

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAMADOU SANGHARÉ

Sur quelques classes d'anneaux liées au lemme de Fitting

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 87 (1992), p. 29-37

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1992__87__29_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sur quelques classes d'anneaux liés au lemme de Fitting..

MAMADOU SANGHARÉ (*)

1. Introduction.

Soit A un anneau non nécessairement commutatif et M un A -module à gauche. On dit que M vérifie la propriété (I) si tout endomorphisme injectif de M est un automorphisme de M , on dit que M vérifie la propriété (S) si tout endomorphisme surjectif de M est un automorphisme de M et on dit que M vérifie la propriété (F) si, pour tout endomorphisme f de M , il existe un entier $n \geq 1$ tel que l'on ait $M = \text{Im } f^n \oplus \text{ker } f^n$. Il est clair que tout module artinien vérifie (I) ; que tout module noethérien vérifie (S) et que tout module de longueur finie vérifie (F) .

Le but de cet article est l'étude des trois classes d'anneaux suivantes:

- 1) les anneaux sur lesquels tout module vérifiant (I) est artinien,
- 2) les anneaux sur lesquels tout module vérifiant (S) est noethérien,
- 3) les anneaux sur lesquels tout module vérifiant (F) est de longueur finie.

Un anneau de la première classe sera appelée I -anneau à gauche; un anneau de la deuxième classe S -anneau à gauche, et un anneau de la troisième classe F -anneau à gauche.

Dans tout cet article les anneaux considérés sont associatifs, unitaires; et les modules des modules à gauche, unitaires.

(*) Adresse actuelle de l'auteur: Università degli Studi di Trento, Dipartimento di Matematica, 38050 Povo (Trento), Italia.

Adresse permanent de l'auteur: Université Ch. A.D., Fac. Sciences, Dép. Maths., Dakar, Senegal.

2. Caractérisation des I -anneaux, des S -anneaux et des F -anneaux: cas des anneaux commutatifs.

PROPOSITION 2.1. *Soit A un anneau commutatif intègre. Si A est un I -anneau ou un S -anneau ou un F -anneau, alors A est un corps.*

DÉMONSTRATION. Soit K le corps des fractions de A . Comme le A -module K vérifie les propriétés (I) , (S) et (F) , il en résulte que si A est un I -anneau (resp. S -anneau, resp. F -anneau), alors le A -module K est artinien (resp. Noethérien, resp. de longueur finie), d'où $A = K$.

COROLLAIRE 1. *Soit A un anneau commutatif. Si A est un I -anneau ou un S -anneau ou un F -anneau, alors tout idéal premier de A est maximal.*

DÉMONSTRATION. Soit P un idéal premier de A . Si A est un I -anneau (resp. S -anneau, resp. F -anneau), alors l'anneau-quotient A/P est un I -anneau (resp. S -anneau, resp. F -anneau), donc A/P est un corps.

PROPOSITION 2.2. *Soit A un anneau commutatif. Si A est un I -anneau ou un S -anneau ou un F -anneau alors A est artinien.*

DÉMONSTRATION. Posons S l'ensemble des éléments réguliers de A , et AS^{-1} l'anneau total des fractions de A . Si f est un endomorphisme du A -module AS^{-1} pour tout élément $as^{-1} \in AS^{-1}$, on a

$$sf(as^{-1}) = f(sas^{-1}) = f(a) = af(1),$$

d'où

$$f(as^{-1}) = as^{-1}f(1).$$

Il en résulte que tout endomorphisme du A -module AS^{-1} est une multiplication par un élément de AS^{-1} par conséquent le A -module AS^{-1} vérifie les propriétés (I) , et (S) .

Donc

— Si A est un I -anneau, alors le A -module AS^{-1} est artinien, et donc A est artinien.

— Si A est un S -anneau, alors le A -module est noethérien, et, par conséquent, A est noethérien. Comme tout idéal premier de A est maximal, Corollaire 1, donc A est artinien.

Supposon maintenant que A soit un F -anneau. Comme tout idéal premier de A est maximal, Corollaire 1, donc tout A -module de type fini vérifié la propriété (I) [1]. Comme A est un anneau commutatif, tout A -module de type fini vérifié la propriété (S) [1]. Il en résulte donc, d'après [4], que tout A -module de type fini vérifié la propriété (F). Par conséquent le A -module A vérifié la propriété (F), donc le A -module A est de longueur finie.

La Proposition 2.2 permet de restreindre l'étude des I -anneaux, S -anneaux et F -anneaux commutatifs aux cas des anneaux commutatifs artiniens locaux.

On va reprendre ici les notations de [5]. Soit A un anneau commutatif local artinien tel que $A = C \oplus bC$ (somme directe de C -modules), où C est un sous-anneau de A , artinien local d'idéal maximal $aC \neq \{0\}$, avec

$$a^2 = ab = b^2 = 0 \quad \text{et } b \neq 0.$$

On pose M l'anneau total des fractions de l'anneau des polynomes $C[x]$ à coefficients dans C , et note par σ l'endomorphisme du C -module M , défini, pour tout $m \in M$, par $\sigma(m) = axm$. Posons ϕ l'homomorphisme d'anneaux de A dans l'anneau $\text{End}_C M$ des C -endomorphismes du C -module M , défini, pour tout $\alpha + \beta b \in A$, où $\alpha, \beta \in C$, par

$$\phi(\alpha + \beta b) = \alpha \text{id}_M + \beta \sigma.$$

On considère sur M la structure de A -module définie par ϕ .

C'est à dire: pour tout $\alpha + \beta b \in A$ et pour tout $m \in M$, on pose

$$(\alpha + \beta b)m = \phi(\alpha + \beta b)(m) = (\alpha \text{id}_M + \beta \sigma)(m) = \alpha m + \beta axm.$$

Dans la suite de ce paragraphe la structure de A -module de M est celle définie par ϕ . Ainsi les A -endomorphismes du A -module M sont les C -endomorphismes de M qui commutent avec σ .

On notera que M est un anneau local d'idéal maximal aM et que $(aM)^2 = \{0\}$. Ce qui confère à aM une structure de $k = M/aM$ -espace vectoriel de dimension 1 dont une base est $\{a\}$. Avec ces notations on a:

PROPOSITION 2.3.

i) *La restriction à aM de tout A -endomorphisme f du A -module M est une multiplication par un élément de M .*

ii) *Pour tout entier $n \geq 1$, le A -module M^n vérifie (I).*

iii) *Pour tout entier $n \geq 1$, le A -module M^n vérifie (S).*

iv) *Pour tout entier $n \geq 1$, le A -module M^n vérifie (F).*

v) *Le A -module M n'est pas de longueur finie.*

DÉMONSTRATION. i) Soit $m \in M$. De la relation $f(bm) = bf(m)$ on a

$$(1) \quad f(axm) = axf(m).$$

Comme f est aussi C -linéaire on a

$$(2) \quad f(axm) = xf(am), \quad \text{car } a \in C.$$

De (1) et de (2) il résulte que, pour tout $h \in C[x]$, on a

$$(3) \quad f(ahm) = ahf(m) = hf(am).$$

Donc en écrivant $m = c/d$, où $c, d \in C[x]$ et $d \notin aC[x]$ et en appliquant (3) avec $h = d$, on obtient

$$f(adm) = adf(m) = df(am).$$

Ce qui implique

$$f(ac) = df(am).$$

Donc

$$acf(1) = df(am),$$

d'où

$$f(am) = amf(1).$$

Soit f un A -endomorphisme du A -module M^n . On a $f = (f_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, où les f_{ij} sont des éléments de $\text{End}_A M$.

Posons f' la restriction de f à $f a a M^n$, on a $f' = (f'_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où f'_{ij} est la restriction de $f_{ij} a a M$ à $a M$. Donc, d'après i), $f' = (f'_{ij}(1))_{1 \leq i, j \leq n}$. Comme chaque $f'_{ij}(1)$ ($1 \leq i, j \leq n$) est aussi un endomorphisme de $a M$, $a M$ étant considéré comme $k = M/aM$ -espace vectoriel, il en résulte que f' peut être considéré comme élément de $\text{End}_k(aM^n)$.

Si f est injectif, alors f' est injectif. Par conséquent f' est un automorphisme de aM^n car $\dim_k aM^n = n < \infty$. Soit maintenant $y \in M^n$. Il existe $z \in M^n$ tel que $f(az) = ay$. Ce qui implique

$$a[f(z) - y] = 0.$$

On a donc $f(z) - y \in aM^n = \text{Im } f'$ et, par suite, $y \in \text{Im } f$, d'où ii).

iii) Si f est surjectif, alors f' est surjectif et, par conséquent f' est un automorphisme de aM^n , car $\dim_k aM^n = n < \infty$. Soit y un élément non nul de M^n . Si $y \in aM^n$, alors $f(y) = f'(y) \neq 0$. Si $y \notin aM^n$, alors ay est un élément non nul de aM^n et on a $af(y) = f'(ay) \neq 0$ d'où $f(y) \neq 0$. Soit $m \in M^n$. Comme aM^n est un k -espace vectoriel de dimension finie

n et que f' est un endomorphisme du k -espace vectoriel aM^n , il existe un entier $q \geq 1$ tel que

$$(4) \quad aM^n = \text{Im } f'^q \oplus \text{Ker } f'^q.$$

Soit $m \in M^n$. Il existe $m_1, m_2 \in M^n$ tels que

$$(5) \quad am = f^q(am_1) + am_2, \quad \text{avec } f^q(am_2) = 0.$$

La relation $af^q(m_2) = f^q(am_2) = 0$ entrainant $f^q(m_2) \in aM^n$, il existe d'après (4), $z_1, z_2 \in M^n$ tel que

$$(6) \quad f^q(m_2) = f^q(az_1) + az_2, \quad \text{avec } f^q(az_2) = 0.$$

Ce qui implique

$$f^q[f^q(m_2) - f^q(az_1)] = f^q(az_2) = 0.$$

Et on a

$$(7) \quad f^{2q}(m_2 - az_1) = 0, \quad \text{d'où } m_2 \in az_1 + \text{Ker } f^{2q}$$

or $aM^n = \text{Im } f'^{2q} + \text{Ker } f'^{2q}$, donc il existe $y_1, y_2 \in M^n$ tels que

$$(8) \quad az_1 = f^{2q}(ay_1) + ay_2, \quad \text{avec } f^{2q}(ay_2) = 0.$$

D'après (7) et (8), on peut écrire

$$(9) \quad m_2 = f^{2q}(ay_1) + y_1' \quad \text{avec } f^{2q}(y_1') = 0.$$

En remplaçant m_2 par $f^{2q}(ay_1) + y_1'$ dans l'égalité

$$am = f^q(am_1) + am_2$$

on obtient

$$am = f^q(am_1) + ay_1' \quad \text{car } af^{2q}(ay_1) = f^{2q}(a^2y_1) = f^{2q}(0) = 0.$$

Ecrivons finalement $am_1 = f^q(ax_1) + ax_2$ avec

$$x_1, x_2 \in M^n \quad \text{et} \quad f^q(ax_2) = 0.$$

On a alors

$$am = f^q[f^q(ax_1) + ax_2] + ay_1'.$$

Ce qui implique

$$am = f^{2q}(ax_1) + ay_1', \quad \text{car } f^q(ax_2) = 0.$$

Il en résulte que

$$a[m - f^{2q}(x_1) - y_1'] = 0.$$

C'est à dire

$$(m - f^{2q}(x_1) - y_1') \in aM^n = \text{Im } f'^{2q} + \text{Ker } f'^{2q}.$$

Ce qui implique

$$m \in \text{Im } f^{2q} + \text{Ker } f^{2q}, \quad \text{car } f^{2q}(y_1') = 0.$$

D'où

$$M^n = \text{Im } f^{2q} + \text{Ker } f^{2q}.$$

Soit $m \in \text{Im } f^{2q} \cap \text{Ker } f^{2q}$. On a alors

$$am \in \text{Im } f'^{2q} \cap \text{Ker } f'^{2q}.$$

Ce qui implique $am = 0$, et par conséquent $m \in M^n$.

Soi $m' \in M^n$ tel que $m = f^{2q}(m')$. On a

$$af^{2q}(m') = am = 0 \quad \text{donc } f^q(am') \in \text{Im } f'^q \cap \text{Ker } f'^q = \{0\}.$$

Donc $af^q(m') = 0$, et par conséquent $m = f^q(m') \in aM^n$. Comme

$$aM^n = \text{Im } f'^q \oplus \text{Ker } f'^q,$$

on peut écrire

$$f^q(m') = f^q(am'_1) + am'_2, \quad m'_1, m'_2 \in M^n \quad \text{et } f^q(am'_2) = 0$$

et, on a, alors $f^{2q}(m') = f^{2q}(am'_1)$. D'où

$$m = f^{2q}(am'_1) \in \text{Im } f^{2q}.$$

Comme $m \in aM^n$ et $f^{2q'}(m) = f^{2q}(m) = 0$, on a

$$m \in \text{Im } f'^{2q} \cap \text{Ker } f'^{2q} = \{0\}.$$

Donc

$$\text{Im } f^{2q} \cap \text{Ker } f^{2q} = \{0\},$$

d'où

$$M^n = \text{Im } f^{2q} \oplus \text{Ker } f^{2q}. \quad \text{D'où iv).}$$

v) Est évident.

THÉORÈME 2.4. *Soit A un anneau commutatif. Les conditions suivantes sont équivalent*

- 1) A est un I -anneau,
- 2) A est un S -anneau,
- 3) A est un F -anneau,
- 4) A est artinien et tout idéal de A est principal.

DÉMONSTRATION. Soit A un anneau commutatif. Si A est un I -anneau, ou un S -anneau, ou un F -anneau, alors d'après la Proposition 2.2, A est artinien. Comme tout anneau commutatif artinien admettant un idéal non principal possède, d'après [2. chap. 9], un anneau-quotient B de la forme $B = C \oplus bC$, où C est un sous-anneau de B , artinien local d'idéal maximal $aC \neq \{0\}$ avec $a^2 = ab = b^2 = 0$ et $b \neq 0$, donc tout anneau commutatif artinien admettant un idéal non principal possède, d'après la Proposition 2.3, un module qui n'est pas de longueur finie et qui vérifie les propriétés (I), (S) et (F). D'où les implications:

$$1) \Rightarrow 4), \quad 2) \Rightarrow 4), \quad \text{et} \quad 3) \Rightarrow 4).$$

Supposons maintenant que A soit artinien et que tout idéal de A soit principal. Comme il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphie de A -modules cycliques, tout A -module M qui n'est pas de longueur finie possède un facteur direct N qui est somme directe d'un nombre infini de copies d'un module cyclique [3]. Il est clair qu'un tel A -module N ne vérifie aucune des propriétés (I), (S) et (F). D'où les implications

$$4) \Rightarrow 1), \quad 4) \Rightarrow 2), \quad \text{et} \quad 4) \Rightarrow 3).$$

3. Etude d'un cas d'anneaux de groupes.

PROPOSITION 3.1. *Soit K un corps de caractéristique $p > 0$ et G un p -groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1) $K[G]$ est un I -anneau,
- 2) $K[G]$ est un S -anneau,
- 3) $K[G]$ est un F -anneau,
- 4) G est cyclique.

DÉMONSTRATION. Si G n'est pas cyclique; il existe un sous-groupe normal H de G tel que l'on ait $G/H = \langle \bar{x} \rangle \oplus \langle \bar{y} \rangle$ où

$$\bar{x} \neq 1, \quad \bar{y} \neq 1 \quad \text{et} \quad \bar{x}^P = \bar{y}^P = 1.$$

Il en résulte que l'anneau artinien $K[G/H]$ est commutatif et possède un idéal non principal, par exemple

$$J = K[G](1 - \bar{x}) \oplus K[G](1 - \bar{y}).$$

D'où, d'après le Théorème 2.3, les implications

$$1) \Rightarrow 4), \quad 2) \Rightarrow 4), \quad \text{et} \quad 3) \Rightarrow 4).$$

Si G est cyclique, alors $K[G]$ est un anneau de type de représentation finie d'après [7], d'où les implications

$$4) \Rightarrow 1), \quad 4) \Rightarrow 2), \quad \text{et} \quad 4) \Rightarrow 3).$$

THÉORÈME 3.2. *Soit A un anneau commutatif local d'idéal maximal m tel que le corps A/m soit de caractéristique $p > 0$ et soit G un p -groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1) $A[G]$ est un I -anneau,
- 2) $A[G]$ est un S -anneau,
- 3) $A[G]$ est un F -anneau,
- 4) a) $m = \{0\}$ et G est cyclique, où b) $m \neq \{0\}$ et $G = \{1\}$ et A est artinien à idéaux principaux.

DÉMONSTRATION. Les implications 4) \Rightarrow 1), 4) \Rightarrow 2) et 4) \Rightarrow 3) résultent du Théorème 2.3 et de la Proposition 3.1. Supposons maintenant que $A[G]$ soit un I -anneau (resp. un S -anneau, resp. un F -anneau). Posons

$$L = \left\{ \sum_{g \in G} x_g \in A[G] / \sum_{g \in G} x_g = 0 \right\}$$

l'idéal d'augmentation de $A[G]$. De l'isomorphisme d'anneaux $A \cong A[G]/L$, il résulte que l'anneau A est un I -anneau (resp. S -anneau, resp. F -anneau), donc, d'après le Théorème 2.3, A est artinien et tout idéal de A est principal. D'autre part comme l'anneau $A/m[G]$ est image homomorphe de l'anneau $A[G]$ (par exemple par l'homomorphisme d'anneaux:

$$A[G] \rightarrow A/m[G]$$

où ϕ est la

$$\sum_{g \in G} x_g g \rightarrow \sum_{g \in G} \phi(x_g) g$$

surjection canonique de A sur A/m , il en résulte que $A/m[G]$ est un I -anneau (resp. S -anneau, resp. F -anneau), donc, d'après la Proposition 3.1, G est cyclique. On vient de démontrer, donc, que si $A[G]$ est un I -anneau (resp. S -anneau, resp. F -anneau), alors A est artinien à idéaux principaux et G est cyclique. Ce qui implique que l'anneau $A[G]$ est commutatif, et par conséquent artinien à idéaux principaux, d'après le Théorème 2.3. D'où les implications $1) \Rightarrow 4)$, $2) \Rightarrow 4)$, et $3) \Rightarrow 4)$.

Remerciements. Cet article a été écrit quand l'auteur séjournait à Trento dans le cadre des relations de coopération et d'échange entre la Université de Trento et celle de Dakar, financés par le Ministère Italien des Relations Extérieures.

L'auteur remercie le Département de Mathématique de l'Université de Trento pour l'hospitalité dont il a été l'objet.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. P. ARMENDARIZ - J. W. FISHER - R. L. SNIDER, *On injective and surjective endomorphisms of finitely generated modules*, Comm. Algebras, **6** (7) (1978), pp. 659-672.
- [2] N. BOURBAKI, *Algebre Commutative*, chap. 8 et 9, Ed. Masson (1983).
- [3] I. S. COHEN - I. KAPLANSKY, *Rings for which every module is direct sum of cyclic modules*, Math. Z., **54** (1951), pp. 97-101.
- [4] Y. HIRANO, *On Fitting's lemma*, Hiroshima Math. J., **9** (1979), pp. 623-626.
- [5] A. M. KAIDI - M. SANGHARE, *Une caractérisation des anneaux artiniens à idéaux principaux*, Lecture Notes in Math., **1328** (Springer-Verlag) (1988), pp. 245-254.
- [6] A. M. KAIDI - M. SANGHARE, *Sur les S -anneaux dont les idéaux à gauche et les idéaux à droite sont bilatères*, à paraître.
- [7] R. S. PIERCE, *Associative Algebras*, Springer-Verlag.

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 agosto 1990.