dots \geq r_{k-1} \geq 0} C_n^{r_1} \dots C_{r_{k-2}}^{r_{k-1}} \right]. \end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure sur $k > n + 1$, on obtient:

$$S_{n+1} \leq \varepsilon^{-1} 2^{n+1} S_n$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, on a $S_{n+1} < +\infty$.

PROPOSITION 3.8. $\mathcal{B}_{(A, \mathfrak{T})}$ (resp. $\mathcal{B}_{(A^i \times A, \tau_{1,i})}$ ($i \in \mathbb{N}$)) est une a.b.m.c. unitaire complète.

PREUVE.

Cas de (A, τ) .

Soient B une partie bornée de $(A, \mathfrak{T})$ et $M_0 = p_0(B)$; $B' = (1/2M_0)B$ est une partie bornée de $(A, \mathfrak{T})$ et $M'_0 p_0(B') < 1$; d'après le lemme 3.7, il existe une partie bornée et idempotente D de $(A, \mathfrak{T})$ telle que $B' \subset D$. On peut prendre D convexe équilibrée et fermée, car l'enveloppe convexe équilibrée fermée d'une partie bornée et idempotente vérifie aussi ces propriétés; on a alors $B \subset 2M_0 B' \subset 2M_0 D$. Ainsi tout borné de $(A, \mathfrak{T})$ est absorbé par une partie bornée idempotente convexe équilibrée.

brée D qui est telle que (A_D, p_D) est une algèbre de Banach ([3], proposition (2.6)); et comme la multiplication est bornée car on est dans une algèbre de Fréchet, on déduit que $\mathcal{B}_{(A, \mathcal{T})}$ est une *a.b.m.c.* complète, et que $\mathcal{B}_{(A, \mathcal{T})} = \bigcup_b (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}}$.

Cas de $(A^i \times A, \tau_{1,i})$ ($i \in \mathbb{N}$).

Il suffit de montrer que tout borné de cette algèbre de la forme $B^i \times B$, où B est un borné de $(A, \mathcal{T})$, est absorbé par une partie bornée idempotente; car les bornés de cette forme constituent une base de bornologie de $\mathcal{B}_{(A^i \times A, \tau_{1,i})}$. Soit B un borné de $(A, \mathcal{T})$, d'après le lemme 3.7, il existe une partie bornée idempotente convexe équilibrée fermée D de $(A, \mathcal{T})$, et un réel $\alpha > 0$, tels que $B \subset \alpha D$; alors $D^i \times D$ est une partie bornée idempotente convexe équilibrée fermée de $(A^i \times A, \tau_{1,i})$, et on a $B^i \times B \subset \alpha^i D^i \times D$. D'après la proposition 3.5 $(A^i \times A, \tau_{1,i})$ est une algèbre $Q\mathcal{F}$; on a alors la même conclusion que dans le cas de $(A, \mathcal{T})$, avec $\mathcal{B}_{(A^i \times A, \tau_{1,i})} = \bigcup_b (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}_i}$.

PROPOSITION 3.9. *Si $(A, \mathcal{T}) = (C^\infty([0, 1], E), (p_n)_{n \in \mathbb{N}})$, alors $(A^{(\mathbb{N})} \times A, \tau_1)$ est une algèbre non nécessairement commutative, réunion filtrante croissante localement convexe d'une famille non dénombrable d'algèbres de Banach, qui n'est pas une *a.l.m.c.**

PREUVE. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $B \in \mathcal{B}_i$, le morphisme canonique $(\mathcal{A}_B, p_B) \rightarrow (A^i \times A, \tau_{1,i})$ est continu, donc l'application identique $\bigcup_t (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}_i} \rightarrow (A^i \times A, \tau_{1,i})$ est continue. Réciproquement, l'application identique $(A^i \times A, \tau_{1,i}) \rightarrow \bigcup_b (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}_i}$ est bornée d'après la Proposition 3.8, et l'application identique $\bigcup_b (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}_i} \rightarrow \bigcup_t (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}_i}$ est trivialement bornée, donc leur composée, c'est-à-dire l'application identique $(A^i \times A, \tau_{1,i}) \rightarrow \bigcup_t (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}_i}$ est bornée; et d'après ([12], (3), p.381) cette dernière application est continue. Ainsi pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(A^i \times A, \tau_{1,i}) = \bigcup_t (\mathcal{A}_B, p_B)_{B \in \mathcal{B}_i}$, égalité algébrique et topologique. On applique alors la démonstration de la Proposition 3.6.

REMARQUE. L'étude qu'on vient de faire avec $(A, \mathcal{T}) = (C^\infty([0, 1], E), (p_n)_{n \in \mathbb{N}})$, peut aussi être faite avec l'*e.l.c.* produit $A = E^\mathbb{N}$ des suites d'éléments d'une algèbre de Banach unitaire $(E, \|\cdot\|)$, qu'on munit du produit de convolution des suites.

4. - Remarques et compléments.

1) Toutes les algèbres limites inductives localement convexes d'algèbres normées (A, τ) , qu'on a étudiées, sont telles que $\mathcal{B}_{(A, \tau)}$ est une *a.b.m.c.*, d'où la question de savoir si ceci est toujours vrai. Nous avons vu au paragraphe 2, que ceci est toujours vrai dans le cas où l'ensemble I des indices du système inductif est dénombrable, et nous le montrons aussi dans le cas particulier suivant inspiré de la proposition 2 de [17].

PROPOSITION 4.1. *Soient $(A, \|\cdot\|)$ une algèbre normée, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous algèbres de A , munie chacune de la topologie induite par celle de A et telles que $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Soit τ la topologie localement convexe sur A la plus fine rendant continues les injections canoniques $A_i \rightarrow A$; alors (A, τ) est une *a.l.m.c.*, et $\mathcal{B}_{(A, \tau)}$ est une *a.b.m.c.*, dans le cas où pour tout $i \in I$ A_i est un idéal de A .*

PREUVE. (A, τ) est une *a.l.m.c.* d'après la proposition 2 de [17], donc la multiplication y est bornée. Soit D la boule unité de $(A, \|\cdot\|)$. L'application identique $\mathcal{B}_{(A, \tau)} \rightarrow (A, \|\cdot\|)$ est bornée donc, si $B \in \mathcal{B}_{(A, \tau)}$, alors B est borné dans $(A, \|\cdot\|)$ et par suite il existe $\gamma > 0$ tel que $B \subset \gamma D$. Soit $B' = B/\gamma \subset D$; nous allons montrer que l'enveloppe idempotente $\text{idem}(B)$ de B est bornée dans (A, τ) ; on aura alors $B/\gamma \subset \text{idem}(B)$ ou $B \subset \gamma(\text{idem}(B))$ avec $\text{idem}(B)$ un idempotent de $\mathcal{B}_{(A, \tau)}$, qui est le résultat cherché. Soit $V = \text{conv} \left(\bigcup_{i \in I} (\varepsilon_i D \cap A_i) \right)$ un voisinage de 0 dans (A, τ) , avec $\varepsilon_i < 1$ pour tout $i \in I$, alors il existe $\beta > 0$ tel que $B \subset \beta V$. Nous allons montrer que $\text{idem}(B) \subset \beta V$, c'est-à-dire $B'^n \subset \beta V$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car $\text{idem}(B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B'^n$. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B'^n$, on a $x_1 \in \beta V$ donc $x_1 = \beta v$ avec $v = \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} a_{ij}$ et $\sum_{j=1}^s \alpha_{ij} \leq 1$; d'où $x_1 x_2 \dots x_n = \beta \sum_{j=1}^s (\alpha_{ij} a_{ij} x_2 \dots x_n)$; or pour tout $1 \leq j \leq s$, on a $a_{ij} x_2 \dots x_n \in \varepsilon_{ij} (D \cap A_{ij})$, car les A_{ij} sont des idéaux de A et $\|x_k\| \leq 1$ ($2 \leq k \leq n$) puisqu'on a $B' \subset D$; on déduit que $x_1 x_2 \dots x_n \in \beta V$.

EXEMPLE. Soient X un espace localement compact et $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre normée. On considère l'algèbre $\mathcal{K}(X, E)$ des fonctions continues sur X , à support compact, à valeurs dans E , qu'on munit de la topologie τ limite inductive stricte définie par les algèbres normées $\mathcal{K}_0(K, E)$ des éléments de $\mathcal{K}(X, E)$ à supports dans K , où K parcourt l'ensemble des parties compactes de X . Pour tout compact K de X , $\mathcal{K}_0(K, E)$ est un idéal de $\mathcal{K}(X, E)$; d'après la Proposition 4.1, $(\mathcal{K}(X, E), \tau)$ est une *a.l.m.c.* et $\mathcal{B}_{(\mathcal{K}(X, E), \tau)}$ est une *a.b.m.c.*

2) Dans [14], on trouve une affirmation fausse disant que dans [5] Arosio a répondu à sa question dans le cas où l'ensemble des indices I du système inductif est totalement ordonné; en fait, on ne connaît pas de réponse à cette question dans ce cas là. Le (2) de la proposition 2 de [17] est un cas particulier de cette situation, mais dans ce cas particulier on peut aussi répondre avec la proposition 12 de [5]; comme exemples qui illustrent ce cas on peut citer l'Exemple 8 de [17] qui est une $a.l.m.c.$, ou l'exemple du paragraphe 14 de [7], qui se réduit même à une algèbre de Banach

3) Les contre-exemples qui ont été donnés pour répondre à la question (**) de [5], sont en fait des exemples d'algèbres à multiplications non continues; d'où la question de savoir si on a une réponse en supposant en plus que les limites inductives sont à multiplications continues.

En définitive les trois questions suivantes restent sans réponses, si $(A, \tau) = \bigcup_t (A_i, |||_i)_{i \in I}$ est une limite inductive localement convexe d'une famille d'algèbres normées, alors:

1) $\mathcal{B}_{(A, \tau)}$ est-elle toujours une $a.b.m.c.$?

2) (A, τ) est-elle une $a.l.m.c.$ dans le cas où I est totalement ordonné?

3) (A, τ) est-elle toujours une $a.l.m.c.$ dans le cas où elle est à multiplication continue?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. AKKAR, *Etude spectrale et structure d'algèbres topologiques et bornologiques complètes*, Thèse Sc. Math. Université de Bordeaux 1 (1976).
- [2] M. AKKAR, *Sur la théorie spectrale des opérateurs fortement bornés dans les espaces vectoriels topologiques*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, 274 (1972), pp. 1805-1808.
- [3] G. R. ALLAN, *A spectral theory for locally convex algebras*, Proc. London Math. Soc. (3), 15 (1965), pp. 399-421.
- [4] G. R. ALLAN - H. G. DALES - J. P. MCLURE, *Pseudo-Banach algebras*, Studia Math., 40 (1971), pp. 55-69.
- [5] A. AROSIO, *Locally convex inductive limits of normed algebras*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 51 (1974), pp. 333-359.
- [6] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres I à V, Edition Masson (1981).
- [7] J. DIEUDONNÉ - L. SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces (F) et (LF)* , Ann. Inst. Fourier, 1 (1950), pp. 61-101.

- [8] J. ESTERLE, *Sur la non métrisabilité de certaines algèbres d'opérateurs*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **24**, no. 8 (1979), pp. 1157-1164.
- [9] A. GROTHENDIECK, *Espaces vectoriels topologiques*, 3a Edicao Societate de Mathematica de S. Paulo (1964).
- [10] H. HOGBE-N'LEND, *Les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques*, Bol. Soc. Brasi. Mat., **3** (1972), pp. 19-56.
- [11] H. HOGBE-N'LEND, *Les fondements de la bornologie moderne I*, Départ. Math. Université de Bordeaux 1 (1970).
- [12] G. KÖTHE, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, tome 1 (1969).
- [13] E. A. MICHAEL, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., no. 11, Providence (1952).
- [14] M. OUDADESS, *Inductive limits of normed algebras and m -convex structures*, Proc. Amer. Math. Soc., **109**, no. 2 (1990).
- [15] M. RAOUYANE, *Algèbres pseudo-Banach normalisées*, Bull. Soc. Math. Belg., **38**, no. 1 (1986), pp. 39-46.
- [16] L. WAELEBROECK, *Topological vector spaces and algebras*, Lecture Notes in Mathematics, **230**, Springer-Verlag (1971).
- [17] S. WARNER, *Inductive limits of normed algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **82** (1956), pp. 190-216.
- [18] W. ZELAZKO, *Selected topics in topological algebras*, Lectures Notes, Serie no. 31 sep. 1971, Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus.
- [19] W. ZELAZKO, *Banach Algebras*, Elsevier Publishing Company (1973).

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 maggio 1994
e, in forma revisionata, il 10 gennaio 1995.