

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GEMMA PARMEGGIANI

**Sulla serie di Fitting del prodotto di due
gruppi nilpotenti finiti**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 91 (1994), p. 273-278

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1994__91__273_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1994__91__273_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sulla serie di Fitting del prodotto di due gruppi nilpotenti finiti.

GEMMA PARMEGGIANI (*)

Un gruppo finito $G = AB$ che sia prodotto di due sottogruppi nilpotenti A e B è, per un noto teorema di Kegel e Wielandt (si veda [8], p. 674), risolubile.

Recentemente S. Franciosi, F. De Giovanni, H. Heineken e M. L. Newell hanno provato in [3] che se A è abeliano e $F(G)$ indica il sottogruppo di Fitting di G , allora $AF(G)$ è normale in G .

In questa nota si estende tale risultato provando che, se $F_i(G)$ indica l' i -esimo termine della serie di Fitting di G , allora si ha il seguente

TEOREMA 1. *Se $G = AB$ è un gruppo finito prodotto di due sottogruppi nilpotenti A e B , allora $AF_{2n-1} \trianglelefteq G$ per ogni intero positivo n non inferiore alla lunghezza derivata $d(A)$ di A . In particolare la lunghezza di Fitting di G è al più $2d(A) + 1$.*

La limitazione ottenuta è ottimale, poiché per ogni numero naturale n il gruppo finito G_n definito ricorsivamente da

$$G_0 = C_p$$

e

$$G_n = (G_{n-1} \text{ wr } C_q) \text{ wr } C_p,$$

ove C_p e C_q sono i gruppi ciclici di ordini p e q , con p e q primi distinti, è prodotto di due sottogruppi nilpotenti di lunghezze derivate n ed $n + 1$ rispettivamente ed ha lunghezza di Fitting esattamente $2n + 1$.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università di Padova, Via Belzoni 7, 35100 Padova.

Il teorema viene dedotto da una proposizione di carattere più generale.

Siano $\mathcal{F}$ la classe dei gruppi risolubili finiti e Π l'insieme dei numeri primi.

Per ogni $G \in \mathcal{F}$ ed ogni $p \in \Pi$ si indichino con G_p un p -sottogruppo di Sylow di G ed $l_p(G)$ la p -lunghezza di G ; inoltre per ogni p -gruppo finito K sia

$$g(K) = \max \{l_p(H) \mid H \in \mathcal{F} \text{ e } K \text{ è un } p\text{-sottogruppo di Sylow di } H\}.$$

Si ponga la seguente

DEFINIZIONE. Siano $\mathcal{K}$ la classe dei gruppi nilpotenti finiti e $\mathcal{C}$ una sottoclasse di $\mathcal{K}$ chiusa rispetto alle immagini omomorfe. Una funzione $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$ verrà detta una *BHH-funzione* se

(i) per ogni $K \in \mathcal{C}$ si ha

$$f(K) \geq \max \{g(K_p) \mid p \in \Pi\},$$

(ii) per ogni epimorfismo $\varphi: K \rightarrow H$ con $K \in \mathcal{C}$ si ha

$$f(K) \geq f(H).$$

Se per ogni $G \in \mathcal{F}$ si indica con $l(G)$ la lunghezza di Fitting di G , allora sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 1. Se $G = AB$ è un gruppo prodotto di due sottogruppi A e B con $A \in \mathcal{C}$ e $B \in \mathcal{K}$ ed $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$ è una *BHH-funzione*, allora per ogni intero positivo n con $n \geq f(A)$, si ha:

$$AF_{2n-1}(G) \leq G.$$

In particolare da ciò segue che $l(G) \leq 2f(A) + 1$ e che se anche $B \in \mathcal{C}$ ed $f(A) = f(B)$ allora $l(G) \leq 2f(A)$.

Dalle limitazioni della p -lunghezza di un gruppo risolubile finito ottenute da P. Hall e G. Higman in [6] e da E. G. Bryukhanova in [1] e [2] si ottengono diversi esempi di *BHH-funzioni*.

Infatti se dati un gruppo risolubile finito H ed un numero primo p si indica con $d_p(H)$ la lunghezza derivata di un p -sottogruppo di Sylow H_p di H e si pone $e_p(H) = l_{g_p}(\exp(H_p))$, ove $\exp(H_p)$ denota l'esponente di H_p , allora:

(a) $f_1: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{N}$ che associa ad ogni $K \in \mathcal{K}$ la sua lunghezza derivata è una *BHH-funzione*, poiché per risultati di [2] e [6] si ha $l_p(H) \leq d_p(H)$;

(b) $f_2: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{N}$ che associa ad ogni $K \in \mathcal{K}$ il minimo numero dei generatori di K è una BHH-funzione, poiché se H_p può essere generato da d elementi allora $l_p(H) \leq d$ (si veda [8] p. 691);

(c) $f_3: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{N}$ definita per ogni $K \in \mathcal{K}$ da

$$f_3(K) = \max(\{e_p(K) \mid p \in \Pi_1\} \cup \{2e_p(K) \mid p \in \Pi_2\}),$$

ove Π_1 e Π_2 indicano l'insieme dei numeri primi non di Fermat (incluso il 2) e l'insieme dei numeri primi di Fermat rispettivamente, è una BHH-funzione, poiché da risultati di [1] e [6] si ha che se p è di Fermat

$$e_p(H) \geq \left\lceil \frac{1}{2} (l_p(H) + 1) \right\rceil,$$

se p non è di Fermat

$$e_p(H) \geq l_p(H);$$

(d) se, per ogni $m \in \mathbb{N}$, L_m è la classe dei gruppi nilpotenti definita da Heineken in [7], allora $h_m: L_m \rightarrow \mathbb{N}$ che associa m ad ogni $K \in L_m$ è una BHH-funzione.

Le considerazioni precedenti permettono di riottenere un risultato di Heineken contenuto in [7] e provano che, oltre al Teorema 1, sussistono i seguenti

COROLLARIO 1. *Se $G = AB$ è un gruppo finito prodotto di due sottogruppi nilpotenti A e B , allora se A è generato da m elementi si ha $AF_{2m-1}(G) \trianglelefteq G$.*

COROLLARIO 2. *Se $G = AB$ è un gruppo finito prodotto di due sottogruppi nilpotenti A e B ed n è un intero positivo con*

$$n \geq \max(\{e_p(A) \mid p \in \Pi_1\} \cup \{2e_p(A) \mid p \in \Pi_2\})$$

ove Π_1 è l'insieme dei numeri primi non di Fermat e Π_2 è l'insieme dei numeri primi di Fermat, allora si ha $AF_{2n-1}(G) \trianglelefteq G$.

Desidero ringraziare il Prof. Franco Napolitani per gli utili consigli offertimi nello svolgimento di questo lavoro.

DIM. DELLA PROPOSIZIONE 1. Sia $G = AB$ un gruppo di ordine minimo con $A \in \mathcal{C}$ e $B \in \mathcal{K}$ per cui esista $m \geq f(A)$ intero positivo tale che $AF_{2m-1}(G)$ non sia normale in G .

Per il teorema di Kegel e Wielandt G è risolubile.

Se esistessero N_1 ed N_2 sottogruppi normali minimi distinti di G , essendo per (ii) $f(A) \geq \max \{f(AN_1/N_1), f(AN_2/N_2)\}$ dalla minimalità di $|G|$ si avrebbe

$$\frac{AN_i}{N_i} F_{2m-1} \left(\frac{G}{N_i} \right) \leq \frac{G}{N_i}.$$

Quindi, posto $L_i/N_i = F_{2m-1}(G/N_i)$ per $i = 1, 2$, sarebbe $AL_i \leq G$ con $i = 1, 2$ ed allora da [3, Lemma 1 e Lemma 2] $AL_1 \cap AL_2 = A(L_1 \cap L_2) = AF_{2m-1}(G) \leq G$.

Dunque G ha un unico sottogruppo normale minimo N , ed N è un p -gruppo abeliano elementare per qualche primo p , essendo G risolubile.

Poiché $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ e G è un controesempio di ordine minimo, si ha $\Phi(G) = \{1\}$, per cui esiste un sottogruppo massimale M di G tale che $G = MN$ ed $M \cap N = \{1\}$, inoltre $N = F(G)$ (si veda [8, III 4.5, p. 279]).

Per [4, Theorem 1] uno tra A e B è un p -sottogruppo di Sylow di G e l'altro un p' -sottogruppo.

Si mostrerà ora che essendo $G = AB$ prodotto di due sottogruppi nilpotenti A e B , di cui uno è un p -sottogruppo di Sylow contenente $F(G)$ e l'altro è un p' -sottogruppo di Hall, per ogni $q \in \pi(A)$ si ha

$$l_q \left(\frac{G}{F_2(G)} \right) \leq l_q(G) - 1.$$

Infatti se $F(G) \leq A$, $q = p$ ed A è un p -sottogruppo di Sylow di G , inoltre $O_{p'}(G) = \{1\}$ ed $O_{p',p}(G) = O_p(G) = F(G) \leq F_2(G)$, per cui $l_q(G/F_2(G)) = l_p(G/F_2(G)) \leq l_p(G/F(G)) = l_p(G) - 1 = l_q(G) - 1$.

Altrimenti $F(G) \leq B$, B è un p -sottogruppo di Sylow di G ed A un p' -sottogruppo di Hall di G .

Sia A_q un q -sottogruppo di Sylow di G contenuto in A .

Poiché $F_2(G)/F(G)$ è un p' -gruppo ed A è un p' -sottogruppo di Hall di G , si ha $F_2(G) \leq AF(G)$ per cui, da A nilpotente si ottiene

$$C_G(O_{q'}(F_2(G))/O_p(G)) \geq A_q.$$

Essendo

$$F \left(\frac{O_{q'}(G)}{O_p(G)} \right) = \frac{O_{q'}(G)}{O_p(G)} \cap F \left(\frac{G}{O_p(G)} \right) = \frac{O_{q'}(G) \cap F_2(G)}{O_p(G)} = \frac{O_{q'}(F_2(G))}{O_p(G)}$$

si ha

$$C_{O_{q'}(G)/O_p(G)}\left(\frac{O_{q'}(F_2(G))}{O_p(G)}\right) = Z\left(\frac{O_{q'}(F_2(G))}{O_p(G)}\right),$$

per cui

$$\frac{G}{O_p(G)} \cong C_{O_{q',q}(G)/O_p(G)}\left(\frac{O_{q'}(F_2(G))}{O_p(G)}\right) = Z\left(\frac{O_{q'}(F_2(G))}{O_p(G)}\right) \frac{L}{O_p(G)},$$

ove $L = A_q \cap O_{q',q}(G)$.

Dunque $L \leq F_2(G)$ ed $O_{q',q}(G) = O_{q'}(G)R$ con R un q -sottogruppo di Sylow di $F_2(G)$, per cui $l_q(G/F_2(G)) \leq l_q(G) - 1$.

Dal momento che anche $G/F_2(G)$ è un prodotto di due sottogruppi nilpotenti di cui uno è un p -sottogruppo di Sylow contenente $F(G/F_2(G))$ e l'altro è un p' -sottogruppo di Hall, il procedimento può essere iterato, per cui si ottiene, essendo $m \geq f(A) \geq l_q(G)$ per ogni $q \in \pi(A)$, che $A \leq F_{2m}(G)$.

Poiché $AF_{2m-1}(G)/F_{2m-1}(G)$ è un sottogruppo di Hall di $F_{2m}(G)/F_{2m-1}(G)$, si ha allora $AF_{2m-1}(G) \leq G$, mentre G era stato scelto come controesempio.

Quest'ultima contraddizione prova che per ogni intero positivo $n \geq f(A)$ si ha $AF_{2n-1}(G)$ normale in G .

Ma ciò comporta $A \leq F_{2f(A)}(G)$, per cui da B nilpotente si ottiene $l(G) \leq 2f(A) + 1$. Se in più $f(A) = f(B)$, si ha anche $B \leq F_{2f(B)}(G) = F_{2f(A)}(G)$ e quindi $l(G) \leq 2f(A)$.

La dimostrazione della proposizione è così completata. ■

Per quanto il seguente teorema sia un immediato corollario del Teorema 1, se ne dà una dimostrazione indipendente che non utilizza i risultati di P. Hall, G. Higman e E. G. Bryukhanova.

TEOREMA 2. *Se $G = AB$ è un gruppo finito prodotto di due sottogruppi nilpotenti A e B , allora $AF_{2n-1}(G) \leq G$ per ogni intero positivo n non inferiore alla classe di nilpotenza $c(A)$ di A . In particolare la lunghezza di Fitting di G è al più $2c(A) + 1$.*

DIM. Sia $G = AB$ un gruppo di ordine minimo per cui esista $m \geq c(A)$ intero positivo tale che $AF_{2m-1}(G)$ non sia normale in G .

Con argomentazioni analoghe a quelle usate nella Proposizione 1 si ottiene che G è risolubile ed ha un unico sottogruppo normale minimo N che coincide con $F(G)$ ed è un p -gruppo abeliano elementare per qualche primo p , inoltre uno tra A e B è un p -sottogruppo di Sylow di G e l'altro è un p' -sottogruppo.

Non può essere $m = 1$, ossia A abeliano, perché in tal caso se fosse

$N \leq A$ da $C_G(N) = N$ si avrebbe $N = A$, mentre se fosse $N \leq B$, dal momento che $F(G)$ p -gruppo comporta $F_2(G)/N$ p' -gruppo e quindi $F_2(G) \leq NA$, si avrebbe

$$\frac{NA}{N} = \frac{NZ(A)}{N} \leq C_{G/N} \left(\frac{F_2(G)}{N} \right) \leq \frac{F_2(G)}{N},$$

da cui $NA = F_2(G)$.

Dunque $m \geq 1$, ed essendo $NZ(A) \leq F_2(G)$, la classe di nilpotenza di $AF_2(G)/F_2(G)$ è strettamente minore di quella di A , per cui per la minimalità di $|G|$ si ha

$$\frac{AF_{2m-1}(G)}{F_2(G)} = \frac{AF_2(G)}{F_2(G)} F_{2(m-1)-1} \left(\frac{G}{F_2(G)} \right) \leq \frac{G}{F_2(G)}.$$

Ma allora $AF_{2m-1}(G) \leq G$, e quest'ultima contraddizione prova il teorema. ■

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. G. BRYUKHANOVA, *The 2-length and 2-period of a finite solvable group*, Algebra and Logic, 18 (1) (1979), pp. 5-20.
- [2] E. G. BRYUKHANOVA, *Connection between the 2-length and the derived length of a Sylow 2-subgroup of a finite solvable group*, Math. Notes, 29 (1981), pp. 85-90.
- [3] S. FRANCIOSI - F. DE GIOVANNI - H. HEINEKEN - M. L. NEWELL, *On the Fitting length of a soluble product of nilpotent groups*, Arch. Math., 57 (1991), pp. 313-318.
- [4] F. GROSS, *Finite groups which are the product of two nilpotent subgroups*, Bull. Austral. Math. Soc., 9 (1973), pp. 267-274.
- [5] F. GROSS, *On finite groups of exponent $p^m q^n$* , J. Algebra, 7 (2) (1967), pp. 238-253.
- [6] P. HALL - G. HIGMAN, *On the p -length of p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem*, Proc. London Math. Soc., 6 (3) (1956), pp. 1-42.
- [7] H. HEINEKEN, *The product of two finite nilpotent groups and its Fitting series*, Arch. Math., 59 (1992), pp. 209-214.
- [8] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Berlin-Heidelberg-New York (1967).
- [9] E. I. KHUKHRO, *Finite groups of period $p^\alpha q^\beta$* , Algebra and Logic, 17 (6) (1978), pp. 473-482.
- [10] E. PENNINGTON, *On products of finite nilpotent groups*, Math. Z., 134 (1973), pp. 81-83.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 luglio 1992
e, in forma riveduta, il 12 gennaio 1993.