

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

BERNARD LE STUM

**Filtration par le poids sur la cohomologie de de
Rham d'une courbe projective non singulière
sur un corps ultramétrique complet**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 93 (1995), p. 43-85

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1995__93__43_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Filtration par le poids sur la cohomologie de de Rham d'une courbe projective non singulière sur un corps ultramétrique complet.

BERNARD LE STUM(*)

Introduction.

Soient K un corps ultramétrique complet algébriquement clos de caractéristique nulle et C une courbe projective non-singulière sur K . Dans cet article, nous allons construire et étudier la filtration par le poids sur $H_{dR}^1(C)$.

C'est une filtration à trois crans fonctorielle en C ,

$$\mathrm{Fil}^3 = 0 \subset \mathrm{Fil}^2 \subset \mathrm{Fil}^1 \subset \mathrm{Fil}^0 = H_{dR}^1(C)$$

ayant les propriétés suivantes:

— Elle est autoduale: Fil^1 est l'orthogonale à Fil^2 pour la dualité de Poincaré sur $H_{dR}^1(C)$ (et réciproquement).

— Elle est transverse à la filtration de Hodge: Si on considère $\Gamma(C, \Omega^1)$ comme contenu dans $H_{dR}^1(C)$ on a

$$\mathrm{Fil}^2 \cap \Gamma(C, \Omega^1) = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathrm{Fil}^1 + \Gamma(C, \Omega^1) = H_{dR}^1(C).$$

— Elle dédouble la filtration analytique conjuguée: Si on considère $H^1(C^{\mathrm{an}}, K)$ comme contenu dans $H_{dR}^1(C^{\mathrm{an}}) = H_{dR}^1(C)$, on a $\mathrm{Fil}^2 = H^1(C^{\mathrm{an}}, K)$.

Nous allons en fait définir pour tout modèle formel géométriquement réduit $\mathcal{X}$ de C , la filtration par le poids associée à $\mathcal{X}$ sur $H_{dR}^1(C)$. Nous verrons que cette filtration est maximale et indépendante de $\mathcal{X}$

(*) Indirizzo dell'A.: I.R.M.A.R., Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.

lorsque (la fibre spéciale X de) $\mathcal{X}$ est à singularités ordinaires. C'est cette dernière filtration que nous appellerons filtration par le poids sur $H_{dR}^1(C)$.

La filtration par le poids associée à $\mathcal{X}$ est aussi une filtration à trois crans sur $H_{dR}^1(C)$ qui est fonctorielle en $\mathcal{X}$ et satisfait un théorème d'orthogonalité. Cette filtration peut se décrire de manière élémentaire comme suit: Fil^1 est l'intersection des noyaux des applications canoniques $H_{dR}^1(C) \rightarrow H_{dR}^1([x])$, pour $x \in \mathcal{X}$ et Fil^2 est l'intersection de Fil^1 et de la somme des images des applications canoniques $H_{dR, c}^1([x]) \rightarrow H_{dR}^1(C)$, pour $x \in \mathcal{X}$.

On peut aussi décrire cette filtration à l'aide de la cohomologie rigide de X . En effet, l'homomorphisme de spécialisation $\text{sp}: H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{dR}^1(C)$ est une bijection sur Fil^1 . On peut aussi voir que si U est un ouvert dense de X , alors Fil^1 est l'image de l'application de spécialisation $\text{sp}: H_{\text{rig}, c}^1(U) \rightarrow H_{dR}^1(C)$. De plus, $\text{sp}: H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{dR}^1(C)$ induit un isomorphisme entre Fil^2 et le noyau de l'application de restriction $H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(U)$. Enfin, on peut aussi voir Fil^2 comme l'intersection de Fil^1 avec le noyau de l'homomorphisme de cospécialisation $\text{cos}: H_{dR}^1(C) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(U)$.

Dans cet article, nous allons aussi décrire le gradué associé à la filtration par le poids. On a bien sur $\text{Gr}^k = 0$ si $k \neq 0, 1, 2$ et $\text{Gr}^2 = \text{Fil}^2$ et nous verrons que si $\tilde{X}$ est la normalisée de X , l'application canonique $H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(\tilde{X})$ fournit un isomorphisme entre Gr^1 et $H_{\text{rig}}^1(\tilde{X})$. Enfin, nous définirons un foncteur qui à toute courbe X sur k associe un groupe abélien libre de rang fini $H_1(X)$ et nous montrerons que si $\mathcal{X}$ est à singularités ordinaires, $H_1(X)$ est en dualité naturelle avec $H^1(C^{\text{an}}, \mathbb{Z})$, ce qui nous fournira, dans ce cas, un isomorphisme naturel entre Gr^0 et $H_1(X) \otimes K$.

Cet article fait suite à [LS1] où on construisait la filtration par le poids sur la cohomologie de de Rham d'une variété abélienne sur un corps local et reprend toute la seconde partie de [LS2]. Les progrès effectués depuis cette thèse de Ph.D., dirigée par Messing, et qui apparaissent ici sont les suivants: Description de Fil^2 et Gr^0 , fonctorialité, indépendance de choix du modèle, lien avec la filtration de Hodge et avec la filtration analytique conjuguée. Il reste encore à expliquer comment on peut, en caractéristique mixte, relever le Frobenius naturel sur le gradué associé à la filtration par le poids. Ce sera l'objet d'un prochain article. Nous décrirons aussi dans un prochain article l'opérateur de monodromie sur $H_{dR}^1(C)$.

Enfin, je tiens à signaler la construction et l'étude par Mokrane dans [Mo] de la filtration par le poids sur les variétés logarithmiques semi-stables sur les corps locaux. Il est aisé de voir que si C est définie sur un sous-corps fermé de K sur lequel Mokrane peut définir sa filtra-

tion par le poids, la filtration obtenue sur $H_{dR}^1(C)$ par extension des scalaires coïncide avec celle définie ici.

CONVENTIONS. Nous dirons *variété analytique* au lieu d'espace analytique rigide et *variété algébrique* au lieu de schéma localement de type fini sur un corps. Nous appellerons *courbe* toute variété algébrique séparée de type fini de pure dimension 1 sur un corps. Nous dirons toujours *compact* au lieu de quasi-compact. Un ouvert ou un recouvrement d'une variété analytique sera toujours *admissible*.

1. Objects simpliciaux et diagrammes.

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats de base sur les diagrammes, les foncteurs adjoints et les objets simpliciaux. Puis nous nous plaçons dans le cadre des topos afin d'établir de manière formelle des propriétés qui nous serviront dans le second paragraphe. Nous ne faisons que rappeler des constructions et des résultats bien connus mais pour lesquels aucune référence précise ne semble disponible. Notre seul but est d'établir un certain nombre de propriétés afin d'éviter de laborieuses vérifications dans le paragraphe suivant. On notera cependant comment le cadre des topos apporte de notables simplifications à l'étude de la notion d'homotopie. La plupart des démonstrations, faciles, sont laissées au lecteur.

1.1. Diagrammes dans une catégorie.

1.1.1. DÉFINITION. On note $\mathbf{B}$ la catégorie des petites catégories. Si C est une catégorie quelconque et $i \in \mathbf{B}$, on note C^I la catégorie des foncteurs de I dans C , c'est à dire des *diagrammes dans C de base I* . Si $E \in C^I$, on écrit $E^i := E(i)$. Si $\lambda: I \rightarrow J$ est un morphisme de $\mathbf{B}$, on note $\lambda^*: C^J \rightarrow C^I$ le foncteur $E \rightarrow E \circ \lambda$. Enfin, si $u: C' \rightarrow C$ est un foncteur, on note u^I ou parfois tout simplement $u: C'^I \rightarrow C^I$, le foncteur $E \rightarrow u \circ E$.

1.1.2. PROPOSITION. Soient $u: C' \rightarrow C$ un foncteur et $I \in \mathbf{B}$. Alors,

- i) Si $\lambda: I \rightarrow J$ est un morphisme de $\mathbf{B}$, on a $\lambda^* \circ u = u \circ \lambda^*$,
- ii) Si u est fidèle (resp. pleinement fidèle), alors u^I aussi
- iii) Si u possède un adjoint v , alors u^I et v^I sont aussi adjoints.

1.1.3. DÉFINITION. On note $\mathbf{O}$ la catégorie ponctuelle et si C est une catégorie quelconque, on identifie C avec $C^{\mathbf{O}}$. Si $I \in \mathbf{B}$, $E \in C$ et

$p: C \rightarrow \mathbf{O}$ est le foncteur final, on note $\underline{E} := p^* E \in C^I$. On dit que $\underline{E}$ est le *diagramme constant associé* à E .

1.1.4. Si $I \in \mathbf{B}$, le foncteur $p^*: C \rightarrow C^I$ est pleinement fidèle. D'autre part, si on considère $i \in I$ comme foncteur $i: \mathbf{O} \rightarrow I$, on a pour tout $E \in C^I$, $i^* E = E^i$. Aussi, si I possède un objet final 0 , alors le foncteur final $p: I \rightarrow \mathbf{O}$ est adjoint à gauche au foncteur $0: \mathbf{O} \rightarrow I$. Il suit que si C est une catégorie quelconque, le foncteur $E \rightarrow \underline{E}$ est adjoint à droite au foncteur $E \rightarrow E^0$.

1.1.5. DÉFINITION. Si C est une catégorie quelconque, on note $\text{Cod}(C)$ la catégorie cofibrée sur $\mathbf{B}^{\text{op}}$ dont la fibre au dessus de I est C^I et le foncteur image directe au dessus de $\lambda: I \rightarrow J$ est λ^* . C'est la catégorie des *codiagrammes* dans C . Un objet de $\text{Cod}(C)$ est donc un objet E de C^I avec $I \in \mathbf{B}$, et un morphisme de $\text{Cod}(C)$ au dessus de $\lambda: I \rightarrow J$ est un morphisme $f: E \rightarrow \lambda^* F$.

1.1.6. Tout foncteur $u: C' \rightarrow C$ définit un foncteur noté $\text{Cod}(u)$ ou plus simplement $u: \text{Cod}(C') \rightarrow \text{Cod}(C)$. Il résulte de 1.1.2 que si u est fidèle (resp. pleinement fidèle), alors $\text{Cod}(u)$ aussi et que si u possède un adjoint v , alors $\text{Cod}(u)$ et $\text{Cod}(v)$ sont aussi adjoints.

1.2. Diagrammes, adjoints et limites.

1.2.1. DÉFINITION. Soient $J \in \mathbf{B}$ et C une catégorie quelconque. Alors, les $\varinjlim$ existent dans C si le foncteur $E \rightarrow \underline{E}$ possède un adjoint à gauche et cet adjoint est alors $\varinjlim$.

1.2.2. LEMME. Soit $\lambda: I \rightarrow J$ un morphisme de $\mathbf{B}$. Si $j \in J$, on note I/j la catégorie suivante: Un objet de I/j est un couple $(i \in I, \alpha: \lambda(i) \rightarrow j)$ et un morphisme de (i, α) vers (i', α') est une flèche $i \rightarrow i'$ telles que $\alpha' \circ \lambda(u) = \alpha$. On note $j: I/j \rightarrow I$ le morphisme $(i, \alpha) \rightarrow i$. Soit C une catégorie quelconque. Alors, λ^* possède un adjoint $\lambda_!$ à gauche si et seulement si pour tout $E \in C^I$, et tout $j \in J$, $\varinjlim j^* E$ existe dans C et on a alors $(\lambda_! E)^j = \varinjlim_{I/j} j^* E$.

1.2.3. PROPOSITION. Soient $J \in \mathbf{B}$ et C une catégorie dans laquelle les $\varinjlim$ existent. Alors,

i) Si $\lambda: I \rightarrow J$ est un morphisme de $\mathbf{B}$ tel que λ^* possède un adjoint $\lambda_!$ à gauche, alors les $\varinjlim$ existent dans C et on a $\varinjlim = \varinjlim \circ \lambda_!$,

- ii) Si $i \in \mathbf{B}$, alors les $\varinjlim$ existent dans C^I et on a pour tout $E \in C^I$ et $i \in I$, $(\varinjlim E)^i = \varinjlim E^i$ et
- iii) Si $I \in \mathbf{B}$, si C' est une autre catégorie dans laquelle les $\varinjlim$ existent et si $u: C \rightarrow C'$ est un foncteur qui préserve les $\varinjlim$, alors u^I préserve aussi les $\varinjlim$.

1.2.4. PROPOSITION. Soient $\lambda: I \rightarrow J$ un morphisme de $\mathbf{B}$ et C une catégorie quelconque. Alors

- i) Si λ possède un adjoint μ à droite, alors μ^* est adjoint à gauche pour λ^*
- ii) Si λ^* possède un adjoint $\lambda_!$ à gauche et si λ est pleinement fidèle, alors $\lambda_!$ est aussi pleinement fidèle.

1.2.5. DÉFINITION. On plonge C dans $\text{Cod}(C)$ en l'identifiant avec C^0 . Alors, les $\varinjlim$ existent dans C si le foncteur d'inclusion possède un adjoint à gauche et cet adjoint est alors $\varinjlim$. Si $f: E \rightarrow F$ est un morphisme au dessus de $\lambda: I \rightarrow J$ dans $\text{Cod}(C)$, alors $\varinjlim f$ est obtenu en composant $\varinjlim f: \varinjlim E \rightarrow \varinjlim \lambda^* F$ avec le morphisme d'adjonction $\varinjlim \lambda_! \lambda^* F \rightarrow \varinjlim F$.

1.2.6. Si $I \in \mathbf{B}$ et T est un topos, alors T^I est un topos. Si $u: T \rightarrow T'$ est un morphisme de topos, alors u^I aussi. De plus, tout morphisme $\lambda: I \rightarrow J$ dans $\mathbf{B}$ fournit un morphisme de topos $\hat{\lambda} = (\lambda^*, \lambda_*): T^I \rightarrow T^J$, et λ^* possède un adjoint $\lambda_!$ à gauche.

1.3. Objects simpliciaux.

1.3.1. DÉFINITION. Si C est une catégorie quelconque et $D \in \mathbf{B}$ on note $C(D)$ et on appelle *catégorie des préfaisceaux sur D à valeurs dans C* la catégorie des foncteurs contravariants de D dans C . On note $\mathbf{E}$ la catégorie des ensembles (ou topos ponctuel) et $\hat{D} = \mathbf{E}(D)$.

1.3.2. DÉFINITIONS. Soit Δ la catégorie dont les objets sont les ensembles $q := \{0, 1, \dots, q\}$ et les morphismes les applications croissantes. Les objets de Δ sont appelés *simplexes types*. Un préfaisceau sur Δ à valeurs dans une catégorie C est appelé *objet simplicial* de C .

On peut aussi voir un objet simplicial comme un diagramme sur la catégorie opposée Δ^{op} . Les considérations ci-dessus s'appliquent donc.

1.3.3. DÉFINITION. Les applications

$$\begin{aligned} \delta_i: q &\rightarrow q + 1 & \sigma_i: q &\rightarrow q - 1 \\ k &\rightarrow \begin{cases} k & \text{si } k < i \\ k + 1, & \text{sinon.} \end{cases} & k &\rightarrow \begin{cases} k & \text{si } k \leq i \\ k - 1, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

sont appelées respectivement *opérateurs faces* et *opérateurs de dégénérescence*. Si C est une catégorie quelconque et $K \in C(\Delta)$, on notera

$$K_q := K(q), \quad d_i := K(\delta_i): K_q \rightarrow K_{q-1} \quad \text{et} \quad s_i := K(\sigma_i): K_q \rightarrow K_{q+1}.$$

1.3.4. Soit C une catégorie quelconque. Puisque 0 est l'objet final de Δ , il résulte de 1.2.4 que le foncteur $E \rightarrow \underline{E}$ est adjoint à droite au foncteur $K \rightarrow K_0$. Si on suppose que les puissances, c'est à dire produits finis $E \times E \times \dots \times E$, existent dans C , alors il résulte de 1.2.1 que le foncteur $K \rightarrow K_0$ possède aussi un adjoint à droite $\Delta: C \rightarrow C(\Delta)$. De même, si on suppose que les conoyaux existent dans C , il résulte de 1.2.1 que le foncteur $E \rightarrow \underline{E}$ possède un adjoint H_0 à gauche.

1.3.5. DÉFINITION. Si les puissances existent dans C , on dit que $\Delta(E)$ est l'*objet simplicial* sur E .

1.3.6. Par adjonction, on dispose pour tout $K \in C(\Delta)$ d'un morphisme canonique $K \rightarrow \Delta(K_0)$. On dispose donc pour tout $E \in C$, d'un morphisme canonique $\underline{E} \rightarrow \Delta(E)$.

1.3.7. Supposons que les puissances et les conoyaux existent dans C . De 1.1.5, on déduit une suite de foncteurs adjoints

$$\begin{aligned} H_0: \text{Cod}(C(\Delta)) &\rightarrow \text{Cod}(C), & p^*: \text{Cod}(C) &\rightarrow \text{Cod}(C(\Delta)), \\ 0^*: \text{Cod}(C(\Delta)) &\rightarrow \text{Cod}(C) & \text{et} & \Delta: \text{Cod}(C) \rightarrow \text{Cod}(C(\Delta)). \end{aligned}$$

1.3.8. Si E est un ensemble, $\Delta(E)_q$ est l'ensemble des suites $(x_0, \dots, x_q)$ d'éléments de E avec

$$d_i(x_0, \dots, x_q) = (x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_q)$$

et

$$s_i(x_0, \dots, x_q) = (x_0, \dots, x_i, x_i, \dots, x_q).$$

Si K est un ensemble simplicial, $H_0(K)$ est le quotient de K_0 par la relation d'équivalence engendrée par $x \sim y$ s'il existe $z \in K_1$ tel que $x = d_0(z)$ et $y = d_1(z)$.

En particulier, on voit que si E est un ensemble et $x, y \in E$, on a $x = d_0(x, y) \sim d_1(x, y) = y$. Il suit que $H_0(\Delta(E)) = 0$.

1.4. Homotopie.

Dans ce qui suit, T désigne un topos.

1.4.1. On dispose d'un Hom interne $\mathcal{H}om$ dans T défini par l'isomorphisme fonctoriel $\text{Hom}(M, \mathcal{H}om(K, L)) = \text{Hom}(M \times K, L)$. La catégorie $T(\Delta)$ est un topos et le morphisme de topos $T \rightarrow E$, dont le foncteur image directe est $\Gamma(T, -)$, définit par 1.1.5. un morphisme de topos $\pi: T(\Delta) \rightarrow \hat{\Delta}$. Enfin, si $K, L \in T(\Delta)$, on a $\text{Hom}(K, L) = \pi_* \mathcal{H}om(K, L)_0$.

1.4.2. DÉFINITION. Soient $K, L \in T(\Delta)$ et $f_0, f_1 \in \text{Hom}(K, L)$. On dit que f_0 est *homotope* à f_1 si f_0 et f_1 ont même image dans $H_0(\pi_* \mathcal{H}om(K, L))$. On dit que $f: K \rightarrow L$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe $g: L \rightarrow K$ tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes à l'identité. On dit que K est *contractile* si K est homotopiquement équivalent à 0.

1.4.3. Soient $K, L \in T(\Delta)$ et $h: L \rightarrow L'$ (resp. $K' \rightarrow K$) un morphisme de $T(\Delta)$. Alors, par composition, h définit un morphisme

$$\mathcal{H}om(K, L) \rightarrow \mathcal{H}om(K, L') \quad (\text{resp.} \quad \mathcal{H}om(K, L) \rightarrow \mathcal{H}om(K', L)).$$

Il suit que la notion d'homotopie est stable par composition.

1.4.4. Soient $u: T \rightarrow T'$ un morphisme de topos et $\pi': T'(\Delta) \rightarrow \hat{\Delta}$ le morphisme naturel. On dispose, pour tout $K, L \in T(\Delta)$, d'un morphisme canonique

$$\pi_* \mathcal{H}om(K, L) = \pi'_* u_* \mathcal{H}om(K, L) \rightarrow \pi'_* \mathcal{H}om(u_* K, u_* L)$$

et pour tout $K', L' \in T'(\Delta)$, d'un morphisme canonique

$$\pi'_* \mathcal{H}om(K, L) \rightarrow \pi'_* u_* \mathcal{H}om(u^* K, u^* L) = \pi_* \mathcal{H}om(u^* K, u^* L).$$

Il suit que la notion d'homotopie est stable par u_* et u^* .

1.4.5. Par adjonction, si $E \in T$ et $K \in T(\Delta)$, on a

$$\mathcal{H}om(K, \Delta(E)) = \Delta(\mathcal{H}om(K_0, E)).$$

D'autre part, on a $\pi_* \circ \Delta = \Delta \circ \Gamma(T, -)$ et il suit que

$$\begin{aligned} H_0(\pi_* \mathcal{H}om(K, \Delta(E))) &= \\ &= H_0(\pi_* \Delta(\mathcal{H}om(K_0, E))) = H_0(\Delta\Gamma(T, \mathcal{H}om(K_0, E))) = 0 \end{aligned}$$

par 1.3.7. Autrement dit, à homotopie près, il existe au plus un morphisme $K \rightarrow \Delta(E)$.

1.4.6. Il résulte de 1.4.5 que si $f, g: E \rightarrow F$, alors $\Delta(f)$ et $\Delta(g)$ sont homotopes. On voit donc que s'il existe deux morphismes $E \rightarrow F$ et $F \rightarrow E$, alors $\Delta(E)$ est homotopiquement équivalent à $\Delta(F)$. En particulier, s'il existe un morphisme $0 \rightarrow E$, alors $\Delta(E)$ est contractile. Par exemple, si E est un ensemble, alors $\Delta(E)$ est contractile.

1.5. Homotopie et diagrammes.

1.5.1. Si $\lambda: I \rightarrow J$ est un morphisme de $\mathbf{B}$, il résulte de 1.2.6. et 1.4.4. que l'homotopie est préservée par λ_* (resp. λ^*).

1.5.2. Soit $I \in \mathbf{B}$. Puisque les limites inductives sont universelles dans T , on a pour tout $K, L \in T^I(\Delta)$, un morphisme canonique

$$\begin{aligned} \pi_* \mathcal{H}om(K, L) &= \pi_* \varprojlim_I \mathcal{H}om(K, L) \rightarrow \pi_* \varprojlim_I \mathcal{H}om(K, \varinjlim_I L) \cong \\ &\cong \pi_* \mathcal{H}om(\varinjlim_I K, \varprojlim_I L) \end{aligned}$$

et il en résulte que $\varinjlim_I$ préserve l'homotopie.

1.5.3. On dit que deux morphismes f et g de $\text{Cod}(T(\Delta))$ au dessus de $\lambda: I \rightarrow J$ sont *homotopes* si f et g et sont homotopes dans $T^I(\Delta)$. Puisque $\varinjlim_I$ est obtenu en composant $\varinjlim_I$ avec le morphisme d'adjonction, il résulte de 1.5.2. et 1.4.4 que $\varinjlim_I$ préserve l'homotopie. En particulier, si

on se donne deux morphismes f et $g: E \rightarrow F$ dans $\text{Cod}(T)$, alors $\varinjlim_I \Delta(f)$ et $\varinjlim_I \Delta(g)$ sont homotopes.

1.5.4. Soient $\lambda: I \rightarrow J$ un morphisme de $\mathbf{B}$ possédant un adjoint μ à droite, $f: E \rightarrow F$ un morphisme au dessus de λ et $g: F \rightarrow E$ un morphisme au dessus de μ . Alors, g définit par adjonction un morphisme $\lambda^* F \rightarrow E$ et il résulte de 1.4.6 que $\Delta(f)$ est une équivalence d'homotopie dans T^I . Si on suppose de plus λ pleinement fidèle, alors $\varinjlim_I \lambda^* =$

$$= \varinjlim_J \lambda_! \lambda^* = \varinjlim_J \text{ et il suit que } \varinjlim_I \Delta(\lambda^* F) = \varinjlim_I \lambda^* \Delta(F) = \varinjlim_J \Delta(F). \text{ On}$$

voit donc que $\varinjlim \Delta(f)$ est une équivalence d'homotopie entre $\varinjlim \Delta(E)$ et $\varinjlim \Delta(F)$. Par exemple, si I possède un objet initial, alors $\varinjlim \Delta(E)$ est contractile.

1.6. Homologie simpliciale.

Dans ce qui suit, T désigne toujours un topos et A désigne un anneau de T .

1.6.1. DÉFINITION. Si K et L sont des objets gradués d'une catégorie abélienne, on note $\mathrm{Hom}(K, L)_q = \bigoplus_i \mathrm{Hom}(K_i, L_{i+q})$. Si K et L sont des complexes et $f: K_i \rightarrow L_{i+q}$ un homomorphisme on pose $d(f) = d \circ f - (-1)^i f \circ d$. On munit ainsi $\mathrm{Hom}(K, L)_\bullet$ d'une structure de complexe de groupes abéliens. Un homomorphisme gradué $f: K \rightarrow L$ est un *morphisme de complexes* (resp. *est homotope à 0*) si et seulement si f est un cycle (resp. un bord) de $\mathrm{Hom}(K, L)_\bullet$.

1.6.2. Si K est un objet simplicial d'une catégorie abélienne, on note $K_\bullet$ le complexe de composantes K_q et de différentielle $d := \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i d_i: K_q \rightarrow K_{q-1}$. Cette définition est clairement fonctorielle en K et on a $H_0(K) = H_0(K_\bullet)$.

1.6.3. On note AT la catégorie des A -modules à gauche de T . On a $\underline{AT}(\Delta) = (AT)(\Delta)$ et on écrira tout simplement $AT(\Delta)$. Un homomorphisme $f: K \rightarrow L$ dans $AT(\Delta)$ est *homotope à 0* si f est un bord de $\pi_* \mathcal{H}om(K, L)_\bullet$.

1.6.4. DÉFINITION. Le foncteur «oubli» de AT dans T possède un adjoint à gauche, que l'on note $E \rightarrow AE$, appelé *foncteur «A-module libre engendré»*.

1.6.5. LEMME. Si K et $L \in AT(\Delta)$, l'homomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_A(K, L) \rightarrow \mathrm{Hom}(K_\bullet, L_\bullet)$ se prolonge de manière naturelle en un homomorphisme de complexes naïvement tronqués à l'ordre 1, $\pi_* \mathcal{H}om_A(K, L)_{\bullet \leq 1} \rightarrow \mathrm{Hom}(K_\bullet, L_\bullet)_{\bullet \leq 1}$, $h \rightarrow h_\bullet$.

Il s'agit de construire un homomorphisme canonique $\pi_* \mathcal{H}om_A(K, L)_1 \rightarrow \mathrm{Hom}(K, L)_1$ et de vérifier que l'on obtient bien un morphisme de complexes. On identifie tout objet q de Δ avec l'ensemble

simplicial constant qui est représenté par q . On a alors

$$\pi_* \mathcal{H}om_A(K, L)_1 = \text{Hom}(\underline{1}, \mathcal{H}om_A(K, L)) = \text{Hom}_A(K \otimes A\underline{1}, L)$$

et on veut donc définir, pour tout q , une flèche $\text{Hom}_A(K \otimes A\underline{1}, L) \rightarrow \text{Hom}(K_q, L_{q+1})$. Il suffit pour cela de définir, pour tout q , un homomorphisme $s: K_q \rightarrow (K \otimes A\underline{1})_{q+1}$. Soit $s_i \in 1_{q+1}$ l'unique application croissante de $q+1$ dans 1 telle que $s_i(i-1) = 0$ et $s_i(i) = 1$. On pose alors $s_i := (s_i, s_i): K_q \rightarrow K_{q+1} \times 1_{q+1} = (K \times 1)_{q+1} \rightarrow (K \otimes A\underline{1})_{q+1}$ et $s := \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i s_i$. Il ne reste plus qu'à vérifier que l'on obtient bien un morphisme de complexes.

1.6.6. PROPOSITION. *Les foncteurs $K \rightarrow AK$ et $K \rightarrow K_\bullet$ préservent l'homotopie.*

Pour le premier, c'est clair. Pour le second, cela résulte de 1.6.5.

1.6.7. Si $K \in T(\Delta)$ et $M \in AT$, on pose

$$H_q(K, M) = H_q((AK)_\bullet \otimes_A M) \text{ et } H^q(K, M) = H^q(\text{Hom}_A((AK)_\bullet, M)).$$

On écrira $H_q(K) := H_q(K, \mathbb{Z})$. On dispose donc de suites spectrales

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_p^A(H_q(K), M) \Rightarrow H_*(K, M)$$

et

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_A^p(H_q(K), M) \Rightarrow H^*(K, M).$$

1.6.8. Puisque le foncteur $K \rightarrow AK$ possède un adjoint à droite, il préserve les limites inductives et on a donc $H_0(K, A) = H_0(AK) = AH_0(K)$.

1.6.9. Si E est un ensemble, le groupe symétrique S_{q+1} agit sur $\Delta_q(E)$ et donc sur $\mathbb{Z}\Delta_q(E)$. De plus, si $\sigma \in S$, on a $d \circ \sigma = (-1)^\sigma d$ sur $\mathbb{Z}\Delta_\bullet(E)$. On peut donc considérer le complexe quotient $C(E)$ de $\mathbb{Z}\Delta_\bullet(E)$ par les relations $\sigma = (-1)^\sigma$. On obtient ainsi un homomorphisme surjectif $\mathbb{Z}\Delta_\bullet(E) \rightarrow C(E)$, $(x_0, \dots, x_q) \rightarrow [x_0, \dots, x_q]$ dont on peut vérifier que c'est un quasi-isomorphisme.

2. Topologie des courbes singulières.

Dans ce paragraphe, nous définissons les groupes d'homologie associés à une courbe X sur un corps algébriquement clos. Nous montrons

que ces groupes calculent la cohomologie étale naïve de X et la différence entre la cohomologie étale de X et de sa normalisée. Nous montrons aussi que ces groupes calculent la différence entre la cohomologie cohérente ou multiplicative de X et de sa normalisée lorsque X a des singularités ordinaires.

Dans ce qui suit et sauf mention explicite du contraire, k désigne un corps algébriquement clos.

2.1. Ensemble simplicial associé à une courbe.

2.1.1. DÉFINITIONS. Si X est une courbe sur k , on note π ou $\pi_X: \tilde{X} \rightarrow X$ sa normalisation. Si ξ est un point générique de X , on note $\tilde{\xi}$ l'unique point de $\tilde{X}$ au dessus de ξ . Si x est un point fermé de X et $\pi^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_m\}$, on dit que m est le *nombre de branches de X en x* . Si $m > 1$, on dit que x est *multibranche* ou que X est *multibranche en x* . Nous appellerons *branches de X en x* les composantes irréductibles de X passant par x . Si Y est une branche de X en x , la *multiplicité de Y dans X en x* est le nombre de branches de Y en x . On dit que Y est une *branche simple de X en x* si Y est unibranche en x . Sinon, on dit que Y est une *branche multiple de X en x* .

2.1.2. DÉFINITION. Soit X une courbe sur k . On munit l'ensemble sous-jacent à X d'une structure de catégorie en prenant pour flèches non triviales les $y: \xi \rightarrow x$, où ξ est un point générique de X , x un point fermé de X et y un point fermé de $\tilde{X}$ tels que $\tilde{\xi}$ se spécialise en y et $x = \pi(y)$. On définit ensuite un diagramme $D = D(X)$ sur X en posant si $x \in X$, $D^x = \pi^{-1}(x)$, et si $y: \xi \rightarrow x$ est une flèche de X , $D^y(\xi) = y$. L'ensemble simplicial associé à X , que l'on notera $\Delta(X)$ s'il n'y a pas de risque de confusion, est $\varinjlim \Delta(D(X))$.

2.1.3. Si X n'a que des points doubles, on retrouve le graphe associé à X . En général, on peut décrire $\Delta(X)$ comme suit $\Delta(X)_q$ est l'ensemble des points génériques ξ de X et des $(y_0, \dots, y_q)$ avec $y_0, \dots, y_q \in \tilde{X}$ non tous égaux, au dessus d'un même point multibranche x de X . On a

$$s_i(\xi) = \xi, \quad s_i(y_0, \dots, y_q) = (y_0, \dots, y_i, y_i, \dots, y_q), \quad d_i(\xi) = \xi \text{ et} \\ d_i(y_0, \dots, y_q) = \begin{cases} \xi, & \text{si } y_0 = \dots = \hat{y}_i = \dots = y_q =: y \text{ et } \tilde{\xi} \text{ se spécialise en } y \text{ et} \\ (y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_q) & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.1.4. Si X est une courbe connexe sur k avec au plus un point multibranche x et si toutes les branches de X en x sont simples, l'application canonique $\Delta(\pi^{-1}(x)) \rightarrow \Delta(X)$ est un isomorphisme, ce qui implique

par 1.4.6 que $\Delta(X)$ est contractile. Cela s'applique en particulier lorsque X est lisse et connexe.

2.1.5. Si $f: X' \rightarrow X$ est un morphisme entre deux courbes sur k , celui-ci se prolonge en un morphisme $\tilde{f}: \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$ (de manière non unique en général). Ceci nous permet de considérer f comme un foncteur et de définir un morphisme de diagrammes $D(f): D(X') \rightarrow D(X)$, qui dépend du choix de $\tilde{f}$. Celui-ci induit un morphisme $\Delta(f): \Delta(X') \rightarrow \Delta(X)$ qui est indépendant par 1.6.4, à homotopie près, du choix de $\tilde{f}$.

2.1.6. Si $f: X' \rightarrow X$ est quasi-fini (au dessus du lieu multibranche de X) sur k , par exemple si f est étale, alors $\tilde{f}$ est unique et $D(f)$ et $\Delta(f)$ ne dépendent donc que de f .

2.1.7. Remarquons par exemple que l'application $\Delta(\pi): \Delta(\tilde{X}) \rightarrow \Delta(X)$ est bijective en degré 0.

2.2. Homologie d'une courbe.

2.2.1. PROPOSITION. Soit X une courbe sur k . Alors, pour tout q , $H_q(X) := H_q(\Delta(X))$ est un groupe abélien libre de rang fini, nul si $q > 1$.

Si L est le noyau du morphisme de complexes $\bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}\Delta(x^{-1}(x))_{\bullet} \rightarrow \mathbb{Z}\Delta(X)_{\bullet}$, on voit facilement que $d: L_q \rightarrow L_{q-1}$ est un isomorphisme si q est pair et nulle si q est impair. Puisque par 1.4.6, $\Delta(\pi^{-1}(x))$ est contractile pour tout $x \in X$, on voit que $H_1(X)$ est libre et que $H_q(X)$ est nul si $q > 1$. La finitude résulte du fait qu'il y a un nombre fini de points génériques et de points multibranches (voir aussi 2.2.3). Enfin, $H_0(X)$ est libre par 1.6.8.

2.2.2. COROLLAIRE. Si G est un groupe abélien, alors

$$H_q(\Delta(X), G) = H_q(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G \text{ et } H_q(\Delta(X), G) = 0 \text{ pour } q > 1.$$

$$H^q(\Delta(X), G) = \text{Hom}(H_q(X), G) =$$

$$= H^q(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G \text{ et } H^q(\Delta(X), G) = 0 \text{ pour } q > 1.$$

En effet, il résulte de 2.2.1 que les suites spectrales associées à $\Delta(X)$ et G en 1.6.7 dégènèrent.

2.2.3. Considérons le complexe $C(X)$ défini comme suit: $C(X)_0$ est le groupe libre sur l'ensemble des points génériques de X et pour $q > 0$, $C(X)_q$ est le quotient du groupe libre sur les $[y_0, \dots, y_q]$, avec $y_0, \dots, y_q$

distincts au dessus du même point multibranche x de X , par les relations $[y_{\sigma(0)}, \dots, y_{\sigma(q)}] = (-1)^{\sigma} [y_0, \dots, y_q]$. On pose $d[y_0, y_1] = \xi_0 - \xi_1$ si $y_0 \in \xi_0$ et $y_1 \in \xi_1$ et $d[y_0, \dots, y_q] = \sum [y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_q]$ si $q > 1$. Il est facile de voir que l'on a un morphisme surjectif de complexes $Z\Delta(X)_{\bullet} \rightarrow C(X)$ et que celui ci est un quasi-isomorphisme. On peut donc utiliser $C(X)$ pour calculer l'homologie de X .

2.3. Localisation étale.

2.3.1. Si X est une courbe et $f: X' \rightarrow X$ étale, alors $\tilde{X} \times_X X'$ est la normalisation de X' . En particulier, si x' est un point fermé de X' et $f(x') = x$, alors l'application $\pi'^{-1}(x') \rightarrow \pi^{-1}(x)$ est bijective.

2.3.2. PROPOSITION. *Si X est une courbe sur k et $f: X' \rightarrow X$ surjectif étale, alors la suite $\Delta(X' \times_X X') \rightrightarrows \Delta(X') \rightarrow \Delta(X)$ est exacte à droite.*

Puisque $\varinjlim$ est exact à droite, il suffit de montrer que la suite $\Delta(D(X' \times_X X')) \rightrightarrows \Delta(D(X')) \rightarrow \Delta(D(X))$ est exacte à droite. Cela se vérifie degré par degré et composante par composante. La surjectivité de la flèche de droite et la commutativité du diagramme sont immédiates. Puisque par 2.3.1, $\tilde{X}' \times_{\tilde{X}} \tilde{X}'$ est la normalisation de $X'' := X' \times_X X'$, il suffit pour conclure, de remarquer que si y'_1 et $y'_2 \in \tilde{X}'$ sont tels que $\tilde{f}(y'_1) = \tilde{f}(y'_2)$, il existe $y'' \in \tilde{X}$ tel que pour $i = 1, 2$, on ait $\tilde{p}_i(y'') = y'_i$.

2.3.3. COROLLAIRE. *Si X est une courbe sur k , G un groupe abélien et $q \geq 0$, on pose*

$$\mathcal{H}om(\Delta, G)_q(X) = \text{Hom}(\Delta(X)_q, G).$$

Alors, le préfaisceau $\mathcal{H}om(\Delta, G)_q$ est un faisceau pour la topologie étale sur X .

Cela résulte de 2.2.2 et de l'exactitude à gauche du foncteur $\text{Hom}(-, G)$.

2.3.4. PROPOSITION. *Si G est un groupe abélien, le complexe $\mathcal{H}om(\Delta, G)_{\bullet}$ est une résolution du faisceau constant G .*

Puisque $\Delta(X)$ est naturellement augmenté vers 0, la question est locale étale. On peut donc supposer que X est connexe avec un unique point multibranche x et que toutes les branches en x sont simples. L'assertion résulte alors de 2.1.4.

2.3.5. PROPOSITION. *Si X est une courbe sur k , alors la suite*

$$0 \rightarrow H^1(\Delta(X), G) \rightarrow H_{\text{et}}^1(X, G) \rightarrow H_{\text{et}}^1(\tilde{X}, G) \rightarrow 0$$

est exacte.

Puisque, par 2.3.4, $\mathcal{H}\text{om}(\Delta, G)_\bullet$ est une résolution de $\mathbf{Z}$ pour la topologie étale, on dispose d'un morphisme canonique de suites exactes à gauche

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow H^1(\Delta(X), G) & \rightarrow & H_{\text{et}}^1(X, G) & \rightarrow & \text{Hom}(\Delta(X)_0, G), \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow H^1(\Delta(\tilde{X}), G) & \rightarrow & H_{\text{et}}^1(\tilde{X}, G) & \rightarrow & \text{Hom}(\Delta(\tilde{X})_0, G). \end{array}$$

On sait que la flèche verticale du milieu est surjective car $\pi_* G/G$ a un support fini. D'autre part, il résulte de 2.1.7. que la dernière flèche verticale est bijective et de 2.1.4 que $H^1(\Delta(\tilde{X}), G) = 0$.

2.3.6. Nous écrivons $H_{\text{et}}^1(X/\mathbf{Z}_l) := \varprojlim H_{\text{et}}^1(X, \mathbf{Z}/l^n \mathbf{Z})$ en réservant la notation $H_{\text{et}}^1(X, \mathbf{Z}_l)$ à la cohomologie «stupide» à coefficients dans $\mathbf{Z}_l$. Plus généralement, si A est une $\mathbf{Z}_l$ -algèbre, nous écrivons $H_{\text{et}}^1(X/A) := H_{\text{et}}^1(X/\mathbf{Z}_l) \otimes A$.

2.3.7. COROLLAIRE. *Si G est un groupe abélien sans torsion, l'application canonique $H^1(\Delta(X), G) \rightarrow H_{\text{et}}^1(X, G)$ est bijective. Nous identifions ces deux groupes par la suite. En particulier, on dispose d'un accouplement naturel parfait $H_1(X) \times H_{\text{et}}^1(X, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$.*

Grâce à 2.2.2, on peut supposer que $G = \mathbf{Z}$. Puisque $\tilde{X}$ est normal, on a $H_{\text{et}}^1(\tilde{X}, \mathbf{Z}) = 0$ et donc $H^1(\Delta(X), \mathbf{Z}) \cong H_{\text{et}}^1(X, \mathbf{Z})$ par 2.3.5.

2.3.8. COROLLAIRE. *On dispose d'une suite exacte naturelle*

$$0 \rightarrow H^1(\Delta(X), \mathbf{Z}_l) \rightarrow H_{\text{et}}^1(X/\mathbf{Z}_l) \rightarrow H_{\text{et}}^1(\tilde{X}/\mathbf{Z}_l) \rightarrow 0.$$

2.3.9. PROPOSITION. *Si G est un groupe sans torsion, on a un homomorphisme canonique $H^1(X, G) \rightarrow H_{\text{et}}^1(X, G) = H^1(\Delta(X), G)$. Si les composantes irréductibles de X sont unibranches, c'est un isomorphisme que nous utiliserons pour identifier ces deux groupes.*

On peut supposer que $G = \mathbf{Z}$. Tout point x de X possède un voisinage ouvert connexe U dans lequel x est le seul point multibranche. Pui-

isque les composantes irréductibles de X sont unibranches, on peut supposer que toutes les branches sont simples. On a alors par 2.3.7 et 2.1.4, $H_{\text{ét}}^1(U, \mathbf{Z}) = H^1(\Delta(U), \mathbf{Z}) = 0$. On voit donc que si $p: X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$ est le morphisme canonique, alors $R^1 p_* \mathbf{Z} = 0$, et il suit que $H^1(X, \mathbf{Z}) \cong H_{\text{ét}}^1(X, \mathbf{Z}) = H^1(\Delta(X), \mathbf{Z})$ comme annoncé.

2.4. Points multiples ordinaires (à tangentes normales).

2.4.1. Si x est un point fermé d'une courbe X sur k et $\pi^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_m\}$, le normalisé $\tilde{\mathcal{O}}_x$ de $\mathcal{O}_x$ n'est autre que $\prod_{i=1}^m \mathcal{O}_{y_i}$ et il suit que k^m/k (resp. $(k^\times)^m/k^\times$) est naturellement facteur direct dans $\tilde{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_x$ (resp. $\tilde{\mathcal{O}}_x^\times/\mathcal{O}_x^\times$).

2.4.2. LEMME. *Pour un point fermé x d'une courbe X sur k par lequel passent m branches, les conditions suivantes sont équivalentes:*

- i) $\tilde{\mathcal{O}}_x \cong k[[t_1, \dots, t_m]]/(t_i t_j, i \neq j)$.
- ii) $\tilde{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_x = k^m/k$.
- iii) $\tilde{\mathcal{O}}_x^\times/\mathcal{O}_x^\times = (k^\times)^m/k^\times$.

Puisque $\tilde{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_x$ est de dimension finie sur k , on a $\tilde{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_x \cong \hat{\tilde{\mathcal{O}}}_x/\hat{\mathcal{O}}_x$. En particulier, on voit que $\hat{\mathcal{O}}_x + \tilde{\mathcal{O}}_x = \hat{\tilde{\mathcal{O}}}_x$ et il suit que, si m est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$, on a $(1 + m\hat{\mathcal{O}}_x)(1 + m\tilde{\mathcal{O}}_x) = 1 + m\hat{\tilde{\mathcal{O}}}_x$. Il en résulte que l'on a aussi $\hat{\tilde{\mathcal{O}}}_x^\times/\hat{\mathcal{O}}_x^\times \cong \hat{\tilde{\mathcal{O}}}_x^\times/\hat{\mathcal{O}}_x^\times$. On montre alors facilement que i) implique ii) et iii) et on vérifie de manière élémentaire que iii) et ii) sont équivalentes. Il suffit donc de montrer que ii) implique i). Si l'on choisit pour tout $i = 1, \dots, m$ un isomorphisme $k[[t_i]] \cong \tilde{\mathcal{O}}_x$, la condition implique que $\tilde{\mathcal{O}}$ est isomorphe au noyau de l'application canonique $\prod_{i=1}^m k[[t_i]] \rightarrow k^m/k$. La surjection canonique de $k[[t_1, \dots, t_m]]$ sur $\prod_{i=1}^m k[[t_i]]$ nous fournit alors un isomorphisme $k[[t_1, \dots, t_m]]/(t_i t_j) \cong \tilde{\mathcal{O}}_x$.

2.4.3. DÉFINITIONS. Un point fermé x d'une courbe X sur k satisfaisant les conditions équivalentes de 2.4.2 est appelé *point m -uple ordinaire (à tangentes normales)*. Nous dirons qu'une suite courte $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ est *presque exacte* si la seconde flèche est injective, troisième surjective et la composée des deux est nulle.

2.4.4. PROPOSITION. *Soit X une courbe propre sur k . On envoie $H^1(\Delta(X), k)$ dans $H^1(X, \mathcal{O})$ par $H^1(\Delta(X), k) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(X, k) \rightarrow$*

$\rightarrow H_{\text{ét}}^1(X, \mathcal{O}) \cong H^1(X, \mathcal{O})$. Alors, la suite

$$0 \rightarrow H^1(\Delta(X), k) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}) \rightarrow 0.$$

est presque exacte. De plus, cette suite est exacte si et seulement si les points de X sont ordinaires. On a le même résultat en remplaçant k et $\mathcal{O}$ par $k^\times$ et $\mathcal{O}^\times$, respectivement.

On a un morphisme de longues suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(X, k) & \rightarrow & H^0(\tilde{X}, k) & \rightarrow & \oplus k^{m_x}/k & \rightarrow & H_{\text{ét}}^1(X, k) & \rightarrow & H_{\text{ét}}^1(\tilde{X}, k) & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{O}) & \rightarrow & H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}) & \rightarrow & \oplus \tilde{\mathcal{O}}_x/\mathcal{O}_x & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{O}) & \rightarrow & H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

et nous avons vu en 2.3.5 que $H^1(\Delta(X), k)$ est le noyau de $H_{\text{ét}}^1(X, k) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\tilde{X}, k)$. On conclut alors par 2.4.1 et 2.4.2. La variante multiplicative se démontre de la même manière.

2.5. Genres d'une courbe.

2.5.1. DÉFINITION. Si X est une courbe sur k , on dit que $t(X) := \text{Rang } H_1(X)$ est le *genre topologique* de X . Si X est propre, on dit que $g(X) := \dim H^1(X, \mathcal{O})$ est le *genre arithmétique* de X . Si X est réduit et si X' est la compactification X' de X qui est lisse en dehors de X , on dit que $g(X) := g(X')$ est le *genre arithmétique* de X . On dit aussi que le nombre de points de $X' \setminus X$ est le *nombre de points manquants sur X* . En général, on appelle *genre arithmétique réduit* de X (resp. nombre de points manquants sur X), le genre arithmétique (resp. le nombre de points manquants) de X_{red} . Enfin, on dit que $d(X) := g(\tilde{X})$ est le *genre géométrique* de X .

2.5.2. Il résulte de 2.4.4 que, si X est une courbe propre sur k , alors $g(X) \geq d(X) + t(X)$ avec égalité si et seulement si tous les points sont ordinaires.

2.5.3. Par exemple, une courbe de genre arithmétique 0 n'a que des singularités ordinaires et la droite projective est la seule courbe propre irréductible de genre arithmétique 0.

2.5.4. PROPOSITION. Soit $f: X' \rightarrow X$ un morphisme surjectif à fibres connexes entre deux courbes sur k . Alors l'homomorphisme $H_1(X') \rightarrow H_1(X)$ est surjectif. En particulier, on a $t(X) \leq t(X')$.

Il suffit de remarquer que, l'homomorphisme canonique $H_{\text{et}}^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{et}}^1(X', \mathbb{Z})$ est injectif car, f étant surjectif à fibres connexes, on a $f_*\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

2.5.5. Soit $f: X' \rightarrow X$ un morphisme surjectif à fibres connexes entre deux courbes propres sur k . Si X et X' sont lisses, on sait que l'homomorphisme canonique $H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X', \mathcal{O})$ est injectif. On a donc toujours $d(X) \leq d(X')$.

2.5.6. PROPOSITION. *Soit $f: X' \rightarrow X$ un morphisme surjectif à fibres connexes entre deux courbes propres sur k de même genre arithmétique. Alors, si les singularités de X sont ordinaires, celle de X' aussi. Plus précisément, on a des isomorphismes naturels $H_1(X') \cong H_1(X)$, $H^1(X, \mathcal{O}) \cong H^1(X', \mathcal{O})$ et $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}) \cong H^1(\tilde{X}', \mathcal{O})$.*

Cela résulte immédiatement de 2.4.4, 2.5.4 et 2.5.5.

2.5.7. DÉFINITION. Si X est une courbe sur un corps quelconque k (c'est à dire pas nécessairement algébriquement clos) et si k^{alg} est une clôture algébrique de k , on peut définir les genres topologique, géométrique et arithmétique réduit de X comme ceux de $X \otimes_k k^{\text{alg}}$. Si X est propre et géométriquement réduite, on peut définir aussi le genre arithmétique de X . De même, on dit que X n'a que des singularités ordinaires si c'est le cas pour $X \otimes_k k^{\text{alg}}$. Enfin, le nombre géométrique de points manquants sur X est par définition le nombre de points manquant sur $X \otimes_k k^{\text{alg}}$.

3. Modèles formels d'une courbe.

Dans ce paragraphe, nous rappelons tout d'abord les résultats de Raynaud sur les modèles formels de variétés analytiques rigides. Ensuite, nous utilisons un théorème de Bosch et Lütkebohmert qui établit une équivalence entre schémas formels et variétés analytiques formelles pour traduire dans notre langage plusieurs théorèmes fondamentaux de géométrie analytique rigide. Nous utilisons ces résultats pour décrire les variations des modèles formels d'une courbe. Ensuite, nous étudions la possibilité de prolonger certains morphismes sur des voisinages stricts de schémas affines et lisses et nous appliquons ces résultats au découpage d'une courbe à partir d'un modèle formel.

Dans ce qui suit, on désigne par K un corps ultramétrique complet d'anneau de valuation $\mathfrak{V}$ d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k .

3.1. Schémas formels et variétés analytiques (Mehman-Raynaud).

Nous rappelons quelques résultats de Raynaud[R2], dont les démonstrations ont été écrites par Mehlman[M]. Voir aussi[Lu].

3.1.1. DÉFINITION. Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel admissible (i.e. plat et de présentation finie sur $\mathfrak{V}$) et $\mathcal{Y}$ un sous-schéma formel fermé de $\mathcal{X}$. Il existe alors un morphisme $u: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ universel pour la propriété suivante: Si $f: \mathcal{X}'' \rightarrow \mathcal{X}$ est un morphisme de schémas formels admissibles tel que $f^{-1}(\mathcal{Y})$ soit localement principal régulier, alors f se factorise par u . On dit que u est l'éclatement formel de centre $\mathcal{Y}$.

3.1.2. Si $u: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ est un éclatement formel et $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un morphisme de schémas formels admissibles, alors

$$u': (\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}') / \text{tors} \rightarrow \mathcal{Y}$$

est aussi un éclatement formel.

3.1.3. Si $\mathcal{X}$ est un schéma formel admissible sur $\mathfrak{V}$, on note $\mathcal{X}_K := \mathcal{X} \otimes_{\mathfrak{V}} K$ sa fibre générique qui est une variété analytique compacte quasi-séparée sur K ([M] ou [B2]). Si $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est un morphisme, on note f_K le morphisme induit sur les fibres génériques.

3.1.4. PROPOSITION. i) Si $u: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ est un éclatement formel, alors u_K est un isomorphisme.

ii) Si $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est un morphisme plat de schémas formels admissibles tel que f_K soit une immersion ouverte (resp. un isomorphisme), alors f est une immersion ouverte (resp. un isomorphisme).

iii) Si f et $g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ sont des morphismes de schémas formels admissibles tels que $f_K = g_K$, alors $f = g$.

Ces assertions sont démontrées dans [M] en 2.8.6 pour i), en 4.3.3 et 4.3.2 pour ii) et en 4.3.15 pour iii).

3.1.5. THÉOREME. Soit $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un morphisme de schémas formels admissibles tel que f_K soit plat (resp. une immersion ouverte, un isomorphisme). Il existe alors un éclatement formel $u: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ tel que $f': (\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}') / \text{tors} \rightarrow \mathcal{X}'$ soit plat (resp. une immersion ouverte, un isomorphisme).

Le résultat concernant la platitude est démontré dans [M] en 3.4.6. Les autres assertions résultent alors de 3.1.4.

3.1.6. PROPOSITION. *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ des schémas formels admissibles sur $\mathfrak{V}$ et $\varphi: \mathcal{Y}_K \rightarrow \mathcal{X}_K$ un morphisme. Il existe un éclatement formel $\mathfrak{o}: \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$ et un morphisme $\mathfrak{f}: \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{X}$ tels que $\varphi \circ \mathfrak{o}_K = \mathfrak{f}_K$. Si φ est plat (resp. une immersion ouverte, un isomorphisme), on peut trouver deux éclatements formels $\mathfrak{u}: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$, $\mathfrak{o}: \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$ et un morphisme plat (resp. une immersion ouverte, un isomorphisme) $\mathfrak{f}: \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{X}'$ tels que $\varphi \circ \mathfrak{o}_K = \mathfrak{o}_K \circ \mathfrak{f}_K$.*

Le premier résultat est démontré dans [M] en 4.3.13. Les autres résultent de 3.1.5.

3.1.7. PROPOSITION. *Si V est une variété analytique compacte quasi-séparée, il existe un schéma formel admissible $\mathcal{X}$ sur $\mathfrak{V}$ tel que $V \cong \mathcal{X}_K$.*

Ce résultat est démontré dans [M] en 4.3.14.

3.1.8. DÉFINITION. On dit que $\mathcal{X}$ est un modèle (formel) pour V .

3.1.9. PROPOSITION. *Si $\varphi: W \rightarrow V$ est un morphisme (resp. un morphisme plat, une immersion ouverte) de variétés analytiques compactes et quasi-séparés, il existe des modèles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ pour V et W et un morphisme (resp. un morphisme plat, une immersion ouverte) $\mathfrak{f}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ tels que $\varphi = \mathfrak{f}_K$.*

Cela résulte de 3.1.7 et de 3.1.6.

3.2. Schémas formels géométriquement réduits.

3.2.1. Si $\mathcal{X}$ est un schéma formel admissible sur $\mathfrak{V}$, on dispose par [B2] d'un morphisme de spécialisation $\mathrm{sp}: \mathcal{X}_K \rightarrow \mathcal{X}$ fonctoriel en $\mathcal{X}$. Nous noterons $X := \mathcal{X} \otimes_{\mathfrak{V}} k$ la fibre spéciale de $\mathcal{X}$ qui est un schéma sur k . Nous dirons que $\mathcal{X}$ est géométriquement réduit si ses fibres $\mathcal{X}_K$ et X sont géométriquement réduites.

3.2.2. LEMME. *Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel admissible sur $\mathfrak{V}$ avec X géométriquement réduit. Alors, $\mathcal{X}$ est géométriquement réduit.*

Cela résulte du lemme 1.1 de [BL3], qui établit une équivalence entre la catégorie des schémas formels localement admissibles à fibre spéciale réduite et celle des variétés analytiques formelles distinguées. On utilise alors le fait qu'une variété distinguée est réduite.

3.2.3. COROLLAIRE. i) Si $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est étale et $\mathcal{X}$ géométriquement réduit, alors $\mathcal{Y}$ l'est aussi.

ii) Si $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est fidèlement plat et $\mathcal{Y}$ géométriquement réduit, alors $\mathcal{X}$ l'est aussi.

3.2.4. Si R est une algèbre affinoïde, on pose $R^0 = \{f \in R, \|f\| \leq 1\}$. Si V est une variété analytique sur K , on note $\mathcal{O}_V^0$ le faisceau d'anneaux associé à $U := \text{Spm} R \rightarrow R^0$. Si $\mathcal{X}$ est un schéma formel sur $\mathcal{V}$, on pose $\mathcal{O}_\mathcal{X}^0 = \text{Sp}_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}^0$. On peut vérifier que c'est la clôture intégrale de $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ dans $\text{Sp}_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K} = \mathcal{O}_\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{V}} K$. Il résulte du lemme 1.1 de [BL3] que si $\mathcal{X}$ est géométriquement réduit, alors $\mathcal{O}_\mathcal{X}^0 = \mathcal{O}_\mathcal{X}$.

3.2.5. On suppose K algébriquement clos. Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel admissible génériquement réduit (i.e. tel que $\mathcal{X}_K$ soit réduit). Alors, $\mathcal{O}_\mathcal{X}^0$ est une $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ -algèbre cohérente et $\mathcal{X}^0 := \text{Spf} \mathcal{O}_\mathcal{X}^0$ est un schéma formel admissible géométriquement réduit sur $\mathcal{V}$. De plus, tout morphisme $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ avec $\mathcal{Y}$ géométriquement réduit se prolonge de manière unique en un morphisme $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}^0$. Cela résulte aussi du lemme 1.1 de [BL3]. On peut montrer que le morphisme canonique $\mathcal{X}^0 \rightarrow \mathcal{X}$ est l'éclatement du sous schéma formel défini par l'idéal $\alpha \mathcal{O}_\mathcal{X}^0$ de $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ avec $|\alpha| \ll 1$.

3.2.7. PROPOSITION. Soit V une variété analytique compacte quasi-séparée et géométriquement réduite sur K , K' le complété de la clôture algébrique de K et $\mathcal{X}'$ un modèle géométriquement réduit de $V_{K'}$. Alors, quitte à faire une extension finie séparable de K , il existe un modèle géométriquement réduit $\mathcal{X}$ de V tel que $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}'$.

Cela résulte des propositions 1.3 et 1.4 de [BL1] et du lemme 1.1. de [BL3].

3.3. Applications aux courbes.

3.3.1. DÉFINITIONS ([B1] et [B2]). Si $\mathcal{X}$ est un schéma formel sur $\mathcal{V}$ et Y est un sous schéma de $\mathcal{X}$, le tube de Y dans $\mathcal{X}$ est $]Y[:=]Y[_\mathcal{X} := \text{sp}^{-1}(Y)$ qui est ouvert dans $\mathcal{X}_K$. Pour $\eta \xrightarrow{<} 1$, on définit le tube $[Y]_\eta$ de rayon η de Y dans $\mathcal{X}$ de manière locale sur $\mathcal{X}$: Si Y est le sous-schéma fermé de $\mathcal{X}$ défini par $f_i = 0$ modulo $\mathfrak{m}$, alors $]Y[$ est défini par $|f_i| < 1$ et $[Y]_\eta$ est l'ouvert de $\mathcal{X}_K$ défini par $|f_i| \leq \eta$. Les $[Y]_\eta$ forment un recouvrement (admissible) de $]Y[$.

3.3.2. THÉORÈME. Si $\mathcal{X}$ est un schéma formel géométriquement réduit et x un point fermé de $\mathcal{X}$, alors $]x[_\mathcal{X}$ est géométriquement connexe.

Cela résulte du théorème 6.1 de [Bo2] et du lemme 1.1 de [BL3].

3.3.3. DÉFINITION. Une *modification admissible* $u: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ est un morphisme de schémas formels admissibles qui induit l'identité sur les fibres génériques.

3.3.4. PROPOSITION. Si $u: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ est une *modification admissible* avec $\mathcal{X}$ géométriquement réduit, alors u est surjectif à fibres géométriquement connexes.

Berthelot montre dans [B2] que les applications de spécialisation $\mathcal{X}'_K \rightarrow \mathcal{X}'$ et $\mathcal{X}_K \rightarrow \mathcal{X}$ sont surjectives. Il suit que u est surjectif. Puisque l'image par spécialisation d'un connexe est connexe, on déduit du théorème 3.3.2 que les fibres de u sont géométriquement connexes.

3.3.5. THÉORÈME. Soit C une courbe projective sur K et $\mathcal{X}$ un modèle géométriquement réduit de C (i.e. de C^{an}). Alors X est une courbe projective sur k de même genre arithmétique que C .

Cela résulte du théorème 2.8c) de [Bo1] et du lemme 1.1 de [BL3].

3.3.6. PROPOSITION. On suppose K non ramifié (i.e. à corps résiduel algébriquement clos). Soit $\mathcal{X}$ un modèle géométriquement réduit d'une courbe projective C sur K et $u: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ une modification admissible. Alors, l'homomorphisme $H_1(X') \rightarrow H_1(X)$ est surjectif. Supposons aussi $\mathcal{X}'$ géométriquement réduit. Alors, si les singularités de X sont ordinaires, celles de X' aussi on a des isomorphismes naturels $H_1(X') = H_1(X)$, $H^1(X, \mathcal{O}) = H^1(X', \mathcal{O})$ et $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}) = H^1(\tilde{X}', \mathcal{O})$.

Cela résulte de 3.3.4, 2.5.4 et 2.5.6.

3.3.7. PROPOSITION. Soit $\mathcal{X}$ un modèle d'une courbe projective non-singulière C sur K algébriquement clos. Il existe alors une modification admissible $u: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ ou $\mathcal{X}'$ est à singularités ordinaires et composantes irréductibles lisses.

On sait par [BL2] que C possède un modèle à singularités ordinaires. On peut donc, grâce à 3.3.6 supposer que $\mathcal{X}$ est un tel modèle de C . On peut alors éclater les points multiples comme dans [BL1], § 2 et on obtient ainsi une modification $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ avec $\mathcal{X}'$ à singularités ordinaires et composantes irréductibles lisses.

3.4. Voisinages stricts de schémas affines et lisses.

3.4.1. DÉFINITION ([B1] et [B2]). Soit $\mathcal{P}$ un schéma formel admissible, X un fermé de $\mathcal{P}$ et U un ouvert de X de complémentaire Z . On dit qu'un ouvert V de $|X|$ est un *voisinage strict* de $]U[$ dans $|X|$ si V et $]Z[$ forment un recouvrement (admissible) de $|X|$.

3.4.2. DÉFINITION ([K]). On dit que qu'une partie affinoïde V d'une variété affinoïde V' est *relativement compacte* s'il existe une immersion fermée $V \rightarrow B^N$ telle que V' soit contenu dans la boule ouverte B^N .

3.4.3. Il résulte du corollaire 5.10 de [Lu] que si $\mathcal{X}$ est un schéma formel propre et plat et U un ouvert affine de X , il existe un ouvert affinoïde V de $\mathcal{X}_K$ tel que $]U[_{\mathcal{X}} \subset V$.

3.4.4. LEMME. Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel admissible, U un ouvert affine de X et V un ouvert affinoïde de $\mathcal{X}_K$ tel que $]U[_{\mathcal{X}} \subset V$, alors V est un voisinage strict de $]U[_{\mathcal{X}}$ dans $\mathcal{X}_K$.

Soit $\mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}'$ une suite d'immersions ouvertes dont la fibre générique est $]U[_{\mathcal{X}} \rightarrow V \rightarrow \mathcal{X}_K$. Puisque $]U[_{\mathcal{X}} \subset V$, il est montré dans le lemme 2.5 de [Lu] que l'adhérence Y' de U' dans Y est propre. On en déduit que l'immersion $Y' \rightarrow X'$ est fermée. Il résulte alors de [B2] que $]U'[_{\mathcal{Y}}$, et à fortiori $V =]Y[_{\mathcal{Y}}$, est un voisinage strict de $]U[_{\mathcal{X}}$ dans $\mathcal{X}_K = \mathcal{X}'_K$.

3.4.5. LEMME. Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel propre et U un ouvert affine et lisse de X . Soit Y un schéma affine et lisse sur $\mathfrak{V}$ tel que $U = Y_K$ et $Y \rightarrow A_K^N$ une immersion fermée. Il existe alors un système fondamental de voisinages stricts V_λ de $]U[_{\mathcal{X}}$ dans $\mathcal{X}_K$ et des isomorphismes $V_\lambda \cong B_\lambda^N \cap Y_K^{\text{an}}$. On peut supposer que ces isomorphismes sont compatibles entre eux et induisent un isomorphisme $\tilde{Y}_K \cong]U[_{\mathcal{X}}$ qui relève l'identité de U .

Puisque U est affine et lisse, l'immersion ouverte $U \rightarrow X$ se relève en une immersion ouverte $\hat{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ qui induit un isomorphisme $\hat{Y}_K \cong]U[_{\mathcal{X}}$. De plus, puisque $\mathcal{X}$ est propre, il existe W affinoïde de $\mathcal{X}_K$ tel que $]U[_{\mathcal{X}} \subset W$. Il résulte alors de [Bo3] qu'il existe $\lambda > 1$ et une immersion ouverte $B_\lambda^N \cap Y_K^{\text{an}} \rightarrow W$ induisant un isomorphisme $\hat{Y}_K \cong]U[_{\mathcal{X}}$ qui relève l'identité de U . Soit V_λ l'image de $B_\lambda^N \cap Y_K^{\text{an}}$ dans W . Puisque $\hat{Y}_K \subset B_\lambda^N \cap Y_K^{\text{an}}$, on a $]U[_{\mathcal{X}} \subset V_\lambda$ et on voit donc par 3.4.4 que V_λ est un voisinage strict de $]U[_{\mathcal{X}}$ dans $\mathcal{X}_K$.

3.4.6. PROPOSITION. *Soit $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{X}'$) un schéma formel propre et plat et U (resp. U') un ouvert affine et lisse de X . Alors, tout morphisme $f: U' \rightarrow U$ se relève en un morphisme $\varphi: V' \rightarrow V$ entre un voisinage strict de $]U'[_x$ dans $\mathcal{X}'_K$ et un voisinage strict de $]U[_x$ dans $\mathcal{X}_K$. De plus, si f est fini, un isomorphisme, dominant, plat, fidèlement plat, lisse, étale ou un revêtement galoisien, on peut trouver φ ayant la même propriété.*

La première assertion résulte du lemme précédent. Les autres peuvent se démontrer en utilisant le théorème d'approximation de [Bo3].

3.4.7. COROLLAIRE. *Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel propre et plat, U un ouvert affine et lisse de X et V un ouvert affinoïde de $\mathcal{X}_K$. Alors, $]U[_x \subset V$ si et seulement si V est un voisinage strict de $]U[_x$ dans $\mathcal{X}_K$.*

3.4.8. EXEMPLE. Soit $\mathcal{X}$ un modèle géométriquement réduit d'une courbe projective réduite C sur K algébriquement clos et U un ouvert affine et lisse dense de X . Soit $\tilde{X}$ la normalisée de X et Y une composante de $\tilde{X}$. C'est une courbe projective non-singulière sur k et il existe donc un schéma (formel) $\mathcal{Y}$ sur $\mathfrak{V}$ tel que $\mathcal{Y} \otimes_{\mathfrak{V}} k = Y$ (voir 5.2.5). On peut considérer U comme un ouvert de $\tilde{X}$. Soit $y \in Y \setminus U$. Puisque $\mathcal{Y}$ est lisse, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_y$ de y dans $\mathcal{Y}$ et un morphisme étale $u: \mathcal{U}_y \rightarrow \tilde{P}_{\mathfrak{V}}^1$ tel que $u(y) = O$. Celui-ci induit par [B2] un isomorphisme $]y[_{\eta} \cong D(0, \eta^-)$ pour $\eta \rightarrow 1$. Les $V_{Y_{\eta}} := \mathcal{Y}_K \setminus \coprod]y[_{\eta}$ forment un système fondamental de voisinages stricts (connexes par [B2]) de $]U \cap Y[_$ dans $\mathcal{Y}_K$ et on a $V_{Y_{\eta}} \cap]y[_{\eta} =: R_{y\eta} \cong D(0, 1^-) \setminus D(0, \eta^-)$. On déduit alors de 3.4.6 qu'il existe un système fondamental de voisinages stricts $V_{\eta} \cong \coprod V_{Y_{\eta}}$ de $]U[_$ dans C tel que, si $x \notin U$, on ait $V_{Y_{\eta}} \cap]x[_{\eta} \cong \coprod R_{y\eta}$ ou $R_{y\eta}$ est (isomorphe à) une couronne semiouverte de rayon η pour $y \in Y$ tel que $\pi(y) = x$.

3.5. Conjecture. *Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel admissible sur $\mathfrak{V}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:*

- a) $\mathcal{X}_K$ est lisse et X est une courbe à singularités ordinaires
- b) *Localement pour la topologie étale, $\mathcal{X}$ est isomorphe à un modèle géométriquement réduit de $P_K^{1, \text{an}}$.*

La seconde condition signifie que si $x \in X$, il existe un schéma formel $\mathcal{X}'$, un point x' de X' , un modèle géométriquement réduit $\mathcal{P}$ de $P_K^{1, \text{an}}$ et des morphismes étales $u: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ et $v: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{P}$ avec $u(x') = x$.

Nous montrons que la seconde condition implique la première

et que la réciproque est vraie lorsque les singularités sont des points doubles.

Montrons que la seconde condition implique la première. En effet, la première condition étant locale sur X et $\mathcal{X}_K$ pour la topologie étale, on peut supposer que $\mathcal{X}$ est un modèle géométriquement réduit de $P_K^{1, \text{an}}$. On voit donc que $\mathcal{X}_K = P_K^{1, \text{an}}$ est lisse et il résulte de 3.2.4 que X est de genre arithmétique 0. Il résulte alors de 2.4.4 que les singularités de X sont ordinaires à tangentes normales.

La réciproque demande plus de travail. Quitte à faire une extension non-ramifiée de $\mathbb{V}$, on peut supposer que $\hat{\mathcal{O}}_x \cong k[t_1, \dots, t_m]/(t_i t_j, i \neq j)$. Il résulte alors de [A] qu'il existe un schéma X' sur k , un point x' de X' , et des morphismes étales $u: X' \rightarrow X$ et $v: X' \rightarrow Y := \text{Spec} k[t_1, \dots, t_m]/(t_i t_j, i \neq j)$ avec $u(x') = x$ et $v(x') = O$. Le morphisme u se relève en un morphisme étale $u: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ avec $u(x') = x$. On peut donc supposer que $\mathcal{X}' = \mathcal{X}$, c'est à dire que l'on dispose d'un morphisme étale $v: X \rightarrow Y := \text{Spec} k[t_1, \dots, t_m]/(t_i t_j, i \neq j)$ avec $v(x) = O$. On peut aussi supposer que $\mathcal{X} =: \text{Spf } \mathcal{A}$ est affine et que $v^{-1}(O) = \{x\}$. Et il suffit de montrer que v se relève en un morphisme $v: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ou $\mathcal{Y}$ est ouvert d'un modèle géométriquement réduit de $P_K^{1, \text{an}}$.

Remarquons que si, pour $i = 1, \dots, m$, on désigne par f_i un relèvement de l'image de t_i dans $\mathcal{A}$, on a $\mathcal{A} = \mathbb{V} + \mathcal{A}f_1 + \dots + \mathcal{A}f_m$. Il suffit pour cela de relever une base orthonormale convenable de A (voir [BL2], proposition 2.3).

Nous supposons comme annoncé plus haut que $m = 2$ et nous utilisons un argument de Bosch et Lütkebohmert (voir [BL2], proposition 2.3). On suppose donc que l'on dispose d'un morphisme étale $v: X \rightarrow Y := \text{Spec} k[t, s]/ts$ avec $v(x) = O$. Nous allons montrer qu'il existe des relèvements f et g des images de t et s dans $\mathcal{A}$ tels que $fg = \alpha \in \mathbb{V}$. Soit $\pi \in K$ avec $|\pi| < 1$ tel que $fg = 0 \pmod{\pi}$. Il suffit de montrer que si $fg = \alpha \pmod{\pi^n}$, il existe f', g' et α' tels que $f'g' = \alpha' \pmod{\pi^{n+1}}$, $f' = f \pmod{\pi^n}$, $g' = g \pmod{\pi^n}$ et $\alpha' = \alpha \pmod{\pi^n}$: Si $fg = \alpha + \pi^n h$ avec $h \in \mathcal{A}$, on peut écrire, grâce à la remarque ci dessus, $h = a + hf + lg$ avec $k, l \in \mathcal{A}$. On prend alors $f' := f - \pi^n l$, $g' := g - \pi^n k$ et $\alpha' := \alpha + \pi^n a$. Il suit que v se relève en un morphisme $v: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} := \text{Spf } \mathbb{V}[t, s]/ts - \alpha$. Il suffit donc pour conclure de remarquer que $\mathcal{Y}$ est un ouvert du modèle de $P_K^{1, \text{an}}$ obtenu en complétant l'éclaté du sous-schéma de $\text{Proj } \mathbb{V}[t, u]$ défini par l'idéal $(t, \alpha u)$.

4. Spécialisation en cohomologie de de Rham.

Dans ce paragraphe, nous définissons des homomorphismes, dit de spécialisation et de cospécialisation, qui relient la cohomologie de de

Rham de la fibre générique d'un schéma formel et la cohomologie rigide (d'un ouvert) de sa fibre spéciale. Nous montrons comment ceux ci s'inscrivent dans des suites exactes longues dites de spécialisation et de co-spécialisation. Enfin, nous montrons que sous certaines hypothèses techniques, qui sont satisfaites, par exemple, dans le cas des courbes, ces suites exactes longues sont duales l'une de l'autre.

On désigne par K un corps ultramétrique complet de caractéristique nulle d'anneau de valuation $\mathfrak{V}$ et de corps résiduel k .

4.1. Spécialisation.

4.1.1. DÉFINITION ([B1] et [B2]). Soit $\mathcal{P}$ un schéma formel localement de type fini, X un fermé propre de $\mathcal{P}$, U un ouvert de X avec $\mathcal{P}$ lisse au voisinage de U et V un voisinage strict lisse de $]U[$ dans $]X[$. Alors $S := V \setminus]U[$ est ouvert dans V et on pose $\Gamma_{]U[}(V, -) = \text{Ker}[\Gamma(V, -) \rightarrow \Gamma(S, -)]$. Alors, pour tout $i \geq 0$,

$$H_{\text{rig}, c}^i(U) := \mathbf{R}^i \Gamma_{]U[}(V, \Omega^\bullet)$$

est le i -ème espace de cohomologie rigide de U avec support compact.

4.1.2. DÉFINITION. Soit V une variété analytique propre et lisse sur K , $\mathcal{X}$ un modèle (formel) de V et U un ouvert lisse de X . L'homomorphisme naturel

$$\text{sp}: H_{\text{rig}, c}^i(U) = \mathbf{R}^i \Gamma_{]U[}(V, \Omega^\bullet) \rightarrow \mathbf{R}^i \Gamma(V, \Omega^\bullet) = H_{\text{dR}}^i(V)$$

est le i -ème homomorphisme de spécialisation de U dans $\mathcal{X}$.

4.1.3. DÉFINITION. Si V est une variété analytique séparée et W un ouvert compact de V , alors $S := V \setminus W$ est ouvert dans V (ce résultat est attribué à Fresnel). On pose alors $\Gamma_W(V, -) = \text{Ker}[\Gamma(V, -) \rightarrow \Gamma(S, -)]$ et pour tout $i > 0$, $H_W^i(V, -) := \mathbf{R}^i \Gamma_W(V, -)$. On pose $\Gamma_c(V, -) := \varinjlim \Gamma_W(V, -)$, où W parcourt les ouverts compacts de V . On écrit $H_c^i(V, -) := \mathbf{R}^i \Gamma_c(V, -)$. Si V est lisse sur K , $H_{\text{dR}, c}^i(V) := H_c^i(V, \Omega^\bullet)$ est le i -ème espace de cohomologie de de Rham de V à support compact.

4.1.4. DÉFINITION ([B1] et [B2]). Soit $\mathcal{P}$ un schéma formel localement de type fini, X un fermé propre de $\mathcal{P}$, U un ouvert de X avec $\mathcal{P}$ lisse au voisinage de U et V un voisinage strict lisse de $]U[$ dans $]X[$. Soit $j^\dagger = \varinjlim j_* j^*$, où $j: V' \rightarrow V$ parcourt les inclusions de voisinages stricts

V' de $]U[$ dans $\mathcal{P}$ contenus dans V . Alors $H_{\text{rig}}^i(U) := H^i(V, j^+ \Omega^\bullet)$ est le i -ème espace de cohomologie rigide de U .

4.1.5. DÉFINITION. Soit V une variété analytique propre et lisse sur K , $\mathcal{X}$ un modèle de V et U un ouvert lisse de X . L'homomorphisme naturel

$$\text{cos}: H_{dR}^i(V) \rightarrow H_{\text{rig}}^i(U)$$

est le i -ème *homomorphisme de cospécialisation* de U dans $\mathcal{X}$.

4.1.6. DÉFINITION. Soit V une variété analytique propre et lisse, $\mathcal{X}$ un modèle de V . Si $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}$ est une immersion de $\mathcal{X}$ dans un schéma formel lisse au voisinage de X , celle ci induit une immersion $V \rightarrow]X[_{\mathcal{P}}$, qui nous fournit un homomorphisme

$$\text{sp}^i: H_{\text{rig}}^i(X) \rightarrow H_{dR}^i(V)$$

appelé i -ème *homomorphisme de spécialisation* de X dans $\mathcal{X}$. On montre par la méthode du plongement diagonal de [B2] que cet homomorphisme ne dépend pas de $\mathcal{P}$.

4.2. PROPOSITION. Soit V une variété analytique propre et lisse, $\mathcal{X}$ un modèle de V , U un ouvert lisse de X et Z le complémentaire de U dans X . Alors,

i) On dispose de longues suites exactes naturelles

$$\dots \rightarrow H_{\text{rig},c}^i(U) \xrightarrow{\text{sp}} H_{dR}^i(V) \rightarrow H_{dR}^i(Z) \rightarrow H_{\text{rig},c}^{i+1}(U) \rightarrow \dots$$

et

$$\dots \rightarrow H_{dR,c}^i(Z) \rightarrow H_{dR}^i(V) \xrightarrow{\text{cos}} H_{\text{rig}}^i(U) \rightarrow H_{dR,c}^{i+1}(Z) \rightarrow \dots$$

ii) On dispose d'un morphisme naturel de suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_{\text{rig},c}^i(U) & \rightarrow & H_{\text{rig}}^i(X) & \rightarrow & H_{\text{rig}}^i(Z) \rightarrow H_{\text{rig},c}^{i+1}(U) \rightarrow \dots \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \dots & \rightarrow & H_{\text{rig},c}^i(U) & \xrightarrow{\text{sp}} & H_{dR}^i(V) & \rightarrow & H_{dR}^i(Z) \rightarrow H_{\text{rig},c}^{i+1}(U) \rightarrow \dots \end{array}$$

et le morphisme composé $H_{\text{rig}}^i(X) \xrightarrow{\text{sp}} H_{dR}^i(V) \xrightarrow{\text{cos}} H_{\text{rig}}^i(U)$ n'est autre que le morphisme de restriction.

On dispose par [V] d'un triangle $R\Gamma_{]U[}(V, \Omega^\bullet) \rightarrow R\Gamma(V, \Omega^\bullet) \rightarrow R\Gamma(\textstyle\bigcup Z, \Omega^\bullet)$ qui fournit la première suite exacte longue.

Remarquons ensuite que les tubes fermés $[Z]_\eta$ de rayon η de Z dans $\mathcal{X}$ pour $\eta < 1$ forment un système fondamental d'ouverts compacts de $\textstyle\bigcup Z$ et puisque V est compact, que les $V_\eta := V \setminus [Z]_\eta$ forment un système cofinal de voisinages stricts de $]U[$ dans V . On dispose par [V] d'un triangle

$$R\Gamma_{[Z]_\eta}(V, \Omega^\bullet) \rightarrow R\Gamma(V, \Omega^\bullet) \rightarrow R\Gamma(V_\eta, \Omega^\bullet)$$

qui fournit une suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H_{[Z]_\eta}^i(V, \Omega^\bullet) \rightarrow H_{dR}^i(V) \rightarrow H_{dR}^i(V_\eta, \Omega^\bullet) \rightarrow H_{[Z]_\eta}^{i+1}(V, \Omega^\bullet) \rightarrow \dots$$

et la seconde longue suite exacte s'obtient en passant à la limite. En effet, V étant compact, on a par [GV] pour tout i , $H_{\text{rig}}^i(U) = H^i(V, \varinjlim j_* j'^* \Omega^\bullet) = \varinjlim H^i(V', \Omega^\bullet)$.

Finalement, si $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}$ est une immersion de $\mathcal{X}$ dans un $\mathfrak{V}$ -schéma formel lisse au voisinage de X , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}]U[_{\mathcal{X}} & \hookrightarrow &]U[_{\mathcal{P}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \hookrightarrow &]X[_{\mathcal{P}} \end{array}$$

dont on déduit un morphisme de triangles distingués

$$R\Gamma_{]U[}(\textstyle\bigcup X[_{\mathcal{P}}, \Omega^\bullet) \rightarrow R\Gamma(\textstyle\bigcup X[_{\mathcal{P}}, \Omega^\bullet) \rightarrow R\Gamma(\textstyle\bigcup Z[_{\mathcal{P}}, \Omega^\bullet)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$R\Gamma_{]U[}(V, \Omega^\bullet) \rightarrow R\Gamma(V, \Omega^\bullet) \rightarrow R\Gamma(\textstyle\bigcup Z[_{\mathcal{X}}, \Omega^\bullet),$$

lequel fournit le morphisme de suites exactes longues annoncé. On en déduit de même un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(\textstyle\bigcup X[_{\mathcal{P}}, \Omega^\bullet) & \rightarrow & R\Gamma(\textstyle\bigcup X[_{\mathcal{P}}, j^! \Omega^\bullet) \\ \downarrow sp & & \downarrow \\ R\Gamma(V, \Omega^\bullet) & \rightarrow & R\Gamma(V, j^! \Omega^\bullet), \end{array}$$

ce qui démontre la dernière assertion.

4.3. PROPOSITION. *Soit V une variété analytique propre, lisse et géométriquement connexe sur K , $\mathcal{X}$ un modèle de V , U un ouvert lisse de X et $Z := X \setminus U$. On suppose que V est projective et que U possède une compactification lisse dans laquelle le complémentaire de U est un diviseur à croisements normaux. Alors les suites exactes longues de spécialisation, et de cospécialisation*

$$\dots \rightarrow H_{\text{rig},c}^i(U) \xrightarrow{\text{sp}} H_{dR}^i(V) \rightarrow H_{dR}^i(|Z|) \rightarrow H_{\text{rig},c}^{i+1}(U) \rightarrow \dots$$

et

$$\dots \rightarrow H_{dR,c}^i(|Z|) \rightarrow H_{dR}^i(V) \xrightarrow{\text{cos}} H_{\text{rig}}^i(U) \rightarrow H_{dR,c}^{i+1}(|Z|) \rightarrow \dots$$

sont duales l'une de l'autre via les accouplements de Poincaré.

On dispose du produit extérieur $\Lambda: \Omega^\bullet \otimes_K \Omega^\bullet \rightarrow \Omega^\bullet$ sur le complexe des différentielles $\Omega^\bullet$ sur V , et puisque V est projective, de l'application trace $\text{Tr}: R\Gamma(V, \Omega^\bullet) \rightarrow K[2d]$, où d est la dimension de V . L'accouplement de Poincaré est défini comme le composé

$$R\Gamma(V, \Omega^\bullet) \otimes_K R\Gamma(V, \Omega^\bullet) \rightarrow R\Gamma(V, \Omega^\bullet \otimes_K \Omega^\bullet) \rightarrow R\Gamma(V, \Omega^\bullet) \rightarrow K[2d]$$

et nos hypothèses sur V entraînent que cet accouplement est parfait.

Soit $i: |Z| \rightarrow V$ le morphisme d'inclusion. Si E est un faisceau abélien sur V , on note $\underline{\Gamma}_{|U|} E$ le noyau du morphisme d'adjonction $E \rightarrow i_* i^* E$. Puisque le morphisme d'adjonction $i^* E \rightarrow i^* i_* i^* E$ est l'identité, son noyau $i^* \underline{\Gamma}_{|U|} E$ est nul. On en déduit que si E et F sont deux faisceaux de K -vectoriels sur V , alors $i_* i^* (\underline{\Gamma}_{|U|} E \otimes_K F) = i_* (i^* \underline{\Gamma}_{|U|} E \otimes_K i^* F) = 0$ et donc que $(\underline{\Gamma}_{|U|} \underline{\Gamma}_{|U|} E \otimes_K F) = \underline{\Gamma}_{|U|} E \otimes_K F$. On en déduit un morphisme fonctoriel $\underline{\Gamma}_{|U|} E \otimes_K F \rightarrow \underline{\Gamma}_{|U|} (E \otimes_K F)$. D'autre part, si on note $\underline{\Gamma}_c E$ le noyau du morphisme surjectif $E \rightarrow j^{\dagger} E$, on voit facilement que $\underline{\Gamma}_c E \otimes_K \underline{\Gamma}_{|U|} F = 0$. Il en résulte que $E \otimes_K \underline{\Gamma}_{|U|} F = j^{\dagger} E \otimes_K \underline{\Gamma}_{|U|} F$. On voit donc que Λ induit un homomorphisme

$$\Lambda: j^{\dagger} \Omega^\bullet \otimes_K R\Gamma_{|U|} \Omega^\bullet = \Omega^\bullet \otimes_K R\Gamma_{|U|} \Omega^\bullet \rightarrow R\Gamma_{|U|} (\Omega^\bullet \otimes_K \Omega^\bullet) \rightarrow R\Gamma_{|U|} \Omega^\bullet.$$

De plus, Tr fournit un homomorphisme

$$\text{Tr}: R\Gamma_{|U|}(V, \Omega^\bullet) \rightarrow R\Gamma(V, \Omega^\bullet) \rightarrow K[2d].$$

Remarquons que $R\Gamma_{|U|}(V, \Omega^\bullet) = R\Gamma(V, \underline{\Gamma}_{|U|} \Omega^\bullet)$. L'accouplement de

Poincaré est alors défini comme le composé

$$\begin{aligned} R\Gamma(V, j^+ \Omega^\bullet) \otimes_K R\Gamma_{|\mathcal{U}|}(V, \Omega^\bullet) &\rightarrow R\Gamma(V, j^+ \Omega^\bullet \otimes_K R\Gamma_{|\mathcal{U}|} \Omega^\bullet) \rightarrow \\ &\rightarrow R\Gamma(V, \Gamma_{|\mathcal{U}|} \Omega^\bullet) \rightarrow K[2d] \end{aligned}$$

et nos hypothèses sur U entraînent, par [B2] que celui-ci est parfait.

Remarquons maintenant que, par construction, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(V, \Omega^\bullet) \otimes_K R\Gamma_{|\mathcal{U}|}(V, \Omega^\bullet) & \longrightarrow & R\Gamma(V, \Omega^\bullet) \otimes_K R\Gamma(V, \Omega^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R\Gamma(V, j^+ \Omega^\bullet) \otimes_K R\Gamma_{|\mathcal{U}|}(V, \Omega^\bullet) & \longrightarrow & K[2d] \end{array}$$

est commutatif. On voit donc que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma_{|\mathcal{U}|}(V, \Omega^\bullet) & \longrightarrow & R\Gamma(V, \Omega^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R\Gamma(V, j^+ \Omega^\bullet)^\vee [2d] & \longrightarrow & R\Gamma(V, j\Omega^\bullet)^\vee [2d] \end{array}$$

est aussi commutatif.

Le même genre d'argument montre que le produit extérieur fournit un homomorphisme

$$\Lambda: i_* i^* \Omega^\bullet \otimes_K \Gamma_c \Omega^\bullet \rightarrow \Gamma_c \Omega^\bullet$$

et que la trace fournit un homomorphisme $\text{Tr}: R\Gamma_c(V, \Omega^\bullet) \rightarrow K[2d]$. On en déduit l'accouplement de Poincaré

$$R\Gamma(|Z|, j^+ \Omega^\bullet) \otimes_K R\Gamma_{|\mathcal{U}|}(|Z|, \Omega^\bullet) \rightarrow K[2d]$$

et on vérifie que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(V, \Omega^\bullet) & \longrightarrow & R\Gamma(|Z|, \Omega^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R\Gamma(V, \Omega^\bullet)^\vee [2d] & \longrightarrow & R\Gamma_c(V, \Omega^\bullet)^\vee [2d] \end{array}$$

est commutatif. On dispose donc d'un morphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccc}
 R\Gamma_{|U|}(V, \Omega^\bullet) & \longrightarrow & R\Gamma(V, \Omega^\bullet) & \longrightarrow & R\Gamma(|Z|, \Omega^\bullet) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 R\Gamma(V, j^! \Omega^\bullet)^\vee[2d] & \longrightarrow & R\Gamma(V, \Omega^\bullet)^\vee[2d] & \longrightarrow & R\Gamma_c(V, \Omega^\bullet)^\vee[2d].
 \end{array}$$

Nous avons vu que les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes. Il en résulte que le morphisme de triangles est un isomorphisme. On obtient donc comme annoncé un isomorphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots \rightarrow H_{\text{rig}, c}^i(U) & \xrightarrow{\text{sp}} & H_{dR}^i(V) & \rightarrow & H_{dR}^i(|Z|) & \rightarrow & H_{\text{rig}, c}^{i+1}(U) \rightarrow \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots \rightarrow H_{\text{rig}}^{2d-i}(U)^\vee & \xrightarrow{\text{cos}} & H_{dR}^{2d-i}(V)^\vee & \rightarrow & H_{dR, c}^{2d-i}(|Z|)^\vee & \rightarrow & H_{\text{rig}}^{2d-i-1}(U)^\vee \rightarrow \dots
 \end{array}$$

5. Cohomologie rigide des courbes.

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats de base sur la cohomologie rigide avec et sans supports. Puis, nous calculons la dimension des espaces de cohomologie rigide avec support associés à une courbe. Pour finir, nous montrons que les groupes d'homologie, que nous avons définis dans le premier paragraphe, calculent la différence entre la cohomologie rigide d'une courbe et de sa normalisée.

Dans ce qui suit, on désigne par K un corps ultramétrique complet de caractéristique zéro, d'anneau d'entiers $\mathfrak{V}$ et de corps résiduel k .

5.1. Rappels sur la cohomologie rigide.

5.1.1. PROPOSITION ([B1] et [B2]). *Si X est une variété séparée de type fini sur k , les espaces $H_{\text{rig}}^i(X/K)$ et $H_{\text{rig}, c}^i(X/K)$ (4.1.1 et 4.1.4) ne dépendent que de X . On obtient ainsi un foncteur contravariant $X \rightarrow H_{\text{rig}}^i(X)$ et un foncteur $X \rightarrow H_{\text{rig}, c}^i(X)$, contravariant en les morphismes propres et covariant en les immersions ouvertes.*

5.1.2. On dispose d'applications naturelles $H_{\text{rig}, c}^i(X) \rightarrow H_{\text{rig}}^i(X)$. Ce sont des isomorphismes si X est propre.

5.1.3. Les applications canoniques $H_{\text{rig}}^i(X) \rightarrow H_{\text{rig}}^i(X_{\text{red}})$ et $H_{\text{rig},c}^i(X) \rightarrow H_{\text{rig},c}^i(X_{\text{red}})$ sont bijectives.

5.1.4. Si K' est une extension isométrique de K , on a des homomorphismes fonctoriels $H_{\text{rig}}^i(X/K) \otimes K' \rightarrow H_{\text{rig}}^i(X/K)$ et $H_{\text{rig},c}^i(X/K) \otimes K' \rightarrow H_{\text{rig},c}^i(X/K)$. Ce sont des isomorphismes si K'/K est finie.

5.1.5. PROPOSITION ([B2]). *Si U est un ouvert de X et Z le complémentaire de U dans X , on a une suite exacte longue naturelle*

$$\dots \rightarrow H_{\text{rig},c}^i(U) \rightarrow H_{\text{rig},c}^i(X) \rightarrow H_{\text{rig},c}^i(Z) \rightarrow H_{\text{rig},c}^{i+1}(U) \rightarrow \dots$$

5.1.6. Si Y est un schéma (formel) propre et lisse de fibre générique V et de fibre spéciale X , alors $H_{\text{rig}}^i(X) = H_{\text{dR}}^i(V)$.

5.1.7. PROPOSITION ([B2]). *Si X est une variété sur k , alors la dimension de $H_{\text{rig}}^0(X/K)$ (resp. de $H_{\text{rig},c}^0(X/K)$) est égale au nombre géométrique de composantes connexes (resp. de composantes connexes propres) de X . De plus, $H_{\text{rig}}^0(X/K)$ et $H_{\text{rig},c}^0(X/K)$ commutent aux extensions isométriques de K . Enfin, si Z est fini, $H_{\text{rig}}^i(Z/K) = 0$ pour $i > 0$.*

5.1.8. Remarquons que si X est une courbe géométriquement réduite sur k et $\tilde{X}$ sa normalisée, alors, l'application $H_{\text{rig},c}^1(X/K) \rightarrow H_{\text{rig},c}^1(\tilde{X}/K)$ est surjective: En effet, si U est un ouvert lisse dense de X , on dispose d'un morphisme naturel de suites exactes

$$\begin{array}{ccc} \dots \rightarrow H_{\text{rig},c}^1(U) & \rightarrow & H_{\text{rig},c}^1(X) \rightarrow 0 \\ \parallel & & \downarrow \\ \dots \rightarrow H_{\text{rig},c}^1(U) & \rightarrow & H_{\text{rig},c}^1(\tilde{X}) \rightarrow 0. \end{array}$$

5.2. Relèvement des courbes propres et lisses.

5.2.1. LEMME. *La valeur absolue de Gauss sur $K(\{T_i\})$ qui est donnée par $|\sum a_\mu T^\mu| = \max |a_\mu|$ si $\sum a_\mu T^\mu \in K[\{T_i\}]$ est caractérisée par le fait que pour tout i , on a $|T_i| \leq 1$ et que, si on note t_i l'image de T_i dans sa réduction, alors les t_i sont algébriquement indépendants sur k .*

Supposons que pour tout i , on ait $|T_i| \leq 1$. On a alors $|\sum a_\mu T^\mu| \leq \max |a_\mu|$. Si $|\sum a_\mu T^\mu| < |a_{\mu_0}|$, alors, quitte à diviser par a_{μ_0} , on peut supposer que $|\sum a_\mu T^\mu| < 1$ et que $|a_{\mu_0}| = 1$. On voit donc que les

t_i sont algébriquement dépendants sur k . La réciproque est immédiate.

5.2.2. DÉFINITION. On dit qu'un corps de caractéristique p est (*absolument*) *de type fini* si il est de type fini sur son corps premier F_p . On dit qu'il est (*absolument*) *transcendant* s'il est transcendant sur F_p .

5.2.3. LEMME. Soit k' un sous-corps de k absolument transcendant. Alors, il existe un sous-corps fermé de K ayant k' pour corps résiduel et sur lequel la valeur absolue induite est discrète.

On a $k' = F_p(\{t_i\})$, les t_i étant algébriquement indépendants sur k . On peut relever, pour tout i , t_i en $T_i \in K$ et il résulte de 5.2.1 que la valeur absolue induite par K sur $Q(\{T_i\})$ est discrète. Soit K' la fermeture topologique de $Q(\{T_i\})$ dans K . C'est un sous corps fermé de K sur lequel la valeur absolue est discrète, et ayant pour corps résiduel k' .

5.2.4. LEMME. Soit k' un sous-corps de k absolument de type fini. Alors, quitte à faire une extension finie de K , il existe un sous-corps fermé de K ayant k' pour corps résiduel sur lequel la valeur absolue induite est discrète.

Soit $t_1, \dots, t_r$ une base de transcendance de k'/F_p et K_0 un sous-corps de K ayant $F_p(t_1, \dots, t_r)$ pour corps résiduel et sur lequel la valeur absolue induite est discrète. Puisque k' est de type fini sur F_p , on peut écrire $k' = F_p(t_1, \dots, t_n)$ avec $t_{r+1}, \dots, t_n$ algébriques sur $F_p(t_1, \dots, t_r)$. Soit K^{alg} une clôture algébrique de K et K_0^{alg} la fermeture algébrique de K_0 dans K^{alg} . On peut relever $t_{r+1}, \dots, t_n$ en $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in K_0^{\text{alg}}$. La valeur absolue de K se prolonge de manière unique à $K[\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n]$ qui est une extension finie de K et $K'[\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n]$ est un sous-corps fermé de $K[T_{r+1}, \dots, T_n]$ sur lequel la valuation est discrète et dont le corps résiduel est k' .

5.2.5. PROPOSITION. Soit X une courbe propre et lisse sur k . Alors, quitte à faire une extension finie de K , il existe une courbe propre et lisse Y sur $\mathfrak{V}$ telle que $X = Y \otimes_{\mathfrak{V}} k$.

Puisque X est de type fini, X est définie sur un sous-corps absolument de type fini k' de k . On peut donc supposer par 5.2.4 que la valuation est discrète. Le résultat est alors bien connu (corollaire 7.4 de [G]).

5.3. THÉORÈME. Soit X une courbe sur k , d son genre géométrique, t son genre topologique et c (resp. c' , resp. n , resp. n') le nombre géométrique de composantes connexes (resp. composantes connexes propres, resp. composantes irréductibles, composantes irréductibles propres) de X . Enfin, on note v le nombre géométrique de points manquant sur X . On a alors

$$\dim H_{\text{rig}, c}^0(X/K) = c', \quad \dim H_{\text{rig}, c}^1(X/K) = 2d + t + c' - c + v,$$

$$\dim H_{\text{rig}, c}^2(X/K) = n \text{ et } H_{\text{rig}, c}^i(X/K) = 0 \text{ pour } i > 2.$$

De plus, $H_{\text{rig}, c}^i$ commute aux extensions isométriques de K .

Puisque, par 5.1.3 et 5.1.4, la cohomologie rigide ne dépend que du sous-schéma maximal réduit et commute aux extensions finies de K , on peut supposer X géométriquement réduit.

Quitte à faire une autre extension finie de K , on peut aussi supposer que X possède une compactification X' telle que le complémentaire S de X dans X' soit composé de points non-singuliers. On dispose alors par 5.1.5, 5.1.2 et 5.1.7, d'une suite exacte longue

$$0 \rightarrow H_{\text{rig}, c}^0(X) \rightarrow H_{\text{rig}}^0(X') \rightarrow H_{\text{rig}}^0(S) \rightarrow H_{\text{rig}, c}^1(X) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(X') \rightarrow 0$$

et d'isomorphismes $H_{\text{rig}, c}^i(X) \rightarrow H_{\text{rig}}^i(X')$ pour $i > 1$. On peut donc supposer, grâce à 5.1.7, que X est propre (et géométriquement réduit).

La normalisée $\tilde{X}$ de X est alors propre et lisse. On choisit un ouvert lisse dense U dans X de complémentaire Z et on note $\tilde{Z}$ l'image inverse de Z dans $\tilde{X}$. Si pour tout point x de X^{alg} , on note m_x le nombre de branches en x , on a une suite exacte (longue)

$$0 \rightarrow \Gamma(X^{\text{alg}}, \mathbf{Z}) \rightarrow \Gamma(\tilde{X}^{\text{alg}}, \mathbf{Z}) \rightarrow \oplus \mathbf{Z}^{m_x} / \mathbf{Z} \rightarrow H_{\text{et}}^1(X^{\text{alg}}, \mathbf{Z}) \rightarrow 0$$

qui nous donne $t = \tilde{v} - v + c - n$ ou v (resp. $\tilde{v}$) est le nombre géométrique de points de Z (resp. $\tilde{Z}$). D'autre part, on dispose par 5.1.5 et 5.1.1 d'un morphisme naturel de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H_{\text{rig}, c}^0(U) & \rightarrow & H_{\text{rig}}^0(X) & \rightarrow & H_{\text{rig}}^0(Z) & \rightarrow & H_{\text{rig}, c}^1(U) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 \rightarrow H_{\text{rig}, c}^0(U) & \rightarrow & H_{\text{rig}}^0(\tilde{X}) & \rightarrow & H_{\text{rig}}^0(\tilde{Z}) & \rightarrow & H_{\text{rig}, c}^1(U) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(\tilde{X}) \rightarrow 0. \end{array}$$

On se ramène ainsi facilement au cas où X est propre et lisse. Quitte à faire encore une autre extension finie de K , on peut par 5.2.5, relever

X en un schéma (formel) propre et lisse Y sur $\mathfrak{V}$ et on a $H_{\text{rig}}^i(X/K) = H_{dR}^i(Y_K/K)$. Puisque X et Y_K ont même genre par 3.3.5, la proposition résulte, dans ce cas, de l'énoncé analogue en cohomologie de de Rham.

5.4. Cohomologie rigide et homologie simpliciale.

Dans ce qui suit, on suppose k algébriquement clos.

5.4.1. Si X est une variété propre sur k et si K_0 est le corps de fractions de $W(k)$, on montre dans [ELS] que $H_{\text{et}}^1(X/K_0)$, (voir 2.6.3) s'identifie canoniquement à la partie de pente nulle de $H_{\text{rig}}^1(X/K_0)$. Puisque, pour les courbes, $H_{\text{rig}}^1(X/K)$ commute aux extensions finies de K , on en déduit que $H_{\text{et}}^1(X/\bar{K})$ est de manière naturelle, un sous-espace de $H_{\text{rig}}^1(X/K)$. Il en va donc de même par 2.3.7 de $H^1(\Delta(X), K)$.

5.4.2. PROPOSITION. *Si X est une courbe propre sur k , la suite*

$$0 \rightarrow H^1(\Delta(X), K) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(\tilde{X}) \rightarrow 0.$$

est exacte.

Nous avons vu en 2.3.5 que la suite

$$0 \rightarrow H^1(\Delta(X), K) \rightarrow H_{\text{et}}^1(X/K) \rightarrow H_{\text{et}}^1(\tilde{X}/K) \rightarrow 0.$$

est exacte. On en déduit que la suite

$$0 \rightarrow H^1(\Delta(X), K) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(\tilde{X}) \rightarrow 0$$

est presque exacte (2.4.4). Elle est donc exacte car, comme nous l'avons vu en 5.3, la dimension de $H_{\text{rig}}^1(X)$ est égale à la somme de celles de $H_{\text{rig}}^1(\tilde{X})$ et de $H^1(\Delta(X), K)$.

5.4.3. COROLLAIRE. *Le noyau de l'application de restriction $H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(U)$ est naturellement isomorphe à $H^1(\Delta(X), \mathbb{Z})$.*

On sait que l'application canonique $H_{\text{rig}, c}^1(U) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(\tilde{X})$ est surjective. Par dualité (4.3), l'application de restriction $H_{\text{rig}}^1(\tilde{X}) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(U)$ est injective. Or nous avons vu en 5.4.2 que $H^1(\Delta(X), \mathbb{Z})$ est le noyau de l'application canonique $H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(\tilde{X})$.

5.4.4. Soit X une courbe sur k et $X \rightarrow \mathcal{P}$ une immersion dans un schéma formel localement de type fini lisse au voisinage de X si bien que $H_{\text{rig}}^i(X) = H^i(|X|, \Omega^\bullet)$. L'application canonique $K \rightarrow R\text{sp}_* \Omega_{|X|}^\bullet$ induit alors un morphisme $H^1(X, K) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(X)$. Par construction

dans [ELS], on voit que cette application n'est autre que la composée des applications $H^1(X, K) \rightarrow H^1(\Delta(X), K)$ de 2.3.9 et $H^1(\Delta(X), K) \rightarrow H^1_{\text{rig}}(X)$ de 5.4.3.

6. La filtration par le poids.

Dans ce paragraphe, nous montrons tout d'abord que la cohomologie analytique à coefficients constants d'une courbe propre s'injecte dans sa cohomologie cohérente. Nous définissons ensuite la filtration par le poids associée à un modèle géométriquement réduit d'une courbe projective lisse et nous démontrons un théorème d'orthogonalité pour cette filtration. Pour conclure, nous définissons la filtration par le poids (absolue) sur la cohomologie de de Rham d'une courbe projective non-singulière et nous donnons ses principales propriétés.

Dans ce qui suit, on désigne par K un corps ultramétrique complet algébriquement clos de caractéristique nulle d'anneau de valuation $\mathfrak{V}$ et de corps résiduel k .

6.1. Cycles analytiques.

Dans ce qui suit, C est une courbe (réduite) sur K .

6.1.1. PROPOSITION. *Si $\mathcal{X}$ est un modèle géométriquement réduit de C , alors $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ est un $\mathfrak{V}$ -module libre. De plus, on a*

$$H^1(X, \mathcal{O}) \cong H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}) \otimes_{\mathfrak{V}} k \text{ et } H^1(C, \mathcal{O}) \cong H^1(C^{\text{an}}, \mathcal{O}) \cong H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}) \otimes_{\mathfrak{V}} K.$$

On a toujours $\dim H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}) \otimes_{\mathfrak{V}} K \leq \dim H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}) \otimes_{\mathfrak{V}} k$. D'autre part, on sait que $H^1(C, \mathcal{O}) = H^1(C^{\text{an}}, \mathcal{O}) = H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}) \otimes_{\mathfrak{V}} K$ et que $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}) \otimes_{\mathfrak{V}} k$ s'injecte dans $H^1(X, \mathcal{O})$. Puisque, par 3.3.5, $\dim H^1(C, \mathcal{O}) = \dim H^1(X, \mathcal{O})$, on a nécessairement

$$\dim H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}) \otimes_{\mathfrak{V}} K = \dim H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}) \otimes_{\mathfrak{V}} k \text{ et } H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}) \otimes_{\mathfrak{V}} k = H^1(X, \mathcal{O}),$$

ce qui implique que $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ est de type fini sans torsion et donc libre comme annoncé.

6.1.2. PROPOSITION. *Si $\mathcal{X}$ est un modèle géométriquement réduit de C , alors l'homomorphisme (de spécialisation)*

$$\begin{aligned} \text{sp: } H^1(\Delta(X), \mathbf{Z}) = H^1_{\text{et}}(X, \mathbf{Z}) &\rightarrow H^1_{\text{et}}(\mathcal{X}, \mathcal{O}) \cong \\ &\cong H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(C^{\text{an}}, \mathcal{O}) \cong H^1(C, \mathcal{O}) \end{aligned}$$

est injectif.

Considérons l'application $H^1(\Delta(X), \mathfrak{V}) \cong H_{\text{ét}}^1(\mathcal{X}, \mathfrak{V}) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}) \cong H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O})$. En tensoriant par k , on obtient l'application canonique $H^1(\Delta(X), k) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O})$ qui est injective par 2.3.4. Puisque $H^1(\Delta(X), \mathfrak{V})$ et $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ sont des $\mathfrak{V}$ -modules de type fini, l'application $H^1(\Delta(X), \mathfrak{V}) \rightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ est aussi injective. Finalement, puisque $H^1(\Delta(X), \mathbf{Z})$ et $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ sont sans torsion, l'application composée $H^1(\Delta(X), \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(C, \mathcal{O})$ est bien injective.

6.1.3. PROPOSITION. *Si $\mathcal{X}$ est un modèle géométriquement réduit de C , alors l'injection $\text{sp}: H^1(\Delta(X), \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(C, \mathcal{O})$ est à valeurs dans $H^1(C^{\text{an}}, \mathbf{Z})$. Si $\mathcal{X}$ est à singularités ordinaires, on obtient un isomorphisme $H^1(\Delta(X), \mathbf{Z}) \cong H^1(C^{\text{an}}, \mathbf{Z})$ dont on déduit un accouplement parfait $H_1(X) \times H^1(C^{\text{an}}, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$.*

On a $H^1(C^{\text{an}}, \mathbf{Z}) \cong \check{H}^1(C^{\text{an}}, \mathbf{Z}) \cong \lim \check{H}^1(\mathcal{X}, \mathbf{Z}) \cong \lim H^1(X, \mathbf{Z})$, la limite étant prise sur tous les modèles formels $\mathcal{X}$ de C . Par 3.3.7, il suffit de prendre la limite sur les $\mathcal{X}$ à singularités ordinaires et composantes irréductibles lisses auquel cas $H^1(X, \mathbf{Z})$ est égal par 2.2.7 à $H^1(\Delta(X), \mathbf{Z})$ qui est indépendant de $\mathcal{X}$ par 3.3.6. On voit donc que $H^1(C^{\text{an}}, \mathbf{Z}) \cong H^1(\Delta(X), \mathbf{Z})$ si X est à singularités ordinaires et composantes irréductibles lisses. On déduit alors de 3.3.6 que $H^1(C^{\text{an}}, \mathbf{Z}) \supset H^1(\Delta(X), \mathbf{Z})$ si X est réduit et que $H^1(C^{\text{an}}, \mathbf{Z}) \cong H^1(\Delta(X), \mathbf{Z})$ si X est à singularités ordinaires.

6.1.4. COROLLAIRE. *L'homomorphisme naturel $H^1(C^{\text{an}}, \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(C^{\text{an}}, \mathcal{O}) = H^1(C, \mathcal{O})$ est injectif.*

Cela résulte en effet de 6.1.2 et 6.1.3.

6.2. Description de l'accouplement.

Soit $\mathcal{X}$ un modèle géométriquement réduit d'une courbe C sur K .

Nous avons vu en 3.4.8 que si l'on se donne un ouvert affine lisse dense U de X , on peut trouver un voisinage strict V de $]U[$ dans C tel que, si $x \notin U$, on ait $V \cap]x[= \coprod R_y$ ou R_y est un couronne semi-ouverte pour $y \in \tilde{X}$ tel que $\pi(y) = x$. Considérons le recouvrement de C^{an} formé de V et $]S[$ ou $S = X \setminus U$ si bien que $V \cap]S[= \coprod R_y$. Les composantes connexes de $]S[$ sont les $]x[$ avec $x \in S$ et celles de V sont indexées par les composantes Y de $\tilde{X}$ et peuvent se noter V_Y . Notons 1_x (resp. 1_x , resp. 1_Y) la fonction caractéristique sur R_y (resp. $]x[$, resp. V_Y).

Nous avons vu en 2.2.3 que $H_q(X)$ est la cohomologie du complexe $C(X)$ ou $C(X)_0$ est le groupe libre sur l'ensemble des points génériques ξ de X et pour $q > 0$, $C(X)_q$ est le quotient du groupe libre sur les

$[y_0, \dots, y_q]$, avec $y_0, \dots, y_q$ distincts au dessus du même point multibranche x de X , par les relations $[y_{\sigma(0)}, \dots, y_{\sigma(q)}] = (-1)^\sigma [y_0, \dots, y_q]$, la différentielle étant définie par $d[y_0, y_1] = \xi_0 - \xi_1$ si $\tilde{\xi}_0$ et $\tilde{\xi}_1$ se spécialisent en y_0 et y_1 et $d[y_0, \dots, y_q] = \sum [y_0, \dots, \tilde{y}_i, \dots, y_q]$ si $q > 0$.

On définit alors un accouplement $C(X) \times \check{C}(\{V,]S[, \mathbf{Z}\}) \rightarrow \mathbf{Z}$ par

$$\langle [y, y'], 1_{y''} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } y'' = y', \\ -1 & \text{si } y'' = y, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\langle \xi, 1_Y \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{\xi} \text{ est le point générique de } Y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient ainsi un accouplement parfait $H_1(X) \times \check{H}^1(\{V,]S[, \mathbf{Z}\}) \rightarrow \mathbf{Z}$ et donc un isomorphisme $\check{H}^1(\{V,]S[, \mathbf{Z}\}) = H^1(\Delta(X), \mathbf{Z})$. On dispose d'une injecton $\check{H}^1(\{V,]S[, \mathbf{Z}\}) \rightarrow H^1(C^{\text{an}}, \mathbf{Z})$ qui fournit l'homomorphisme de 6.1.3. Si $\mathcal{X}$ est à singularités ordinaires, on a $\check{H}^1(\{V,]S[, \mathbf{Z}\}) \cong H^1(C^{\text{an}}, \mathbf{Z})$ et l'accouplement que nous venons de construire correspond à celui de 6.1.3.

6.3. La filtration par le poids associée à un modèle.

Dans ce qui suit, on suppose que C est non-singulière et on se donne un modèle géométriquement réduit $\mathcal{X}$ de C (i.e. de C^{an}).

6.3.1. PROPOSITION. *Si Z est un ensemble fini de points contenant le lieu singulier de X , on dispose d'une suite exacte naturelle*

$$0 \rightarrow H_{\text{rig}}^1(X) \xrightarrow{\text{sp}} H_{dR}^1(C) \rightarrow H_{dR}^1(]Z[) \rightarrow H_{\text{rig}}^2(X) \xrightarrow{\text{sp}} H_{dR}^2(C) \rightarrow 0.$$

En effet, nous avons vu en 4.2 que si $U = X \setminus Z$, on dispose d'un morphisme de suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccc} H_{\text{rig}}^0(Z) & \rightarrow & H_{\text{rig},c}^1(U) & \rightarrow & H_{\text{rig}}^1(X) & \rightarrow & 0 \rightarrow H_{\text{rig},c}^2(U) = H_{\text{rig}}^2(X) \rightarrow 0 \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \text{sp} & & \downarrow & \parallel & & \downarrow \\ H_{dR}^0(]Z[) & \rightarrow & H_{\text{rig},c}^1(U) & \xrightarrow{\text{sp}} & H_{dR}^1(C) & \rightarrow & H_{dR}^1(]Z[) & \rightarrow & H_{\text{rig},c}^2(U) & \xrightarrow{\text{sp}} & H_{dR}^2(C) \rightarrow 0. \end{array}$$

On en déduit immédiatement la suite exacte annoncée.

6.3.2. Il résulte de 4.2, que le composé de l'homomorphisme de restriction $H_{\text{rig},c}^1(U) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(X)$ qui est surjectif, et de $\text{sp}: H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{dR}^1(C)$, qui est injectif est $\text{sp}: H_{\text{rig},c}^1(U) \rightarrow H_{dR}^1(C)$. De même, le composé de l'injection $H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{dR}^1(C)$ et de $\text{cos}: H_{dR}^1(C) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(U)$ n'est autre que l'homomorphisme de restriction $H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(U)$.

6.3.3. Nous avons vu en 4.3. que la dualité de Poincaré induisait une dualité parfait entre les suites exactes longues

$$0 \rightarrow H_{\text{rig},c}^0(U) \xrightarrow{\text{sp}} H_{dR}^0(C) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{A}^1_Z) \rightarrow H_{\text{rig},c}^1(U) \xrightarrow{\text{sp}} \\ \rightarrow H_{dR}^1(C) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{A}^1_Z) \rightarrow H_{\text{rig},c}^2(U) \xrightarrow{\text{sp}} H_{dR}^2(C) \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow H_{dR}^0(C) \xrightarrow{\text{cos}} H_{\text{rig}}^0(U) \rightarrow H_{dR,c}^1(\mathbb{A}^1_Z) \rightarrow H_{dR}^1(C) \xrightarrow{\text{cos}} \\ \xrightarrow{\text{cos}} H_{\text{rig}}^1(U) \rightarrow H_{dR,c}^2(\mathbb{A}^1_Z) \rightarrow H_{dR}^2(C) \xrightarrow{\text{cos}} H_{\text{rig}}^2(U) \rightarrow 0.$$

6.3.4. LEMME. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Delta(X), \mathbb{Z}) & \hookrightarrow & H_{\text{rig}}^1(X) \\ \downarrow \text{sp} & & \downarrow \text{sp} \\ H^1(C^{\text{an}}, \mathbb{Z}) & \hookrightarrow & H_{dR}^1(C) \end{array}$$

est commutatif.

Par fonctorialité en $\mathcal{X}$ des différentes flèches qui interviennent, on peut supposer X à singularités ordinaires et composantes irréductibles lisses. Il s'agit alors de montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathbb{Z}) & \hookrightarrow & H_{\text{rig}}^1(X) \\ \parallel \text{sp} & & \downarrow \text{sp} \\ H^1(C^{\text{an}}, \mathbb{Z}) & \hookrightarrow & H_{dR}^1(C) \end{array}$$

est commutatif. On choisit une immersion fermée i de $\mathcal{X}$ dans un schéma formel propre et lisse $\mathcal{P}$. Nous avons vu en 5.4.4 que l'inclusion du

haut est alors induite par $Z \rightarrow R \operatorname{sp}_* \Omega_{|\mathcal{X}|}^\bullet$) et en 4.1.6 que l'homomorphisme de spécialisation $\operatorname{sp}: H_{\operatorname{rig}}^1(X) \rightarrow H_{dR}^1(C)$ est induit par $i_* \Omega_{|\mathcal{X}|}^\bullet \rightarrow \Omega_{C^{\operatorname{an}}}^\bullet$. On voit donc que la flèche composée est induite par $Z \rightarrow R \operatorname{sp}_* \Omega_{C^{\operatorname{an}}}^\bullet$ qui se factorise bien par $R \operatorname{sp}_* Z$ pour donner $\operatorname{sp}: H^1(X, Z) \rightarrow H^1(C^{\operatorname{an}}, Z)$.

6.3.5. DÉFINITION. La *filtration par le poids associée à $\mathcal{X}$ sur $H_{dR}^1(C)$* est la filtration à trois crans

$$\operatorname{Fil}^3 = 0 \subset \operatorname{Fil}^2 \cong H^1(\Delta(X), K) \subset \operatorname{Fil}^1 \cong H_{\operatorname{rig}}^1(X) \subset \operatorname{Fil}^0 = H_{dR}^1(C).$$

6.3.6. DÉFINITION. Si E est un espace vectoriel sur K muni d'une application bilinéaire (anti-) symétrique parfaite $E \times E \rightarrow K$ et si F est un sous espace de E , on note $F^\perp$ l'orthogonal de F , c'est à dire le dual dans E de E/F . La filtration duale d'une filtration Fil sur E est définie par $\operatorname{Fil}_\perp^i = \operatorname{Fil}^{1-i, \perp}$. On dit qu'une filtration à r crans Fil sur E est auto duale si pour tout i , on a $\operatorname{Fil}_\perp^i = \operatorname{Fil}^{r-i}$.

6.4. THÉORÈME (D'ORTHOGONALITÉ). Soit C une courbe projective non-singulière sur K et Fil la filtration par le poids sur $H_{dR}^1(C)$ associée à un modèle géométriquement réduit $\mathcal{X}$ de C . Si $\operatorname{Fil}_\perp$ est la filtration orthogonale pour la dualité de Poincaré, on a

$$\operatorname{Fil}^2 = \operatorname{Fil}^1 \cap \operatorname{Fil}_\perp^0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Fil}_\perp^{-1} = \operatorname{Fil}_\perp^0 + \operatorname{Fil}^1.$$

De plus, Fil est autoduale si et seulement si X est à singularités ordinaires.

Soit U un ouvert lisse dense de X . Nous avons vu en 6.3.3 que l'image de $H_{\operatorname{rig}, c}^1(U)$ dans $H_{dR}^1(C) = \operatorname{Fil}^0$ par l'application de spécialisation est $H_{\operatorname{rig}}^1(X) \cong \operatorname{Fil}^1$. On voit donc que le conoyau de $\operatorname{sp}: H_{\operatorname{rig}, c}^1(U) \rightarrow H_{dR}^1(C)$ est $\operatorname{Fil}^0 / \operatorname{Fil}^1$. Par dualité (voir 6.3.4), le noyau de $\operatorname{cos}: H_{dR}^1(C) \rightarrow H_{\operatorname{rig}}^1(U)$ est $\operatorname{Fil}_\perp^0$. Nous avons aussi vu en 6.3.3. que la restriction de $\operatorname{cos}: H_{dR}^1(C) \rightarrow H_{\operatorname{rig}}^1(U)$ à Fil^1 s'identifie à l'application de restriction $H_{\operatorname{rig}}^1(X) \rightarrow H_{\operatorname{rig}}^1(U)$. On voit donc que $\operatorname{Fil}^1 \cap \operatorname{Fil}_\perp^0$ s'identifie au noyau de cette application. Grâce à 5.4.3, nous avons donc bien $\operatorname{Fil}^2 = \operatorname{Fil}^1 \cap \operatorname{Fil}_\perp^0$.

L'égalité $\operatorname{Fil}_\perp^1 = \operatorname{Fil}_\perp^0 + \operatorname{Fil}^1$ en découle formellement. On en déduit que si $\operatorname{Fil}_\perp^1 = \operatorname{Fil}^2$, alors la filtration est autoduale. Puisque $\operatorname{Fil}^2 \subset \operatorname{Fil}_\perp^0$, on voit que la filtration est autoduale si et seulement si $\operatorname{Fil}_\perp^0$ et Fil^2 ont même dimension. Par définition, la dimension de $\operatorname{Fil}_\perp^0$ est celle de $\operatorname{Fil}^0 / \operatorname{Fil}^1$. La filtration est donc autoduale si et seulement si $\dim \operatorname{Fil}^0 - \dim \operatorname{Fil}^1 = \dim \operatorname{Fil}^2$. Par 3.3.5 et 5.3, on voit que cette condition est

équivalente à $2g(X) - (2d(X) + t(X)) = t(X)$, soit encore $g(X) = d(X) + t(X)$. Et nous avons vu en 2.5.4 que cette égalité était satisfaite si et seulement si X est à singularités ordinaires.

6.5. Propriétés de la filtration par le poids.

Dans ce qui suit C , désigne toujours une courbe projective non-singulière sur K et Fil la filtration sur $H_{dR}^1(C)$ associée à un modèle géométriquement réduit $\mathcal{X}$ de C .

6.5.1. Il résulte de 6.4 que Fil^2 est égal à l'intersection de Fil^1 avec son propre orthogonal pour la dualité de Poincaré. D'autre part, si on identifie $\Gamma(C, \Omega^1)$ avec son image dans $H_{dR}^1(C)$, il résulte de 6.1.2 que $\text{Fil}^2 \cap \Gamma(C, \Omega^1) = \emptyset$.

6.5.2. L'homomorphisme de spécialisation $\text{sp}: H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{dR}^1(C)$ est une bijection sur Fil^1 . Il résulte donc de 6.3.2 que Fil^1 est aussi l'image de l'application de spécialisation $\text{sp}: H_{\text{rig}, c}^1(U) \rightarrow H_{dR}^1(C)$. Aussi, comme nous l'avons vu en 5.4.3, l'homomorphisme de spécialisation $\text{sp}: H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{dR}^1(C)$ induit un isomorphisme du noyau de l'application de restriction $H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(U)$ sur Fil^2 . Il résulte donc de 6.3.2 que Fil^2 est l'intersection de Fil^1 avec le noyau de l'homomorphisme de spécialisation $\text{cos}: H_{dR}^1(C) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(U)$.

6.5.3. Avec les mêmes hypothèses, on peut décrire la filtration sans utiliser la cohomologie rigide: Il résulte de 6.3.1 que Fil^1 est le noyau de l'application de restriction $H_{dR}^1(C) \rightarrow H_{dR}^1(|Z|)$ et de 6.4 et 6.3.3 que Fil^2 est l'intersection de Fil^1 et de l'image de l'application canonique $H_{dR, c}^1(|Z|) \rightarrow H_{dR}^1(C)$.

6.5.4. On peut paraphraser ce que nous venons de voir en disant que Fil^1 est l'intersection des noyaux des applications canoniques $H_{dR}^1(C) \rightarrow H_{dR}^1(|x|)$, pour $x \in \mathcal{X}$ et que Fil^2 est l'intersection de Fil^1 et de la somme des images des applications canoniques $H_{dR, c}^1(|x|) \rightarrow H_{dR}^1(C)$, pour $x \in \mathcal{X}$.

6.5.5. On peut décrire en partie le gradué associé à Fil : On a bien $\text{Gr}^k = 0$ si $k \neq 0, 1, 2$ et $\text{Gr}^2 = \text{Fil}^2$. De plus, si $\tilde{X}$ est la normalisée de X , il résulte de 5.4.2 que l'application canonique $H_{\text{rig}}^1(X) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(\tilde{X})$ fournit un isomorphisme entre Gr^1 et $H_{\text{rig}}^1(\tilde{X})$.

6.6. Comparaison des différentes filtrations.

Dans ce qui suit, C désigne toujours une courbe projective non-singulière sur K .

6.6.1. DÉFINITION. Si V est une variété (algébrique ou analytique) lisse sur K , la filtration naïve sur $\Omega_V^\bullet$ fournit deux suites spectrales

$$E_1^{p,q} = H^q(V, \Omega^p) \Rightarrow H_{dR}^*(V) \text{ et } E_2^{p,q} = H^p(V, H^q(\Omega^\bullet)) \Rightarrow H_{dR}^*(V).$$

La première aboutit à la *filtration de Hodge* Fil_{Hdg} et la seconde à la *filtration conjuguée* Fil_{Cnj} .

6.6.2. On sait la filtration de Hodge sur $H_{dR}^1(C)$ dégénère en E_1 . C'est donc la filtration à deux crans

$$\text{Fil}_{\text{Hdg}}^2 = 0 \subset \text{Fil}_{\text{Hdg}}^1 \cong \Gamma(V, \Omega^1) \subset \text{Fil}_{\text{Hdg}}^0 = H_{dR}^1(C).$$

On sait aussi que cette filtration est auto-duale pour la dualité de Poincaré (i.e. $\text{Fil}_{\text{Hdg}}^1$ est son propre orthogonal).

D'autre part, on voit aisément que la filtration analytique conjuguée sur $H_{dR}^1(C) \cong H_{dR}^1(C^{\text{an}})$ dégénère en E_2 . C'est donc la filtration à deux crans

$$\text{Fil}_{\text{Cnj}}^2 = 0 \subset \text{Fil}_{\text{Cnj}}^1 \cong H^1(C^{\text{an}}, K) \subset \text{Fil}_{\text{Cnj}}^0 = H_{dR}^1(C).$$

Il résulte alors de 6.1.4 que $\text{Fil}_{\text{Hdg}}^1 \cap \text{Fil}_{\text{Cnj}}^1 = \emptyset$.

6.6.3. DÉFINITION. La *filtration par le poids* Fil_{Pds} sur $H_{dR}^1(C)$ est la filtration par le poids associée à un modèle à singularités ordinaire de C .

6.6.4. La filtration par le poids sur $H_{dR}^1(C)$ est une filtration à trois crans autoduale pour la dualité de Poincaré ($\text{Fil}_{\text{Pds}}^2$ est l'orthogonal de $\text{Fil}_{\text{Pds}}^1$, et réciproquement). Cette filtration comme les deux autres est fonctorielle en C .

6.6.5. Il résulte de 6.1.3 que $\text{Fil}_{\text{Pds}}^2 = \text{Fil}_{\text{Cnj}}^1$. En d'autres termes, la filtration par le poids dédouble la filtration analytique conjuguée. C'est d'ailleurs l'unique telle filtration autoduale. On voit donc que $\text{Fil}_{\text{Hdg}}^1 \cap \text{Fil}_{\text{Pds}}^2 = \text{Fil}_{\text{Hdg}}^1 \cap \text{Fil}_{\text{Cnj}}^1 = 0$ par 6.6.2 et il résulte donc de 6.4 que $\text{Fil}_{\text{Pds}}^1 + \text{Fil}_{\text{Hdg}}^1 = H_{dR}^1(C)$. En d'autres termes, la filtration par le poids est transverse à la filtration de Hodge.

6.6.7. On peut reformuler 6.6.5 sans utiliser les filtrations: Si on identifie $\Gamma(C, \Omega^1)$ et $H^1(C^{\text{an}}, K)$ avec leurs images canoniques dans $H_{dR}^1(C)$, on a $\Gamma(C, \Omega^1) \cap H^1(C^{\text{an}}, K) = 0$. De plus, si $\mathcal{X}$ est un modèle à singularités ordinaires de C et si on identifie $H_{\text{rig}}^1(X)$ avec son image dans $H_{dR}^1(C)$, on a $H_{dR}^1(C) = H_{\text{rig}}^1(X) + \Gamma(C, \Omega^1)$.

6.6.8. Si $\mathcal{X}$ est un modèle à singularités ordinaires de C , on sait par 6.5.5. que l'on a un isomorphisme canonique entre $\mathrm{Gr}_{\mathrm{Pds}}^1$ et $H_{\mathrm{rig}}^1(\tilde{X})$. De plus, en utilisant 6.4, on obtient aussi un isomorphisme naturel entre $\mathrm{Gr}_{\mathrm{Pds}}^0$ et $H_1(X) \otimes K$, c'est à dire une suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow H_{\mathrm{rig}}^1(X) \rightarrow H_{\mathrm{dR}}^1(C) \rightarrow H_1(X) \otimes K \rightarrow 0.$$

REFERENCES

- [A] M. ARTIN, *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., **36** (1969), pp. 23-58.
- [B1] P. BERTHELOT, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p* , dans *Introduction aux cohomologies p -adiques*, Bull. Soc. Math. Fr., Mémoire n., **23** (1986).
- [B2] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, à paraître dans *Astérisque*.
- [Bo2] S. BOSCH, *Eine bemerkenswerte Eigenschaft der formellen Fasern affinoider Räume*, Math. Ann., **229** (1977), pp. 25-45.
- [Bo3] S. BOSCH, *A rigid analytic version of M. Artin's theorem on analytic equations*, Math. Ann., **255** (1981), pp. 395-404.
- [BL1] S. BOSCH - W. LUTKEBOHMERT, *Stable reduction and uniformization of abelian varieties II*, Invent. Math., **78** (1984), pp. 257-297.
- [BL2] S. BOSCH - W. LUTKEBOHMERT, *Stable reduction and uniformization of abelian varieties I*, Math. Ann., **270** (1985), pp. 349-379.
- [BL3] S. BOSCH - W. LUTKEBOHMERT, *Neron models from the rigid analytic viewpoint*, J. Reine Angew. Math., **364** (1986), pp. 69-84.
- [ELS] J.-Y. ETESSE - B. LE STUM, *Fonctions L associées aux F -isocristaux surconvergents II: Zéros et pôles unités de la fonction zêta*, prépublication de l'IRMAR 93-25 (1993).
- [G] A. GROTHENDIECK, *Revêtements étales et groupe fondamental*, SGA 1, Exposé III, Lecture Notes, **224**, Springer (1971).
- [GV] A. GROTHENDIECK - J.-L. VERDIER, *Condition de finitude Topos et sites fibrés. Applications aux questions de passage à la limite*, dans *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, SGA 4, Tome II, Exposé VI, Lecture Notes, **270** Springer (1972).
- [K] R. KIEHL, *Theorem A und Theorem B in nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Inv. Math., **2** (1967), pp. 191-214.
- [Kö] U. KÖPF, *Über eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Räumen*, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, 2. Serie, Heft 7 (1974).
- [LS1] B. LE STUM, *Cohomologie rigide et variétés abéliennes*, Thèse de troisième cycle, Rennes (1985) et Note aux C. R. Acad. Sci. Paris, t. 303, Série 1, n. 20, (1986).

- [LS2] B. LE STUM, *Applications of Rigid Cohomology to Arithmetic Geometry*, Thèse de Ph.D. (1988).
- [Lu] W. LUTKEBOHMERT, *Formal algebraic and rigid analytic geometry*, Math. Ann., 286 (1990), n. 1-3, 341-371.
- [M] F. MEHLMAN, *Ein Beweis für einen Satz von Raynaud über flache Homomorphismen affinoider Algebren*, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, 2. Serie, Heft 9 (1981).
- [Mo] A. MOKRANE, *Sur la structure de la cohomologie cristalline logarithmique des schémas semi-stables*, Thèse (1992).
- [R2] M. RAYNAUD, *Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl*, (Table ronde Anal. non archim. 1972, Paris), Bull. Soc. Math. Fr., Mémoire n. 39-40 (1974), pp. 319-327.
- [V] J.-L. VERDIER, *Cohomologie dans le topos dans Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, SGA 4, Tome II, Exposé V, Lecture Notes, 270, Springer (1972).

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 settembre 1993.