

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO MIRANDA

## **Sulla variazione totale del gradiente di una funzione**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 88 (1992), p. 229-243

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1992\\_\\_88\\_\\_229\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1992__88__229_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Sulla variazione totale del gradiente di una funzione.

MARIO MIRANDA (\*)

Se  $u$  è una funzione reale definita su  $R^n$  e sommabile, la variazione totale del suo gradiente può essere calcolata mediante la seguente operazione

$$\sup \left\{ \int_{R^n} u(x) \operatorname{div} \phi(x) \, dx \mid \phi \in [C_0^1(R^n)]^n, |\phi(x)| \leq 1 \ \forall x \right\}.$$

Tale variazione totale viene spesso indicata con il simbolo

$$\int_{R^n} |Du|;$$

e, nel caso in cui  $u \in C^1(R^n)$ , o più generalmente abbia gradiente localmente sommabile, si avrà

$$\int_{R^n} |Du| = \int_{R^n} |Du(x)| \, dx.$$

Una proprietà generale dell'operatore  $\int_{R^n} |Du|$ , di verifica immediata, è la semicontinuità:

$$\lim_h \int_{R^n} |u_h - u| \, dx = 0 \Rightarrow \min_h \lim_{R^n} \int_{R^n} |Du_h| \geq \int_{R^n} |Du|.$$

Se poi  $\{\tau_h\}$  è una successione di funzioni regolari approssimanti la misura di Dirac, avremo

$$\lim_h \int_{R^n} |u * \tau_h - u| \, dx = 0 \quad \text{e} \quad \lim_h \int_{R^n} |D(u * \tau_h)(x)| \, dx = \int_{R^n} |Du|$$

(\*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze dell'Università di Trento, 38050 Povo (Trento), Italia.

dove  $u * \tau_h$  sta ad indicare il prodotto di convoluzione

$$(u * \tau_h)(x) = \int_{R^n} u(y) \tau_h(x - y) dy.$$

Ricordiamo che possono prendersi funzioni  $\tau_h$  contenute in  $C_0^\infty(R^n)$  con  $\tau_h(x) = 0$  per  $|x| > h^{-1}$ , oppure funzioni analitiche reali come

$$h^n \sqrt{\pi}^{-n} e^{-h^2|x|^2},$$

che verificano

$$\int_{R^n} \tau_h(x) dx = 1, \quad \forall h \text{ e } \lim_h \tau_h(x) = 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Ricordiamo anche che può definirsi una successione regolarizzante  $\{v_h\}$  di funzioni a supporto compatto con le proprietà:

$$\lim_h \int_{R^n} |v_h - u| dx = 0, \quad \int_{R^n} |Dv_h(x)| dx \leq \int_{R^n} |Du| + 2^{-h}, \quad \forall h;$$

per le quali vale ancora ovviamente

$$\lim_h \int_{R^n} |Dv_h(x)| dx = \int_{R^n} |Du|.$$

Una grande novità in questo tipo di approssimazioni fu presentata da Luciano Modica e Stefano Mortola nel 1977. In un articolo del Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, essi provarono che per ogni  $u \in L^1(R^n)$  e ogni  $\{u_h\} \subset L^1(R^n)$  con  $\{|Du_h|\} \subset L^1(R^n)$  e con

$$\lim_h \int_{R^n} |u - u_h| dx = 0,$$

vale

$$\minlim_h \int_{R^n} \{h^{-1} |Du_h(x)|^2 + h \operatorname{sen}^2[\pi h u_h(x)]\} dx \geq \frac{4}{\pi} \int_{R^n} |Du|.$$

Essi provarono altresì l'esistenza di successioni di funzioni  $\{w_h\}$  lipshitziane, convergenti ad  $u$  in  $L^1(R^n)$ , con

$$\lim_h \int_{R^n} \{h^{-1} |Dw_h(x)|^2 + h \operatorname{sen}^2[\pi h w_h(x)]\} dx = \frac{4}{\pi} \int_{R^n} |Du|.$$

Questo risultato di Modica e Mortola vogliamo estendere ad un'am-

pia classe di funzioni continue, che possono prendere il posto della funzione trigonometrica nel funzionale approssimante.

Dimostreremo innanzitutto e facilmente che, per ogni

$$g: R \rightarrow R$$

continua e limitata, per la quale esista il

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t |g(s)| ds = \lambda \in R,$$

vale

$$\minlim_h \int_{R^n} \{h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(hu_h(x))\} dx \geq 2\lambda \int_{R^n} |Du|,$$

ogni volta che la successione  $\{u_h\}$  converga ad  $u$  in  $L^1(R^n)$ .

Dimostreremo inoltre, come in Modica-Mortola, che se  $g$  è periodica di periodo 1 e  $\mathbb{Z}$  è l'insieme dei suoi zeri, allora per ogni  $u$  sommabile esiste una successione  $\{w_h\}$  di funzioni lipschitziane, convergente ad  $u$  in  $L^1(R^n)$  e verificante

$$\lim_h \int_{R^n} \{h^{-1} |Dw_h(x)|^2 + hg^2(hw_h(x))\} dx = 2\lambda \int_{R^n} |Du|.$$

1. Per ogni  $\{u_h\} \subset L^1(R^n)$  con  $Du_h(x)$  misurabile, vale la disuguaglianza

$$h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(hu_h(x)) \geq 2 |Du_h(x)| |g(hu_h(x))|, \quad \forall h, \quad \forall x.$$

D'altra parte, posto

$$G_h(t) = h^{-1} \int_0^{ht} |g(s)| ds,$$

nei punti  $x \in R^n$  in cui esista  $Du_h(x)$  varrà

$$|Du_h(x)| |g(hu_h(x))| = |DG_h(u_h(x))|.$$

Avendo allora indicato con  $\lambda$  il limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^1 |g(s)| ds,$$

supposto esistente e finito, avremo:

$$\lim_h G_h(t) = \lambda t, \quad \forall t \in R;$$

quindi anche, avendo supposta  $g$  limitata, in tutti i punti  $x$  nei quali sia  $\lim_h u_h(x) = u(x)$ ,

$$\lim_h G_h(u_h(x)) = \lambda u(x).$$

Poiché possiamo assumere, ai fini della dimostrazione della nostra disegualianza, che valga per quasi ogni  $x$

$$\lim_h u_h(x) = u(x),$$

e poiché la successione  $\{G_h\}$  è di funzioni equilipschitziane, avremo

$$\minlim_h \int_{R^n} |DG_h(u_h(x))| dx \geq \lambda \int_{R^n} |Du|.$$

Da cui

$$\minlim_h \int_{R^n} \{h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(hu_h(x))\} dx \geq 2\lambda \int_{R^n} |Du|.$$

2. Assumendo ora che la  $g$  sia, oltreché continua, 1-periodica e nulla nei soli punti di  $\mathbb{Z}$ , cominciamo col provare l'esistenza della speciale successione minimizzante  $\{w_h\}$  nel caso particolare

$$n = 1, \quad u(x) = 1 \text{ per } x > 0 \text{ e } u(x) = 0 \text{ per } x \leq 0.$$

In queste speciali condizioni proveremo l'esistenza di una successione di funzioni non decrescenti

$$w_h: R \rightarrow [0, 1],$$

lipschitziane, nulle in  $(-\infty, 0]$  e tendenti ad 1 in ogni punto  $x > 0$ , con

$$\lim_h \int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1} |Dw_h(x)|^2 + hg^2(hw_h(x))\} dx = 2\lambda,$$

dove

$$\lambda = \int_0^1 |g(s)| ds = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t |g(s)| ds.$$

Per comodità di dimostrazione assumeremo la seguente ipotesi, non necessaria per la validità della tesi:

$$\int_0^1 |g(s)|^{-1} ds < +\infty.$$

Posto

$$Y(t) = \int_{1/2}^t |g(s)|^{-1} ds, \quad \forall t \in [0, 1],$$

e indicati con  $a$  e  $b$  i valori della funzione  $Y$  nei punti 0 e 1, avremo

$$Y: [0, 1] \rightarrow [a, b],$$

con continuità e crescendo, allo stesso modo della sua inversa

$$Y^{-1}: [a, b] \rightarrow [0, 1].$$

La  $Y^{-1}$ , che più semplicemente denoteremo con  $y$ , risolve l'equazione differenziale

$$y' = |g(y)|,$$

nel suo intervallo di definizione ed ha valore  $1/2$  nel punto 0, interno ad esso.

Indichiamo ancora con  $y$  l'estensione della funzione a tutto  $R$  coi valori 0 in  $(-\infty, a)$  e 1 in  $(b, +\infty)$ . Indichiamo quindi con  $y_h$  la successione di funzioni

$$y_h(x) = h^{-1}y(h^2x).$$

Avremo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1}y_h'^2(x) + hg^2(hy_h(x))\} dx &= \int_{a:h^2}^{b:h^2} \{h^{-1}y_h'^2(x) + hg^2(hy_h(x))\} dx = \\ &= h \int_{a:h^2}^{b:h^2} \{y'^2(h^2x) + g^2(y(h^2x))\} dx = h^{-1} \int_a^b \{y'^2(x) + g^2(y(x))\} dx = \\ &= 2h^{-1} \int_a^b y'(x) |g(y(x))| dx = 2h^{-1} \int_a^b |g(x)| dx = 2h^{-1} \lambda. \end{aligned}$$

Per ogni intero positivo  $k$  poniamo

$$y_{h,k}(x) = y_h \left( x - \frac{b-a}{h^2} k + \frac{b}{h^2} \right).$$

Avremo che ciascuna delle  $y_{h,k}$  verifica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{ h^{-1} y_{h,k}'^2(x) + hg^2(hy_{h,k}(x)) \} dx = 2h^{-1}\lambda;$$

e, per i diversi valori di  $k$ , le  $y_{h,k}$  sono non decrescenti con valori compresi nell'intervallo  $[0, 1:h]$  ed hanno valori diversi dai valori minimo e massimo in intervalli privi di punti interni comuni. Avremo pertanto,

per ogni intero positivo  $K$  posto  $y_{h,K} = \sum_{k=1}^K y_{h,k}$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{ h^{-1} y_{h,K}'^2(x) + hg^2(hy_{h,K}(x)) \} dx = 2Kh^{-1}\lambda.$$

Nel caso particolare  $K = h$  la successione  $\{w_h\} = \{y_{h,h}\}$  ha la proprietà desiderata, essendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{ h^{-1} w_h'^2(x) + hg^2(hw_h(x)) \} dx = 2\lambda, \quad \forall h;$$

$$w_h(x) = 0, \quad \forall h, \quad \forall x \leq 0; \quad w_h(x) = 1, \quad \forall h, \quad \forall x \geq \frac{b-a}{h};$$

$w_h$  lipschitziana non decrescente  $\forall h$ .

Se poi, per  $\alpha$  reale positivo, poniamo

$$w_h^{(\alpha)} = y_{h,[\alpha h]} = \sum_{k=1}^{[\alpha h]} y_{h,k},$$

dove  $[\alpha h]$  indica la parte interna di  $\alpha h$ , avremo una successione approssimante, con le proprietà desiderate della funzione  $\alpha\chi_{[0, +\infty)}$ , dove  $\chi_{[0, +\infty)}$  è la funzione caratteristica di  $[0, +\infty)$ .

Vogliamo ora liberarci dell'ipotesi di comodo

$$\int_0^1 |g(s)|^{-1} ds < +\infty.$$

Poniamo allora, per ogni scelta del bivettore  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , dove

$\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$ ,  $\varepsilon_2 \in (0, 1/2)$  verificano le

$$|g(\varepsilon_1)| < |g(1:2)|, \quad |g(1 - \varepsilon_2)| < |g(1:2)|:$$

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\varepsilon_1}} |g(\varepsilon_1)|, \quad \text{per } x \in [0, \varepsilon_1], \\ &= |g(\varepsilon_1)|, \quad \text{per } x \in [\varepsilon_1, 1:2], \\ &= |g(1 - \varepsilon_2)|, \quad \text{per } x \in (1:2, 1 - \varepsilon_2], \\ &= \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{\varepsilon_2}} |g(1 - \varepsilon_2)|, \quad \text{per } x \in [1 - \varepsilon_2, 1]. \end{aligned}$$

Poniamo inoltre

$$g_\varepsilon(x) = \max \{ |g(x)|, \gamma_\varepsilon(x) \}, \quad \text{per } x \in [0, 1],$$

e prolunghiamo  $g_\varepsilon$  a tutto  $R$  per periodicità. Avremo allora verificata per  $g_\varepsilon$  la ipotesi di comodo, anzi con precisione avremo:

$$-a_\varepsilon = \int_0^{1:2} g_\varepsilon^{-1}(s) ds \leq \int_0^{1:2} \gamma_\varepsilon^{-1}(s) ds = (2\varepsilon_1 + 1/2 - \varepsilon_1) |g(\varepsilon_1)|^{-1} \leq |g(\varepsilon_1)|^{-1},$$

$$b_\varepsilon \leq |g(1 - \varepsilon_2)|^{-1}.$$

Avremo inoltre

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon = \int_0^1 g_\varepsilon(s) ds &\leq \int_0^1 |g(s)| ds + \int_0^1 \gamma_\varepsilon(s) ds < \lambda + \\ &+ 1/2 \{ |g(\varepsilon_1)| + |g(1 - \varepsilon_2)| \}. \end{aligned}$$

Quindi

$$2\lambda_\varepsilon < 2\lambda + |g(\varepsilon_1)| + |g(1 - \varepsilon_2)|.$$

Indicata allora con  $\{w_{h,\varepsilon}\}$  la successione di funzioni lipschitziane approssimanti la  $\chi_{[0,+\infty)}$ , relativamente alla  $g_\varepsilon$ , avremo per ogni  $h$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1}w_{h,\varepsilon}'^2(x) + hg_\varepsilon^2(hw_{h,\varepsilon}(x))\} dx < 2\lambda + |g(\varepsilon_1)| + |g(1 - \varepsilon_2)|.$$

A maggior ragione per ogni  $h$  sar 

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1}w_{h,\varepsilon}'^2(x) + hg^2(hw_{h,\varepsilon}(x))\} dx < 2\lambda + |g(\varepsilon_1)| + |g(1 - \varepsilon_2)|.$$

Osserviamo inoltre che ogni  $w_{h,\varepsilon}$    non decrescente, vale 0 in  $(-\infty, 0]$  e 1 in  $[(b_\varepsilon - a_\varepsilon)/h, +\infty)$ . Inoltre  

$$\frac{b_\varepsilon - a_\varepsilon}{h} < [h|g(\varepsilon_1)|]^{-1} + [h|g(1 - \varepsilon_2)|]^{-1}.$$

Per tutti gli  $h > |g(1:2)|^{-2}$ , potremo scegliere

$$\varepsilon_1(h) = \min \{s \in [0, 1] \mid \sqrt{h} |g(s)| = 1\},$$

$$\varepsilon_2(h) = \min \{s \in [0, 1] \mid \sqrt{h} |g(1 - s)| = 1\}.$$

Posto allora

$$w_h = w_{h,\varepsilon(h)},$$

avremo

$$w_h(x) = 1 \quad \text{per} \quad x > (\sqrt{h})^{-1},$$

mentre  

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1}w_h'^2(x) + hg^2(hw_h(x))\} dx < 2\lambda + 2(\sqrt{h})^{-1}.$$

Di conseguenza  

$$w_h \rightarrow \chi_{[0,+\infty)} \quad \text{e} \quad \lim_h \int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1}w_h'^2(x) + hg^2(hw_h(x))\} dx = 2\lambda.$$

3. Abbiamo dimostrato che per ogni numero reale positivo  $\alpha$  esiste una successione  $\{w_h^{(\alpha)}\}$  di funzioni reali lipschitziane di una variabile reale, non decrescenti, con le ulteriori proprietà

$$w_h^{(\alpha)} = 0 \text{ in } (-\infty, 0], \quad w_h^{(\alpha)} = \frac{[\alpha h]}{h} \text{ in } \left[2 \frac{\alpha + 1}{\sqrt{h}}, +\infty\right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ h^{-1} |Dw_h^{(\alpha)}(x)|^2 + hg(hw_h^{(\alpha)}(x)) \right\} dx \leq 2\alpha \left( \lambda + \frac{1}{\sqrt{h}} \right),$$

dove  $\lambda = \int_0^1 |g(s)| ds$ ; e ciò per una qualunque funzione continua  $g$ , 1-periodica, con  $\{s \in R \mid g(s) = 0\} = \mathbb{Z}$ . In altre parole, per la funzione  $\alpha\chi_{[0, +\infty)}$  abbiamo provato l'esistenza della approssimazione secondo Modica-Mortola.

Vogliamo ora ampliare la validità di tale proprietà ad ogni dimensione e alle funzioni caratteristiche degli aperti regolari limitati.

Sia  $\Omega \subset R^n$  un aperto limitato con frontiera regolare e si ponga

$$\rho(x) = \text{dist}(x, R^n - \Omega).$$

La funzione  $\rho: R^n \rightarrow R$  è regolare nell'aperto

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in R^n \mid 0 < \rho(x) < \varepsilon\},$$

per piccoli valori di  $\varepsilon$ , e verifica in quasi ogni punto  $x \in \Omega_\varepsilon$  la identità  $|D\rho(x)| = 1$ .

Le funzioni della successione  $\{w_h^{(\alpha)}(\rho(x))\}$  sono allora lipschitziane e hanno valori compresi negli intervalli

$$\left[0, \frac{[\alpha h]}{h}\right];$$

valgono 0 in  $R^n - \Omega$  e  $[\alpha h]/h$  in  $\Omega - \Omega_\varepsilon$ , non appena sia  $h > 4((\alpha + 1)/\varepsilon)^2$ . Avremo allora, per tali valori di  $h$ :

$$\begin{aligned} \int_{R^n} h^{-1} |Dw_h^{(\alpha)}(\rho(x))|^2 dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} h^{-1} |Dw_h^{(\alpha)}(\rho(x))|^2 |D\rho(x)| dx = \\ &= \int_0^\varepsilon h^{-1} |Dw_h^{(\alpha)}(t)|^2 H^{n-1}(\partial\Omega_t) dt \leq \{H^{n-1}(\partial\Omega) + \sigma(\varepsilon)\} \int_0^\varepsilon h^{-1} |Dw_h^{(\alpha)}(t)|^2 dt \end{aligned}$$

dove  $\sigma(\varepsilon) \rightarrow 0$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $H^{n-1}$  è la misura di Hausdorff ( $n-1$ ) dimensionale. Analogamente si ha

$$\begin{aligned} \int_{R^n} hg^2[hw_h^{(\alpha)}(\rho(x))] dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} hg^2[hw_h^{(\alpha)}(\rho(x))] dx = \\ &= \int_0^\varepsilon hg^2(hw_h^{(\alpha)}(t)) H^{n-1}(\partial\Omega_t) dt \leq \{H^{n-1}(\partial\Omega) + \sigma(\varepsilon)\} \int_0^\varepsilon hg^2(hw_h^{(\alpha)}(t)) dt. \end{aligned}$$

Da queste disequaglianze e dalle ricordate proprietà della successione di funzioni  $\{w_h^{(\alpha)}\}$ , per  $h > 4((\alpha+1)/\varepsilon)^2$  abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \{h^{-1} |Dw_h^{(\alpha)}(\rho(x))|^2 + hg^2[hw_h^{(\alpha)}(\rho(x))]\} dx &\leq \\ &\leq \{H^{n-1}(\partial\Omega) + \sigma(\varepsilon)\} 2\alpha \left( \lambda + \frac{1}{\sqrt{h}} \right). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_h \int_{R^n} \{h^{-1} |Dw_h^{(\alpha)}(\rho(x))|^2 + hg^2[hw_h^{(\alpha)}(\rho(x))]\} dx &= \\ &= 2\alpha\lambda H^{n-1}(\partial\Omega) = 2\lambda \int_{R^n} |D(\alpha\chi_\Omega)|. \end{aligned}$$

Sia ora  $\{\Omega_j\}$  un numero finito di aperti regolari con frontiere due a due disgiunte. La funzione

$$\sum_j \alpha_j \chi_{\Omega_j},$$

dove i coefficienti  $\alpha_j$  sono numeri reali positivi, è approssimabile mediante la successione

$$\{\sum_j w_h^{(\alpha_j)}(\rho_j(x))\},$$

la quale verifica, per grandi valori di  $h$ ,

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \{h^{-1} |D\Sigma_j|^2 + hg^2(h\Sigma_j)\} dx &= \\ &= \sum_j \int_{R^n} \{h^{-1} |D[w_h^{(\alpha_j)}(\rho_j(x))]|^2 + hg^2[hw_h^{(\alpha_j)}(\rho_j(x))]\} dx. \end{aligned}$$

Per provare l'approssimazione di Modica-Mortola nel caso generale facciamo, in un primo momento, l'ipotesi di comodo  $u \in C_0^\infty(R^n)$ . Avremo in tal caso

$$\int_{R^n} |Du(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H^{n-1}(\partial\{x \in R^n \mid u(x) > t\}) dt.$$

Ed anche, per ogni intero  $h$ ,

$$\int_{R^n} |Du(x)| dx = \sum_{|z| \leq h \max |u| + 1}^{(z+1):h} \int_{z:h} H^{n-1}(\partial\{u \in R^n \mid u(x) > t\}) dt.$$

Esisteranno quindi, per ogni  $h$  e per ogni  $z \in \mathbb{Z}$  con  $|z| \leq h \max |u| + 1$ , numeri reali  $t_{h,z} \in (z:h, (z+1):h)$ , tali che

$$\int_{R^n} |Du(x)| dx \geq \sum_{|z| \leq h \max |u| + 1} h^{-1} H^{n-1}(\partial\{x \in R^n \mid u(x) > t_{h,z}\}).$$

Potendosi richiedere anche che l'aperto  $\{x \in R^n \mid u(x) > t_{h,z}\}$  sia regolare.

La somma a secondo membro dell'ultima diseuguaglianza è la variazione totale del gradiente della funzione

$$-\left(\max |u| + \frac{2}{h}\right) + \sum_{|z| \leq h \max |u| + 1} h^{-1} \chi_{\{x \in R^n \mid u(x) > t_{h,z}\}},$$

la quale tende alla  $u$  in  $L^1(R^n)$ . Poiché questa funzione approssimante è a sua volta approssimabile nel senso di Modica-Mortola, potremo dedurre la approssimabilità delle  $u \in C_0^\infty(R^n)$  e poi quella di ogni  $u \in L^1(R^n)$ , dalla seguente proprietà di continuità:

LEMMA. Se  $v_h \rightarrow v$  in  $L^1(R^n)$  e  $\int_{R^n} |Dv_h| \rightarrow \int_{R^n} |Dv|$ , e se le  $v_h$  sono approssimabili nel senso di Modica-Mortola, allora lo è anche la  $v$ .

DIMOSTRAZIONE. Per ogni  $h$  sia  $\{v_{h,k}\}_k$  una successione approssimante la  $v_h$ . Valgano cioè

$$\lim_k \int_{R^n} |v_{h,k} - v_h| dx = 0$$

e

$$\lim_k \int_{R^n} \{k^{-1} |Dv_{h,k}|^2 + kg^2(kv_{h,k})\} dx = 2\lambda \int_{R^n} |Dv_h|.$$

Esisterà allora una successione crescente di interi  $\{v(h)\}$  con le seguenti proprietà

$$\int_{R^n} |v_{h,k} - v_h| dx < 2^{-h}, \quad \forall k \geq v(h);$$

$$\int_{R^n} \{k^{-1} |Dv_{h,k}|^2 + kg^2(kv_{h,k})\} dx < 2\lambda \int_{R^n} |Dv_h| + 2^{-h}, \quad \forall k \geq v(h).$$

Posto  $h(k) = \max\{h \mid v(h) \leq k\}$ , avremo che la successione  $\{h(k)\}$  è non decrescente e divergente. Indicata con  $\{w_k\}$  la successione di funzioni  $\{v_{h(k),k}\}$  avremo

$$\int_{R^n} |w_k - v| dx \leq \int_{R^n} |w_k - v_{h(k)}| dx + \int_{R^n} |v_{h(k)} - v| dx;$$

quindi

$$\int_{R^n} |w_k - v| dx < 2^{-h(k)} + \int_{R^n} |v_{h(k)} - v| dx \rightarrow 0.$$

Inoltre

$$\int_{R^n} \{k^{-1} |Dw_k|^2 + kg^2(kw_k)\} dx \leq 2\lambda \int_{R^n} |Dv_{h(k)}| + 2^{-h(k)},$$

da cui segue

$$\lim_k \int_{R^n} \{k^{-1} |Dw_k|^2 + kg^2(kw_k)\} dx \leq 2\lambda \int_{R^n} |Dv|. \quad \text{c.v.d.}$$

4. Consideriamo ora la successione di valori

$$\int_{R^n} \{h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(u_h(x))\} dx.$$

Avremo ancora, per quanto riguarda l'integrando,

$$h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(u_h(x)) \geq 2|g(u_h(x))| |Du_h(x)| = 2|D\tilde{G}(u_h(x))|,$$

dove si è posto  $\tilde{G}(t) = \int_0^t |g(x)| ds$ .

Facendo tendere  $h$  all'infinito e supponendo che per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  sia

$$\lim_h u_h(x) = u(x),$$

avremo

$$\minlim_h \int_{\mathbb{R}^n} \{h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(u_h(x))\} dx \geq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |D\tilde{G}(u(x))|.$$

Osserviamo ora che se i valori della  $u$  sono interi relativi, cioè se  $\{u(x) | x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{Z}$ , allora

$$\tilde{G}(u(x)) = \lambda u(x);$$

dove  $\lambda = \int_0^1 |g(s)| ds$  e  $g$  è supposta 1-periodica oltreché continua. Quindi, con tale restrizione sulla  $u$ , avremo

$$\minlim_h \int_{\mathbb{R}^n} \{h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(u_h(x))\} dx \geq 2\lambda \int_{\mathbb{R}^n} |Du(x)|.$$

Questa disuguaglianza è peraltro valida in generale. Se infatti il codominio di  $u$  non è contenuto in  $\mathbb{Z}$ , se esiste cioè un insieme  $X \subset \mathbb{R}^n$  di misura positiva, nei punti del quale la  $u$  assume valori non interi, poiché

$$\minlim_h \int_{\mathbb{R}^n} g^2(u_h(x)) dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} g^2(u(x)) dx \geq \int_X g^2(u(x)) dx;$$

assumendo che la  $g$  sia nulla solo nei punti di  $\mathbb{Z}$ , avremo

$$\int_X g^2(u(x)) dx > 0,$$

da cui

$$\minlim_h \int_{\mathbb{R}^n} hg^2(u_h(x)) dx \geq (\lim_h h) \int_X g^2(u(x)) dx = +\infty.$$

A maggior ragione

$$\minlim_h \int_{\mathbb{R}^n} \{h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(u_h(x))\} dx = +\infty \geq 2\lambda \int_{\mathbb{R}^n} |Du|.$$

Resta aperta la questione dell'esistenza di una successione di funzioni lipschitziane  $\{u_h\}$ , approssimanti la  $u$  in  $L^1(R^n)$  e tali che

$$\lim_h \int_{R^n} \{h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(u_h(x))\} dx = 2\lambda \int_{R^n} |Du|,$$

nell'ipotesi che i valori della  $u$  siano interi relativi.

Per la dimostrazione di questo fatto ripercorreremo la strada già fatta nella prima parte, cominciando col considerare il caso

$$x \in R, \quad u(x) = 0 \text{ per } x \leq 0, \quad u(x) = 1 \text{ per } x > 0.$$

Assumiamo ancora, per comodità di calcolo

$$\int_0^1 |g(s)|^{-1} ds < +\infty.$$

Posto

$$y_h(x) = y(hx),$$

dove  $y$ ,  $Y^{-1}$ ,  $Y$ ,  $a$ ,  $b$ , hanno lo stesso significato della prima parte di questo articolo, avremo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1} y_h'^2(x) + hg^2(y_h(x))\} dx &= \int_{a:h}^{b:h} \{h^{-1} y_h'^2 + hg^2(y_h)\} dx = \\ &= h \int_{a:h}^{b:h} \{y'^2(hx) + g^2(y(hx))\} dx = \int_a^b \{y'^2(x) + g^2(y(x))\} dx = \\ &= 2 \int_a^b y' |g(y)| dx = 2 \int_0^1 |g(s)| ds = 2\lambda. \end{aligned}$$

Quindi direttamente

$$y_h \rightarrow \chi_{(0, +\infty)} \quad \text{e} \quad \lim_h \int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1} y_h'^2 + hg^2(y_h)\} dx = 2\lambda.$$

È facilmente intuibile come si possano approssimare le  $z\chi_{(0, +\infty)}$  per ogni  $x \in \mathbb{Z}$  e poi le  $z\chi_\Omega$  per ogni aperto limitato regolare di  $R^n$  e, finalmente, le  $u$  sommabili a valori interi.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] L. MODICA - S. MORTOLA, *Un esempio di  $\Gamma^-$ -convergenza*, Boll. U.M.I., (5) 14-B (1977), pp. 285-299.
- [2] E. DE GIORGI, *Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area*, Rend. Mat. (IV) 8, 1 (1975), pp. 277-294.
- [3] E. DE GIORGI - T. FRANZONI, *Su un tipo di convergenza variazionale*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 58 (1975), pp. 842-850.
- [4] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag (1969).
- [5] M. MIRANDA, *Distribuzioni aventi derivate misure, insiemi di perimetro localmente finito*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 18 (1964), pp. 27-56.

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 ottobre 1991.