

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

Über einige Ringklassen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 84 (1990), p. 39-60

[<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1990__84__39_0>](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1990__84__39_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Über einige Ringklassen.

WALTER STREB (*)

Einleitung.

Wir geben zunächst einen Überblick über die Ergebnisse in den Abschnitten I-VII dieser Note, wobei gleichzeitig die benötigten Notationen und Definitionen eingeführt werden.

NOTATIONEN. Sei K eine Klasse von Ringen R . Wir definieren Teilmengen $U(R)$, $H(R)$ und $UH(R)$ von K wie folgt:

$$T \in U(R) \quad :\Leftrightarrow T \in K \text{ und } T \text{ Unterring von } R;$$

$$T \in H(R) \quad :\Leftrightarrow T \in K \text{ und } T \text{ homomorphes Bild von } R;$$

$$T \in UH(R) :\Leftrightarrow T \in K \text{ und es existiert } S \in U(R), \text{ so daß } T \in H(S).$$

WZL

Ein Ziel der Untersuchungen ist es zu einer vorgegebenen Klasse K von Ringen eine möglichst « einfache » Teilklasse K_{UH} zu konstruieren, so daß gilt: Zu $R \in K$ existiert stets $T \in K_{UH} \cap UH(R)$. Neben interessanten Einblicken in die Struktur von Ringklassen ermöglicht dieser Ansatz Anwendungen der folgenden Art: Gegeben sei eine Eigenschaft E , definiert für alle $R \in K$ (d.h. $E(R) \in \{w, f\}$, w = wahr, f = falsch), wobei gilt: Mit $E(R) = w$ und $T \in UH(R)$ ist $E(T) = w$. Dann gilt folgende Metaaussage: Mit $E(T) = f$ für alle $T \in K_{UH}$ ist $E(R) = f$ für alle $R \in K$. Bei Anwendung auf die Klasse K der nicht-kommutativen Ringe erhält man Kommutativitätssätze vgl. [10] und [11]. Zahlreiche Problemstellungen, welche von I. N. Herstein u.a. untersucht wurden, gestatten eine analoge Bearbeitung.

(*) Indirizzo dell'A.: Fachbereich 6, Mathematik Universität Essen, GHS, Universitätstraße 2, Essen, 1-4200, B.R.D.

In dieser Note bestimmen wir K_{UH}

I) für die Klasse der nichtantikommutativen Ringe;

II) für sechs in der Literatur häufig auftretende Ringklassen K .

NOTATIONEN. Stets sei F Körper oder $\mathbb{Z}$ (Ring der ganzen Zahlen), R F -Algebra, $F\{x_1, \dots, x_n\}$ Polynomring in den nichtvertauschbaren Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$. Für $f \in F\{x_1, \dots, x_n\}$ und $A \subseteq R$ notieren wir $f \in PI(A)$ gleichwertig $f(A) = 0 : \Leftrightarrow$ Bei allen formalen Substitutionen $a_i \rightarrow x_i$, $a_i \in A$, $1 \leq i \leq n$ gilt $f(a_1, \dots, a_n) = 0$. Sei weiterhin

$$F_n\{x_1, \dots, x_n\} := \{f \in F\{x_1, \dots, x_n\} : f \text{ } n\text{-fach linear}\};$$

$$PI_n(R) := F_n\{x_1, \dots, x_n\} \cap PI(R).$$

Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen und F_p , $p \in \mathbb{P}$ der Primkörper mit p Elementen. Für $n \in \mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen) sei $\mathbb{P}(n) := \{p \in \mathbb{P} : p \mid n\}$.

Sei K_{char} die Klasse aller Ringe R , so daß R torsionsfrei (wir setzen $\text{char } R = 0$ und $F(R) = \mathbb{Z}$) oder $pR = 0$ mit $p \in \mathbb{P}$ (wir setzen $\text{char } R = p$ und $F(R) = F_p$).

III) Sei $R \in K_{\text{char}}$ mit $1 \in R$, $F = F(R)$ und $PI_{n-1}(R) = 0$, $1 < n \in \mathbb{Z}$. Wir zeigen, daß gewisse Invarianzbedingungen an $PI_i(R)$ für $i = n$ bzw. $i \in \{n, n+1\}$ hinreichend dafür sind, daß $PI_n(R)$ genau gewisse Standardformen enthält bzw. R kommutativ ist.

NOTATIONEN. Für $a, b \in R$ und $A, B \subseteq R$ sei

$$[a, b] := ab - ba, \quad [A, B] := \{[a, b] : a \in A, b \in B\},$$

$$a \circ b := ab + ba, \quad A \circ B := \{a \circ b : a \in A, b \in B\}.$$

Sei R' bzw. R^0 das von $[R, R]$ bzw. $R \circ R$ erzeugte Ideal von R und R_{nil} bzw. R_{reg} die Menge aller nilpotenten bzw. regulären Elemente von R .

Für $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$ sei $K_{\mathbb{Q}}$ die Klasse der $\mathbb{Q}$ -torsionsfreien Ringe (für $p \in \mathbb{Q}$ und $0 \neq r \in R'$ gilt $pr \neq 0$).

$f \in F\{x, y\}$ heiße homogen vom x -Grad m und y -Grad $n : \Leftrightarrow$

$$f(ix, jy) = i^m j^n f(x, y) \quad \text{für alle } i, j \in \mathbb{Z}.$$

Jedes $f \in F\{x, y\}$ besitzt eine eindeutige Darstellung $f = \sum f_{i,j}$, wobei $f_{i,j} \in F\{x, y\}$ homogen vom x -Grad i und y -Grad j . Sei $\nu: F\{x, y\} \rightarrow F[x, y]$ der kanonische F -Algebromorphismus.

IV) Sei $Q \subseteq P$, $R \in K_Q$, $1 \in R$. Sei weiterhin $f \in Z\{x, y\}$ homogen, wobei gilt: Für $T \in K_Q$ mit $f(T) = 0$ ist $T' = 0$. Sei schließlich X Ideal von R mit $X \neq R$ oder $X = R_{\text{nil}}$ und $f(R \setminus X) = 0$. Wir zeigen zunächst einen Struktursatz und dann unter Zusatzbedingungen $R' = 0$.

Ein bekannter und vielfach variiertes Satz von I. N. Herstein besagt: $R' = 0$, falls gilt:

(*) Zu $a \in R$ existiert stets $f(x) \in Z[x]$, so daß $a - a^2 f(a) \in Z(R)$ (Zentrum von R).

Wir bearbeiten Verallgemeinerungen dieses Satzes, welche in einem gewissen Sinne optimal sind.

V) Für $a \in R$ geben wir allgemeine hinreichende Bedingungen E dafür an, daß $a \in Z(R)$. Man kann dann $Z(R)$ bei (*) ersetzen durch $X \subseteq R$, wobei jedes $a \in X$ Bedingung E erfüllt.

NOTATIONEN. Sei $\langle \dots \rangle$ bzw. $(\dots)$ der bzw. das von ... erzeugte Unterring bzw. Ideal von R . Sei $G \subseteq F\{x, y\}$ und R F -Algebra.

R heiße G -Ring: $\Leftrightarrow$ Zu $a, b \in R$ existiert stets $f_{a,b} \in G$, so daß $f(a, b) = 0$.

Sei zusätzlich $\nu(G) = 0$ und $f = \sum_{3 \leq i+j} f_{i,j}$ für alle $f \in G$.

R heiße α - G -Ring: $\Leftrightarrow$ Zu $a, b \in R$ existiert stets $f_{a,b} \in G$, so daß $[a, b] = f_{a,b}(a, b)$.

R heiße α -Ring: $\Leftrightarrow R$ $\alpha - Z\{x, y\}$ -Ring.

Seien stets R und T Ringe und D Schiefkörper ($D' \neq 0$).

VI) Falls $a, b \in R$ existieren, so daß $[a, b] \notin (\langle a, b \rangle')^2$, so existiert $T \in UH(R)$ mit $T' \neq 0 = (T')^2$ und damit $T \in UH(R)$ mit wohlbestimmten Eigenschaften [8]. Anderenfalls ist R α -Ring. Sei K die Klasse der α -Ringe. Wir zeigen: Für bekannte konkrete Schiefkörper D ($D' \neq 0$), insbesondere verschränkte Produkte und D mit $\exp D = 2$, gilt $D \notin K$. Die wichtige Frage, ob $D \notin K$ für alle Schiefkörper D gilt, ist schwer zu entscheiden. Unter Einschränkungen an $f_{a,b}$ erhalten wir weitere Strukturaussagen für Ringe.

VII) Mittels Matrizenarithmetik realisieren wir optimale $G \subseteq \mathbb{Z}\{x, y\}$ und $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$, so daß $M_2(F_p)$ (Ring der 2-2-Matrizen über F_p) kein G -Ring für alle $p \notin \mathbf{Q}$. Für umfangreiche Klassen von G -Ringern $R \in K_{\mathbf{Q}}$ mit $J(R) = 0$ gilt dann $R' = 0$.

I. Klasse K der nichtantikommutativen Ringe.

NOTATIONEN. Sei $p \in \mathbf{P}$, $k \in \mathbf{N}$ und $X \subseteq R$,

$$\begin{aligned} t(R) &:= \{a \in R: \text{es existiert } k \in \mathbf{N}, \text{ so daß } ka = 0\}; \\ t_p(R) &:= \{a \in R: \text{es existiert } k \in \mathbf{N}, \text{ so daß } p^k a = 0\}; \\ R_k &:= \{a \in R: ka = 0\}, \quad {}^2R := \{a^2 \in R: a \in R\}; \\ \text{ann}_R X &:= \{a \in R: aX = 0\}. \end{aligned}$$

BEMERKUNG. $t(R)$ ist eindeutig direkte Summe von Ringen T mit $t_p(T) = T$, $p \in \mathbf{P}$.

SATZ 1. Zu jedem $R \in K$ existiert $T \in UH(R)$ mit $(1 \vee \dots \vee 7)$:

- (1) $T = F_p$, $2 \neq p \in \mathbf{P}$ oder $T = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
- (2) $T = \mathbb{Z}a$ mit $p^k a = pa^2 = a^3 = 0$, $a^2 = p^{k-1}a$,
 $2 \neq p \in \mathbf{P}$, $1 < k \in \mathbf{N}$.
- (3) $T = F_p a \oplus F_p a^2$ mit $a^3 = 0$, $2 \neq p \in \mathbf{P}$.
- (4) $T = \langle a \rangle = T_{\text{nil}} = t_2(T)$ mit $4a^2 = 2a^3 = 0$.
- (5) $T = \langle a, b \rangle = T_{\text{nil}} = t_2(T)$ mit $T' = 2({}^2T) = 0$.
- (6) $T = \langle a, b \rangle = t_2(T)$ mit $2({}^2T) = 0$, $T^0 \subseteq T'$, $T'T = 0 = TT'$,
wobei $T_{\text{nil}} \circ T_{\text{nil}} = 0$ oder T nilpotent.
- (7) $2T = 0$.

(Wegen $S' = S^0$ für alle $S \in UH(R)$ löst [8] das Problem).

BEWEIS. (A) Sei zunächst $2({}^2R) \neq 0$, $u \in R$ mit $2u^2 \neq 0$, I maximales Ideal von $\langle u \rangle$ mit $2u^2 \notin I$, $T = \langle u \rangle / I$, $a = u + I$ und $V =$

$= \text{ann}_T T^0$. Dann ist

(*) T^0 kleinstes Ideal von T , $V = T$ oder $F := T/V$ Körper mit p^r Elementen, $p \in \mathbb{P}$, $r \in \mathbb{N}$ [5; Corollary 1, p. 255].

Für $V = T$ gilt $4a^3 = 0$. Anderenfalls sei o.E. $2F = 0$ wegen (1), also $4a^3 = 0$.

(i) Sei $\text{ann}_T \{a\} = 0$. Dann gilt $4a = 0$ und $2a^i \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Für

$$e := a^{p^r-1} \quad \text{ist } e^2 - e \in V,$$

also $2(e^2 - e)a^2 = 0$, somit $2(e^2 - e) = 0$. Wiederholt man obiges Vorgehen für $a = e$, so erhält man zusätzlich $2(a^2 - a) = 0 = 4a$.

Wir zeigen: T ist endlich. O.E. sei $a^2 \neq a$. Wegen (*) und $2(a^2 - a) = 0$ existiert $f \in \mathbb{Z}[x]$ mit Koeffizienten aus $\{0, 1\}$, so daß $(a^2 - a)f(a)a = 2a^2 = 2a$. Mit $2T$ ist demnach auch T endlich.

Wegen $\text{ann}_T \{a\} = 0$ existiert $1 < n \in \mathbb{N}$, so daß $a^n = a$. Somit ist $1 = a^{n-1} \in T$, also $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \in U(T)$, demnach (1).

(ii) Sei $\text{ann}_T \{a\} \neq 0 = T_2$. Dann gilt $a^3 = 0$. Nach (*) ist $p2a^2 = 0$, also $pa^2 = 0$ mit $2 \neq p \in \mathbb{P}$. Wegen (3) sei o.E. $pa \neq 0$. Dann gilt $T^0 \subseteq (pa) = p\mathbb{Z}a$, also $2a^2 = pia$, $i \in \mathbb{Z}$, somit $0 = 2pa^2 = p^2ia$. Mit der Bemerkung realisiert man $p^ka = 0 \neq p^{k-1}a$ mit ∞ . Dann ist $(a^2) = (2a^2) \subseteq (p^{k-1}a) = p^{k-1}\mathbb{Z}a$, also $a^2 = p^{k-1}ia$ mit $p \nmid i$. Für $a := i^{-1}a$ gilt (2).

(iii) Sei $\text{ann}_T \{a\} \neq 0 \neq T_2$. Dann gilt $4a^2 = 2a^3 = 0$.

Angenommen $a \notin T_{\text{nil}}$. Für $2 < i \in \mathbb{N}$ ist wegen $2a^3 = 0$ die Definition $I_i := \{f \in F_2[x] : a^i f(a) = 0\}$ sinnvoll. Es existieren $2 < l \in \mathbb{N}$ und $g \in F_2[x]$, so daß $I_l = I_{l+1}$ und $2a^2 = a^l g(a)$, insbesondere $0 = 2a^3 = a^{l+1}g(a)$. Somit gilt $g \in I_{l+1} \setminus I_l$, Widerspruch.

Für $4a \neq 0$ gilt $(2a^2) \subseteq (4a) = 4\mathbb{Z}a$. Also existiert $i \in \mathbb{Z}$, so daß $2a^2 = 4ia$. Somit gilt $0 = 4a^2 = 8ia$. Mit der Bemerkung realisiert man $t_2(T) = T$. Insgesamt gilt (4).

Im folgenden sei o.E. $2(^2R) = 0$.

(B) Es existiere zunächst $T \in UH(R)$ mit $T' = 0 \neq T^0$. O.E. sei $R = T$. Seien $u, v \in R$ mit $u \circ v \neq 0$, I maximales Ideal von $\langle u, v \rangle$

mit $u \circ v \notin I$, $T = \langle u, v \rangle / I$, $a = u + I$, $b = v + I$. Es gilt

$$0 = 2(a + b)^2 - 2a^2 - 2b^2 = 2(a \circ b) = 4ab.$$

Sei $c \in \{a, b\}$. Angenommen $c \notin T_{\text{nil}}$. Für $1 < i \in \mathbb{N}$ ist wegen $2c^i = 0$ die Definition $I_i := \{f \in F_2[x, y] : c^i f(a, b) = 0\}$ sinnvoll. Es existiert $1 < l \in \mathbb{N}$ und $g \in F_2[x, y]$, so daß $I_l = I_{l+1}$ und $a \circ b = a^l g(a, b)$, also $0 = 2a^2 b = (a \circ b)a = a^{l+1} g(a, b)$. Somit gilt $g \in I_{l+1} \setminus I_l$, Widerspruch.

Für $4c \neq 0$ gilt $T^0 \subseteq (4c) = 4\mathbb{Z}c$, also $a \circ b = 4ic$ mit $i \in \mathbb{Z}$, somit $0 = 2a \circ b = 8ic$. Mit der Bemerkung realisiert man $t_2(T) = T$. Insgesamt gilt (5).

(C) Sei schließlich $T^0 \subseteq T'$ für alle $T \in UH(R)$. Wie bei (B) erhält man $T = \langle a, b \rangle$ mit kleinstem Ideal $T^0 = (a \circ b)$ und $2(a \circ b) = 0$, somit $2T^3 = 0 = 2T^0$. Wegen (7) sei o.E. T nicht prim, also $(T^0)^2 = 0$.

Sei zunächst $T^0 \subseteq Z(T)$ und $V := \text{ann}_T T^0$. Wie bei (A) erhält man (*). Angenommen $V \circ V = 0$. Für $V \circ T \neq 0$ bzw. $= 0$ wählt man $c \in T$ und $d \in V$ bzw. $d \in T$ mit $c \circ d \neq 0$. Dann gilt

$$0 = [(c^p - c), d]c^2 = p^r[c, d]c^{p^r+1} + [c, d]c^2 = [c, d]c^2,$$

also $c \in V$, Widerspruch. Also ist $V \circ V \neq 0$. Mit $R = V$ beginnt man bei (C) und erhält (6) bis auf $t_2(T) = T$.

Wegen $T^0 \subseteq T' = [a, b]\mathbb{Z}$ existiert $0 \neq i \in \mathbb{Z}$, so daß $a \circ b = i[a, b]$, also $0 = 2a \circ b = 2i[a, b]$. Wegen T' endlich erfüllt T ACC für Ideale. Demnach existiert $k \in \mathbb{N}$, so daß $T_{2^k} = T_{2^{k+1}}$. Angenommen $2^k T \neq 0$. Dann existiert $t \in T$ mit $a \circ b = 2^k t$. Also gilt $0 = 2a \circ b = 2^{k+1} t$, somit $0 = 2^k t$, Widerspruch. Demnach gilt (6).

Für $T^0 \circ T \neq 0$ schließt man wie in [8] auf (7), indem man' und $[\ ,]$ durch $\circ$ ersetzt.

II. Spezielle Klassen K_i nichtkommutativer Ringe.

NOTATIONEN. Seien $J(R)$, $N(R)$ und $P(R)$ der Reihe nach das Jakobson-, Nil- und Prim-radikal von R . Seien $M_n(R)$ der Ring der n - n -Matrizen über R und $e_{i,j}$ die zugehörigen Matrizeneinheiten.

$$R_{pa} := \{a \in R : \text{es existieren } i \neq j \in \mathbb{N}, \text{ so daß } a^i = a^j\};$$

$$R_{ie} := \{e \in R : e^2 = e\}.$$

Die Ringklassen M_i , M_r , M , C , C_g werden in [8] definiert. Wir definieren Ringklassen K_i wir folgt:

$$R \in K_1 \quad :\Leftrightarrow \{[a, b] : a, b \in R\} \subseteq R_{pa} ;$$

$$R \in K_2 \quad \Leftrightarrow R_{pa} = R ;$$

$$R \in K_3 \quad :\Leftrightarrow R \text{ } \alpha\text{-Ring} ;$$

$$R \in K_4 \quad :\Leftrightarrow [R_{\text{nil}}, R_{\text{nil}}] = 0 ;$$

$$R \in K_5 \quad :\Leftrightarrow R_{i_p} \setminus Z(R) \neq \emptyset ;$$

$$R \in K_6 \quad :\Leftrightarrow R' \not\subseteq R_{\text{nil}} ;$$

$$R \in K_{6,n} :\Leftrightarrow R \in K_6 \text{ und } R \text{ } n\text{-torsionsfrei} .$$

BEMERKUNG 1.

- (1) Zu $R \in K_1$ existiert $T \in UH(R) \cap (M \cup C)$.
- (2) Zu $R \in K_2$ existiert $T \in UH(R) \cap (M \cup C_g)$.
- (3) Zu $R \in (K_2 \cap K_3) \cup (K_2 \cap K_4)$ existiert $T \in UH(R) \cap M$.
- (4) Zu $R \in K_5$ existiert $T \in UH(R) \cap (M_i \cup M_r)$.

BEWEIS. (1) Für Schiefkörper R gilt $R' = 0$ [3; Theorem 3.1.3, p. 74]. Sei nun $R = R_{\text{reg}} = J(R)$. Angenommen es existieren $a, b \in R$ mit $c := [a, b] \neq 0$. Dann existiert $1 < n \in \mathbb{N}$, so daß $c^n = c$. Zu $d := c^{n-1}$ existiert $e \in R$, so daß $d + e = de$. Dann gilt $ce = cde = cd + ce = c + ce$, also $c = 0$, Widerspruch. Nach [8] gilt (1).

(2) Zu jedem $a \in R$ existiert $f_a(x) \in \mathbb{Z}[x]$, so daß $a - a^2 f_a(a) \in R_{\text{nil}}$ [1; p. 1]. Angenommen es existiert $T \in UH(R) \cap (C \setminus C_g)$. Dann ist $[T_{\text{nil}}, T_{\text{nil}}] = 0$, also T α -Ring, Widerspruch.

(3) Gilt nach (2) und [1; Lemma 2, p. 2].

(4) Sei $u = e \in R_{i_p} \setminus Z(R)$. Dann existiert $a \in R$, so daß $v := ea - eae \neq 0$ oder $ae - eae \neq 0$. O.E. sei $v \neq 0$. Dann gilt $uv = v$, $vu = 0 = v^2$ und man verfolgt für $T = \langle u, v \rangle$ den Beweis von [8; Corollary (1)].

BEMERKUNG 2.

- (1) Zu $R \in K_6$ existiert $T \in UH(R)$, so daß
- (*) $T = M_2(F_p)$ oder T Schiefkörper oder T prim mit $J(T) = T$.
- (2) Zu $R \in K_{6,n}$ existiert $T \in UH(R)$, so daß $((*)$ mit $\text{char } T \nmid n$ oder $\text{char } T = 0$.

BEWEIS. (1) Sei zunächst $J(R)' \not\subseteq R_{\text{nil}}$. O.E. sei $R = J(R)$. Wähle $a \in R' \setminus R_{\text{nil}}$, $X := \{a^i : i \in \mathbb{N}\}$ und I Ideal von R maximal mit $I \cap X = \emptyset$. Für $T = R/I$ gilt (*). Sei nun $R' \not\subseteq J(R)$. Über primitive Bilder von $R/J(R)$ realisiert man (*). Aus $R' \subseteq J(R)$ und $J(R) \subseteq R_{\text{nil}}$ folgt $R' \subseteq R_{\text{nil}}$, Widerspruch.

(2) Sei $\mathbb{Q} = \mathbb{P}(n)$. Wegen (1) sei o.E. $t_p(R)' \subseteq R_{\text{nil}}$ für alle $p \notin \mathbb{Q}$, also auch $t(R)' = \bigoplus_{p \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{Q}} t_p(R)' \subseteq R_{\text{nil}}$. Für $I := t(R)$ gilt

$$(R' \cap I)^5 \subseteq I(R' I^2) I \subseteq II' I \subseteq I' \subseteq R_{\text{nil}},$$

also $R' \cap I \subseteq R_{\text{nil}}$, somit $R' \not\subseteq I$. Für $T = R/I$ gilt somit $T' \not\subseteq T_{\text{nil}}$ und $\text{char } T = 0$.

III. Invarianz-Eigenschaften von Polynomidentitäten.

NOTATIONEN. Seien $\tau_{k,n}$, $0 < k < n$, bzw. $\sigma_{1,n}$ Abbildungen

$$F_n\{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow F_{r'}\{x_1, \dots, x_n\}$$

definiert als lineare Ausdehnung der Zuordnung

$$x_{i_1} \dots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n} \rightarrow x_{i_1} \dots x_{i_{k+1}} x_{i_k} \dots x_{i_n}$$

bzw.

$$x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \rightarrow x_{i_2} \dots x_{i_n} x_{i_1}.$$

Sei T_n bzw. S_n die von $\{\tau_{k,n} : 0 < k < n\}$ bzw. $\{\sigma_{1,n}\}$ erzeugte Gruppe Σ_n die Gruppe der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$,

$$\sigma_n = \sum_{\pi \in \Sigma_n} \text{sign}(\pi) x_{\pi_1} \dots x_{\pi_n} \quad \text{und} \quad \tau_n = \sum_{\pi \in \Sigma_n} x_{\pi_1} \dots x_{\pi_n}.$$

Für $f \in F_n\{x_1, \dots, x_n\}$ sei $\partial_i f$ die formale Ableitung von f nach x_i , $1 \leq i \leq n$.

Im folgenden sei $R \in R_{\text{char}}$ mit $1 \in R$, $F = F(R)$ und $PI_i = PI_i(R)$, $i \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $PI_{n-1} = 0 \neq PI_n$, $1 < n \in \mathbb{Z}$. Wegen $1 \in R$ gilt:

(*) Mit $f \in PI_n$ ist $\partial_i f = 0$, $1 \leq i \leq n$.

SATZ 1. Sei PI_i S_i -invariant, $n \leq i \leq n+1$. Dann gilt $R' = 0$.

BEWEIS. Wir führen die Annahme $n > 2$ zum Widerspruch. Sei $0 \neq f = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i f_i \in PI_n$. Dann ist

$$(a) \quad f_n + \sum_{1 \leq i < n} x_i \partial_n f_i = \partial_n f = 0$$

und

$$\sum_{1 \leq i \leq n} f_i [x_i, x_{n+1}] = (\sigma_{1,n} f) x_{n+1} - \sigma_{1,n+1}^2 (x_{n+1} f) \in PI_{n+1},$$

also mittels ∂_n

$$(b) \quad \sum_{1 \leq i < n} \partial_n f_i [x_i, x_{n+1}] \in PI(R),$$

somit mittels $x_n \rightarrow x_{n+1}$ und $\sigma_{1,n}^{n-2}$

$$(c) \quad \sum_{1 \leq i < n} [x_i, x_n] \partial_n f_i \in PI_n.$$

Wegen

$$\begin{aligned} x_i \partial_n f_i [x_n, x_{n+1}] &= x_n \partial_n f_i [x_i, x_{n+1}] - \sigma_{1,n}([x_i, x_n] \partial_n f_i) x_{n+1} + \\ &\quad + \sigma_{1,n+1}^2 (x_{n+1} [x_i, x_n] \partial_n f_i) \end{aligned}$$

und $(a - c)$ ist $g = f_n [x_n, x_{n+1}] \in PI_{n+1}$, also

$$[f_n, x_n] = \partial_{n+1}(\sigma_{1,n+1}^n(g)) \in PI_n,$$

demnach $\partial_i f_n = 0$, $1 \leq i < n$. Analog erhält man $\partial_i f_j = 0$, $1 \leq i \neq j \leq n$, also $f_i = \partial_i f = 0$, $1 \leq i \leq n$, Widerspruch.

LEMMA 2. Sei $\text{char } R \neq 2, 3$, $n \in \mathbb{N}$ und PI_n T_n -invariant. Für $f \in PI_n$ mit $\tau_{1,n} f = -f$ und $\tau_{3,n} f = f$ gilt $f = 0$.

BEWEIS. Für $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ und $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{Z}$ sei

$$x(i, j, k, l) = [x_i, x_j](x_k \circ x_l)$$

und

$$\begin{aligned} x\left(\begin{smallmatrix} i, j, k, l \\ a, b, c, d, p, q \end{smallmatrix}\right) &= ax(i, j, k, l) + bx(i, k, j, l) + cx(i, l, j, k) + \\ &+ dx(j, k, i, l) + px(j, l, i, k) + qx(k, l, i, j). \end{aligned}$$

Für $n = 4$ hat man $f = x\left(\begin{smallmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ a, b, c, d, p, q \end{smallmatrix}\right)$, also $f = 0$ wegen (*). Sei $n > 4$ und o.E. $x_1 x_2 \dots x_n$ Monom von f . Dann gilt eindeutig

$$f = x\left(\begin{smallmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ a, b, c, d, p, q \end{smallmatrix}\right) x_5 x_6 \dots x_n + \sum_{5 \leq i \leq n} x\left(\begin{smallmatrix} 1, 2, 3, 5 \\ r_i, s_i, t_i, u_i, v_i, w_i \end{smallmatrix}\right) g_i + g$$

mit

$$g_5 = x_4 x_6 x_7 \dots x_n \quad \text{und} \quad g_{i+1} = \tau_{i-4, n-4}(g_i), \quad 5 \leq i < n.$$

Sei $r = \sum_{5 \leq i \leq n} r_i, \dots, w = \sum_{5 \leq i \leq n} w_i$. Mit $\partial_4 f = 0 = \partial_4(\tau_{2,n} f)$ erhält man mittels Koeffizientenvergleich $2a + r = 2b + s = 2d + u = 0$ bzw. $-a + d + p - q - r = 0 = -b - d - p + q - s$ und $a + b + c - p + s = 0 = -a - c + d + p + u$, also $a + b = 0 = b + d$. Mit $\partial_i, 1 \leq i \leq 3$ erhält man analog $d + p = p + q = 0, b + c = c + q = 0, a + c = c + p = 0$, also $a = 0$, Widerspruch.

SATZ 3. Sei PI_n T_n -invariant $\text{char } R = p$. Dann gilt:

$PI_n = F\sigma_n$ und $2 \mid n$ für $p = 0$;

$(PI_n = F\sigma_n$ und $2 \mid n, p \nmid n)$ oder $(PI_n = F\tau_n$ und $2 \nmid n, p \mid n)$

oder $(PI_n \in \{F\sigma_n, F\tau_n, F\sigma_n + F\tau_n\}$ und $2p \mid n)$ für $p > 2$.

BEWEIS. Für $f \in PI_n$ sei $f_{i,\pm} = f \pm \tau_{i,n} f, 1 \leq i < n$. Mit f ist $f_{i,\pm} \in PI_n$ und $2f = f_{i,+} + f_{i,-}$. Man erledigt $n \leq 3$ mit (*). O.E. sei $3 < n$. Wir verwenden in folgenden eine leichte Verallgemeinerung von Lemma 2.

Sei zunächst $4 < n$. Für $g = f_{1,+}$ gilt $g - \tau_{i,n} g = 0$ für $2 < i < n$, insbesondere $\tau_{n-1,n} g = g$, also auch $g - \tau_{2,n} g = 0$. Insgesamt gilt $f_{1,+} \in$

$\in F\tau_n$. Analog erhält man $f_{1,-} \in F\sigma_n$. Insgesamt gilt $f \in F\sigma_n + F\tau_n$. Mit (*) erhält man die Behauptungen.

Sei nun $n = 4$. Für $g = f_{1,+}$ hat man

$$\tau_{1,4}g = g = \tau_{3,4}g \quad \text{und} \quad \partial_i(\tau_{2,4}g) = 0, \quad 1 \leq i \leq 4.$$

Man errechnet $f_{1,+} \in F\tau_n$ und verfährt wie oben.

IV. Eingeschränkte Polynomidentitäten.

NOTATIONEN. Sei $R^\times := R \setminus \{0\}$ und $\# M$ die Mächtigkeit einer Menge M . Für $k \neq 0 \neq l \in \mathbb{Z}$ sei $f^{k,l} := f(k+x, l+y)$. Dann gilt

$$(*) \quad (f^{k,l})_{i,j} = k^{m-i} l^{n-j} (f^{1,1})_{i,j}.$$

$X \subseteq R$ heiße u -Menge, $u \in \mathbb{N} : \Leftrightarrow$ Zu jedem $a \in R$ existiert $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ mit $|k| \leq u$, so daß $k+a \notin X$.

Jede additive Untergruppe A von R mit $1 \notin A$ (insbesondere jedes echte Ideal von R) und R_{ni} ist 2-Menge.

Für $a, b \in R$ und $A \subseteq R$ sei

$$[a, b]_0 := a, \quad [a, b]_{i+1} := [[a, b]_i, b], \quad 0 \leq i \in \mathbb{Z}.$$

$EZ(A) := \{a \in A : \text{zu } b \in A \text{ existiert stets } m, n \in \mathbb{N}, \text{ so daß}$

$$[a, b^m]_n = 0\} ;$$

$Ez(A) = \{a \in A : \text{zu } b \in A \text{ existiert stets } n \in \mathbb{N}, \text{ so daß } [a, b]_n = 0\}.$

Sei $G = E(R)$ die Einheitengruppe von R . Für $a, b \in G$ sei

$$(a^*b)_0 = a, \quad (a^*b)_1 := aba^{-1}b^{-1}, \quad (a^*b)_{i+1} := ((a^*b)_i * b)_1, \quad i \in \mathbb{N};$$

$HZ(G) := \{a \in G : \text{zu } b \in G \text{ existiert stets } n \in \mathbb{N}, \text{ so daß } (a^*b)_n = 1\}.$

Für $a, b \in G$ gilt

$$a^*b = [a, b]a^{-1}b^{-1} + 1.$$

Für Ringe R mit $([G, G])^2 = 0$ wie in Satz 2 gilt deshalb

$$(*) \quad (a^*b)_n = 1 \Leftrightarrow [a, b]_n = 0 \quad \text{für alle } a, b \in G \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist $H_z(G) = Ez(G)$. Die Ringklassen $M_1, C_1, E_e, C_{0,1}$ wurden in [8] definiert. Im folgenden sei $1 \in R$, $f \in \mathbb{Z}\{x, y\}$, $vf = 0$ und $f = f_{m,n}$ homogen mit $m > 1 < n \in \mathbb{Z}$.

LEMMA 1. Sei $\text{char } R' = 0$ und $X \subseteq R$ u -Menge. Dann gilt: Mit $f(R \setminus X) = 0$ ist $f(R) = 0$.

BEWEIS. Zu $a, b \in R$ existiert $k \neq 0 \neq l \in \mathbb{Z}$, so daß für je unendlich viele $i, j \in \mathbb{Z}$ gilt: $k + ia, l + jb \notin X$, also $f^{k,i}(ia, jb) = 0$. Dann ist $(f^{k,i})_{i,j}(a, b) = 0$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, somit $f^{1,1}(a, b) = 0$ wegen (*), schließlich $f(a, b) = 0$ wegen $1 \in R$.

SATZ 2. Sei $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$, $R \in K_{\mathbb{Q}}$,

$$T' = 0 \quad \text{für alle } T \in K_{\mathbb{Q}} \text{ mit } f(T) = 0.$$

X Ideal von R mit $X \neq R$ und $f(R \setminus X) = 0$. Dann gilt:

$$(1) \quad R' \subseteq t(R).$$

$$(2) \quad [R', R'] = 0. \text{ Insbesondere } R'[R', R] = 0 = (R')^3.$$

(3) $I := R[X, X]R = R'$ Insbesondere ist $R' = 0$, falls $X = R'$ wegen (2).

$$(4) \quad ([G, G])^2 = 0. \text{ Insbesondere } (J(R'))^2 = 0.$$

$$(5) \quad \text{Für } a, b \in G \text{ und } 1 < m \in \mathbb{Z} \text{ gilt:}$$

$$\text{Aus } [a, b]_m = 0 \neq [a, b]_{m-1} \quad \text{folgt } m = 2.$$

(6) $Ez(G)$ ist kommutativ. Insbesondere ist G kommutativ, falls $Ez(G) = G$.

(7) $Ez(J(R))$ ist kommutativ. Insbesondere ist $R' = 0$, falls $Ez(J(R)) = J(R) = X$ wegen (3).

(8) Es gilt $R' = 0$, falls $Ez(G) = G$ und R endlich dimensionale Algebra über einem unendlichen Körper.

(9) Es gilt $R' = 0$, falls $X = J(R)$ und folgende Bedingung erfüllt ist: Zu $a, b \in G$ existiert stets $l, r \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{P}(l) \subseteq \mathbb{Q}$, so daß $[a^l, b]_r = 0$ oder $(a^*b)_r = 1$.

BEWEIS. (1) Sei $\bar{R} = R/t(R)$. Für $\bar{X} \neq \bar{R}$ gilt $f(\bar{R}) = 0$ nach Lemma 1, also $R' \subseteq t(R)$. Anderenfalls gilt $\bar{X} = \bar{R}$, insbesondere $t(R) \not\subseteq X$. Für $d \in t(R) \setminus X$ ist $(\{d\} + X) \cap X = \emptyset$. Also gilt $f(\bar{R}) = 0$, somit $R' \subseteq t(R)$. Insbesondere ist $UH(R) \subseteq K_{\mathbb{Q}}$.

(2) Für $T = R/X$ ist $f(T) = 0$, also $T' = 0$, somit $R' \subseteq X$.

Betrachte $M_3(F_p)$: Sei $I_p = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} F_p e_{i,j}$ und $S_p = F_p 1 + I_p$. Für $p \notin \mathbb{Q}$ gilt $f(S_p) \neq 0$ wegen $S'_p \neq 0$, also $f^{1,1}(I_p) \neq 0$. Somit ist

$$(\dagger) \quad f^{1,1} = k[x, y] + g(x, y), \quad g = \sum_{3 \leq i+j} g_{i,j}, \quad k \in \mathbb{Z}^\times, \quad P(k) \subseteq \mathbb{Q}.$$

Sei L Ideal von R mit $(1 + L) \cap X = \emptyset$. Dann gilt $f^{1,1}(L) = 0$. Sei T primes Bild von L und $Z = Z(T)$. Für $\#Z = \infty$ gilt $f^{1,1}(TZ^{-1}) = 0$ [7; Corollary 2.3.33, p. 131], also $f(TZ^{-1}) = 0$ wegen $1 \in TZ^{-1}$, somit $T' = 0$. Anderenfalls ist Z Körper, also $f(T) = 0$ wegen $1 \in Z$, somit $T' = 0$. Insgesamt gilt $L' \subseteq P(L)$. Wie in [9] erhält man

$$[P(L), P(L)] = 0.$$

Speziell hat man $[X', X'] = 0$ ($L = X$), also $[R', R'] \subseteq X' \subseteq P(R)$, somit $R' \subseteq P(R)$, und $P(R)' = 0$ ($L = P(R)$).

(3) Für $\bar{R} = R/I$ ist $f(\bar{R} \setminus \bar{X}, \bar{R} \setminus \bar{X}) = 0$ und $[\bar{X}, \bar{X}] = 0$. Für $a \in \bar{X}$, $b \in \bar{R} \setminus \bar{X}$ gilt $ab^i a = a^2 b^i$, $b^i a^2 = ab^i a = a^2 b^i$, also $f(a, b) = 0$ und analog $f(b, a) = 0$. Insgesamt hat man $f(\bar{R}) = 0$, also $\bar{R}' = 0$.

(4) Für $a, b, c, d \in E(R)$ und $r \in R$ gilt

$$0 = [a, b] r f(c, d) = k[a, b] r [c, d] c^{m-1} d^{n-1}$$

nach (2), also $[a, b] r [c, d] = 0$.

(5) Angenommen $2 < m$. Für $d = (a^* b)_{m-3}$ und $c = d^* b$ gilt $[c, b]_2 = 0$ wegen (*) und (4) und $[b, c]_2 = [[b, c], [d, b] d^{-1} b^{-1} + 1] = 0$, also $0 = f(c, b) = k[c, b] c^{m-1} b^{m-1}$, somit $0 = [c, b] = [a, b]_{m-1}$ wegen (*) und (4), Widerspruch.

(6) bzw. (7) Für $a, b \in Ez(G)$ bzw. $a - 1, b - 1 \in Ez(J(R))$ gilt $[a, b]_2 = 0 = [b, a]_2$ nach (5). Wie dort erhält man $[a, b] = 0$.

(8) gilt nach (6) wegen $R = Z(R)G$ [6; Lemma, p. 247].

(9) Für $a \in J(R)'$, $b \in J(R)$ gilt $O = [(1 + a)', 1 + b]_2$ wegen (*) und (5), also $O = l[a, b]_2$ wegen (2), somit $0 = [a, b]_2$. Verwende (7).

SATZ 3. Sei $f(R \setminus R_{\text{nil}}) = 0$ und (1 oder 2). Dann gilt $R' = 0$.

(1) Für $T \in E_e \cup M_1 \cup C_1$ gilt $f(T \setminus T_{\text{nil}}) \neq 0$.

(2) Sei $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$ und $R \in K_{\mathbf{Q}}$. Für $T \in (E_e \cap K_{\mathbf{Q}}) \cup C_{0,1} \cup \{S_p : p \notin \mathbf{Q}\}$ bzw. $T \in M_1$ gilt $f(T) \neq 0$ bzw. $f(T \setminus T_{\text{nil}}) \neq 0$.

BEWEIS. (1) gilt nach [8; Corollary (2)].

(2) Analog zum Beweis von Satz 2 gilt $R' \subseteq t(R)$, $UH(R) \subseteq K_{\mathbf{Q}}$ und $(\dagger)$.

Angenommen es existiert $T = \mathbf{Z}1 + T_{p,k} \in C_1$ mit $p^k 1 = 0$, $p \notin \mathbf{Q}$, so daß $T \in UH(R)$. Seien $a, b \in T_{p,k}$: Für $1 + a, 1 + b \notin T_{\text{nil}}$ gilt $0 = f^{1,1}(a, b) = k[a, b]$, also $[a, b] = 0$. Für $(1 + a)^n = 0$, $n \in \mathbf{N}$ gilt $[a, b] = [a(1 + a)^n, b] = 0$. Analog schließt man für $1 + b \in R_{\text{nil}}$. Insgesamt ist $T' = 0$, Widerspruch. Nun gilt (2) nach [8; Corollary (2.3)].

V. Bedingungen an $a \in R$ hinreichend für $a \in Z(R)$.

LEMMA 1. Sei $T \in U(Z(R))$, $\# T = \infty$, $T^\times \subseteq R_{\text{reg}}$, $\text{char } T = p$, $F = F(T)$ (falls $1 \in R$ und $\text{char } R = 0$ wäre $T = \mathbf{Z}1$ geeignet), $M \subseteq R$, $\# M < \infty$ und $a \in R$ mit (1) oder (2). Dann gilt $a \in Z(R)$.

(1) Es existiert $X \subseteq F[x]^\times$ mit $\# X < \infty$ und $Y \subseteq (Fx + Fy) \times (Fx + Fy)$ mit $\# Y < \infty$, wobei für $(ix + jy, kx + ly) \in Y$ gilt, daß $j \neq 0 \neq il - jk$.

(a) Zu jedem $r \in R$ existiert $f \in X$ und $(g, h) \in Y$, so daß

$$[f(g(a, r)), h(a, r)] \in M \quad \text{oder} \quad g(a, r) \circ h(a, r) \in M.$$

(b) $p \nmid \deg f$ für alle $f \in X$.

(2) Es existiert $f = \sum_{i+j=n} f_{i,j} \in F\{x, y\}$ mit $f_{n,0} \neq 0 \neq f_{n-1,1}$.

(c) Für $i, j, k \in \mathbf{N}$ mit $i + j = n$, $k < n$ und $(j-1)k < i < jk$ ist $(yx^k)^{j-1}y$ Teiler eines Monomes von $f_{i,j}$ (etwa $f = (x + y)^n + ly^n$ mit $l \in \{0, 1, -1\}$ wäre geeignet).

Für jedes $r \in R$ gilt $[a, r] \in M$ oder $a \circ r \in M$ oder $f(a, r) \in M_{\text{nil}}$. Weiterhin sei $P(R) = 0$.

BEWEIS. (1) Sei zunächst $p \neq 2$ und $s \in R$. Wegen $\# Y, \# M < \infty$ ist die zweite Bedingung aus (a) höchstens für endlich viele $r \in s + T$ erfüllt. Wegen $\# X, \# Y, \# M < \infty$ existiert $f \in X, (g, h) \in Y$ und $t \in M$, so daß $[f(g(a, s + z)), h(a, s + z)] = t$ für unendlich viele $z \in T$. Sei genauer $f(g(a, s + z)) = \sum_{0 \leq i \leq n} s_i z^i$ mit $n = \deg f$. Mittels Homogenisierung erhält man $[s_{n-1}, h(a, s)] = 0$, wobei $s_{n-1} = mg(a, s)$ mit $m \in F^\times$, also $[a, s] = 0$.

Für $p = 2$ beachtet man $u \circ v = [u, v]$ und schließt wie oben.

(2) Wegen (1) sei o.E. $X := \{r \in R: [a, r] \neq 0 \neq a \circ r\} \neq \emptyset$. Sei $r \in X$ und $s \in R \setminus X$. Für fast alle $z \in T$ gilt $[a, rz] \notin M$ und $a \circ rz \notin M$, also $\sum_{i,j} z^j f_{i,j}(a, r) = f(a, rz) \in M_{\text{nil}}$. Mittels Homogenisierung erhält man $f_{i,j}(a, r) = 0$ für alle i, j mit $j > 0$ und $f_{n,0}(a, r) \in M_{\text{nil}}$, insbesondere $a^{k+1} = 0$.

Für $n \leq k$ erhält man mittels $f_{n-1,1}(a, r) = 0$, daß $a^k r a^k = 0$. Wegen $a^k s a^k = 0$ ist $R a^k$ beschränkt nil, also $a^k = 0$ nach [7; 1.6.25, p. 46]. O.E. sei $1 \leq k < n$. Es existieren $i, j \in \mathbb{N}$ mit (c). (Man beginnt mit $i = n - 1, j = 1$. Ist $jk < i$, so ersetzt man i durch $i - 1$ und j durch $j + 1$. Dieses Vorgehen wiederholt man bis erstmals $i \leq jk$ erreicht ist. Dann gilt $(j - 1)k < i + 1$, also $(j - 1)k \leq i$). Wegen $a^{k+1} = 0$ erhält man mittels $f_{i,j}(a, r) = 0$, daß $a^k (r a^k)^j = 0$. Wegen $a^k (s a^k)^j = 0$ ist $R a^k$ beschränkt nil, also $a^k = 0$ wie oben. Mittels Induktion erhält man $a = 0$.

LEMMA 2. Sei R PI-Ring mit $(*)$ $UH(R) \cap (M \cup C) = \emptyset$.

(1) Sei $a \in R, \bar{a} \in Z(\bar{R})$ für alle primen Bilder $\bar{R}$ von R mit $\# Z(\bar{R}) = \infty$. Dann gilt $a \in Z(R)$.

(2) Sei $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$ und $R \in K_{\mathbf{Q}}$. Dann gilt $R/P(R) \in K_{\mathbf{Q}}$. Ist $\# \mathbf{Q} < \infty$, so gilt zusätzlich $R/P(R) = \bigcap_{P \text{ prim}, R/P \in K_{\mathbf{Q}}} P$.

BEWEIS. (1) Für prime Bilder $\bar{R}$ von R gilt $\# Z(\bar{R}) = \infty$ wegen $(*)$, also $[a, R] \subseteq P(R)$, somit $a \in Z(R)$ nach [8] wegen $(*)$.

(2) Sei $p \in \mathbf{Q}, r \in R$ und $pr \in P(R)$. Dann gilt $p^n r^n = 0$ mit $n \in \mathbb{N}$, also $r^n = 0$. Weiterhin ist $p[r, R] = [pr, R] = 0$ nach [8] wegen $(*)$, also $r \in Z(R)$. Es folgt $r \in P(R)$.

Modifiziert man die Koeffizienten der Polynome in Lemma 1 so, daß die Aussagen simultan für $F \in \{\mathbf{Z}\} \cup \{F_p: p \in \mathbf{P}\}$ gültig sind, so liefert Lemma 2 unmittelbar ein Corollar zu Lemma 1.

VI. α -Ringe R .

NOTATIONEN. Ist F Unterkörper des Körpers K , so sei $\text{Aut}(K|F)$ die Automorphismengruppe von K über F . Im folgenden sei R α -Ring, D α -Schiefkörper und $Z := Z(R)$ bzw. $Z(D)$.

LEMMA 1. Sei R einfach mit $Z \neq 0$. K Unterkörper von R mit $Z \subseteq K$, $[K:Z] < \infty$ und $\text{Aut}(K|Z) \neq 1$. Dann ist $\text{char } R = p \neq 0$ und K F_p -algebraisch.

BEWEIS. Mit dem Doppel-Zentralisator-Satz [6; p. 232 und Ex. 5, p. 233] erhält man $T \in U(R)$ mit T einfach und $K \subseteq T$, $[K:Z(T)] = q \in \mathbb{P}$ und $1 \neq \sigma \in \text{Aut}(K:Z(T))$. O.E. sei $R = T$. Nach dem Satz von Noether Skolem [6; p. 230 und Ex. 1, p. 231] existiert $a \in E(R)$, so daß

$$(a) \quad ba = ab^\sigma \text{ für alle } b \in K.$$

Sei $E := \bigoplus_{0 \leq i < \infty} \alpha^i K = \bigoplus_{0 \leq i < n} \alpha^i K$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $b \in K \setminus Z$ fest gewählt. Dann existiert ein endlich erzeugter Unterring T von Z , so daß

$$(b) \quad b^q, b^\sigma \in \bigoplus_{0 \leq j < q} T b^j,$$

$$(c) \quad \alpha^n \in \bigoplus_{0 \leq i < n, 0 \leq j < q} T \alpha^i b^j, \text{ falls } n \neq \infty.$$

Für alle $z \in Z^\times$, $u = za$ und $v = zb$ erhält man mit $(a - c)$:

$$0 \neq u(v - v^\sigma) = [u, v] = f_{u,v}(u, v) = u(v - v^\sigma) \sum_i u^i f_i(v, \dots, v^{\sigma^{q-1}}),$$

also $\sum_i u^i f_i(v, \dots, v^{\sigma^{q-1}}) = 1$ mit $f_i \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_{q-1}]$, somit

$$\sum_{0 \leq i < n, 0 \leq j < q} z g_{i,j}(z) \alpha^i b^j = 1 \quad \text{mit } g_{i,j} \in T[x],$$

dennach $z g_{0,0}(z) = 1$, also z^{-1} T -ganz. Insgesamt ist Z T -ganz. Für $t \in T^\times$ ist $t^{-1} \in Z$, also T -ganz, somit $t^{-k} \in \bigoplus_{0 \leq i < k} T t^{-i}$. Multiplikation mit t^{k-1} erbringt $t^{-1} \in T$. Also ist T endlich erzeugter Körper. Nach [5; Corollary 1, p. 255] ist $\text{char } T = p \neq 0$ und T F_p -algebraisch, also auch Z und K .

SATZ 2. Sei $1 < \deg D < \infty$.

(1) Für jeden Unterkörper K von D mit $Z \subseteq K$ gilt:

(a) $\text{Aut}(K|Z) = 1$,

(b) K ist Z -separabel.

(2) Für $a, c \in D$ gilt: Mit $[c, a]_2 = 0$ ist $[c, a] = 0$. (Mit $c \circ a = 0$ ist $[c, a] = 0$).

(3) $H_Z(D^\times) = Z^\times$.

BEWEIS. (1, a) Anderenfalls wäre nach Lemma 1 K , also D F_p -algebraisch, somit $D' = 0$, Widerspruch.

(2) Angenommen $[c, a] \neq 0$. Wähle $w \in D$, so daß $a = [c, a]w$. Sei $b := cw$. Dann gilt $0 = [[c, a]w, a] = [c, a][w, a]$, also $[w, a] = 0$, somit $a = [b, a]$, demnach $aba^{-1} = b - 1$, Widerspruch zu (1, a). (Für $a \neq 0$ folgt $aca^{-1} = -c$, also $2c = 0$ nach (1, a)).

(1, b) Anderenfalls gilt $\text{char } D = p \neq 0$ und es existieren $a, b \in D$, so daß $[a, b] \neq 0 = [b, a^p] = [b, a]_p$, Widerspruch zu (2).

(3) Angenommen es existiert $c \in H_Z(D^\times) \setminus Z^\times$. Sei K maximaler Unterkörper von D mit $[c, K] \neq 0$. Wegen (1, b) gilt $K = Z[b]$ mit $b \in K$. Dann existiert $0 \leq k \in \mathbb{Z}$, so daß $(a^*b)_2 = 1 \neq a^*b$ für $a = (c^*b)_k$. Also gilt $[a^*b, b] = 0$, somit $[aba^{-1}, b] = 0$, demnach $\text{Aut}(K|Z) \neq 1$, Widerspruch zu (1, a).

COROLLAR 3. Sei $1 < d = \deg D < \infty$ und $2^2 \nmid \exp D$. Dann gilt $2 \nmid d$ und $(3 \nmid d \text{ oder } 3^2 \mid d)$.

BEWEIS. Angenommen nicht. Nach [6; Satz, p. 261] sei o.E. $d \in \{2^k, 3\}$. Nach [7; 3.2.29, p. 183] und Lemma 1 ist $d = 2^k$ mit $k > 2$. Sei K Unterkörper von D mit $Z \subseteq K$ und $l = [K:Z]$ maximal unter der Bedingung $l < \deg D$. Nach dem Doppel-Zentralisator-Satz sei o.E. $D = C_D(K)$, also

(*) jeder Unterkörper K von D mit $Z \subseteq K$ maximal,

wobei $d = 2^k$ mit $k > 2$ wie oben. Nach [7; 3.1.71, p. 173 und 3.1.38 und 39, p. 164] besitzt D eine Involution $*$ erster Art. Nach [7; 3.2.34, p. 185] existiert $*$ und $a \in D \setminus Z$ mit $a^* = a$ Z -algebraisch vom Grad $\leq 2^{k-1}$, Widerspruch zu (*).

COROLLAR 4. Sei R PI -Ring. Für alle $a, b \in R$ gelte

$$f_{a,b} = [x, y] \sum_{1 \leq i+j} n_{i,j} x^i y^j \in \mathbb{Z}\{x, y\}.$$

Dann ist $R' \subseteq J(R)$, $J(R)' = 0$ und $M_i \cap UH(R) = \emptyset$.

BEWEIS. Für Schiefkörper R schließt man analog zum Beweis von Lemma 1 auf $R' = 0$. Ist $R = M_2(F_p)$, $p \in \mathbb{P}$, so liefern $a = e_{1,1}$ und $b = e_{1,2}$ einen Widerspruch. Standardschlüsse erbringen $R' \subseteq J(R)$. Für $a, b \in J(R)$ sei $e := [a, b]$. Es existieren $c, d \in J(R)$, so daß $e = ec$ und $c + d = cd$. Es folgt $ed = ecd = ec + ed$, also $e = ec = 0$.

COROLLAR 5. Sei R PI -Ring und $J(R) = 0$. Dann gilt $EZ(R) = Z(R)$.

BEWEIS. O.E. sei R primitiv. Für Schiefkörper R verwendet man Satz 2 und [4]. Anderenfalls ist $R = M_2(D)$, da R α -Ring. Man testet $a \in EZ(R)$ mit $b \in \{e_{1,1}, e_{1,1} + e_{1,2}\}$.

BEMERKUNG 6. Sei $(*)$ $M_2(F_p) \notin UH(R)$ für alle $p \in \mathbb{P}$.

(1) Ist T primes Bild von R , so gilt $T_{\text{reg}} = T^\times$, insbesondere $R_{\text{nil}} \subseteq P(R)$.

(2) $P(R)' = 0$.

BEWEIS. $(\dagger)$ Für $a, r \in R$ mit $a^2 = 0$ und $ra \in J(R)$ gilt $ara = [a, ra] = f_{a,ra}(a, ra) = arag(ra)$ mit $g(ra) \in J(R)$, also $ara = 0$.

(1) Es reicht zu zeigen, daß $T_{\text{nil}} = 0$. Angenommen es existiert $a \in T^\times$ mit $a^2 = 0$. Wegen $(\dagger)$ ist $aJ(T)a = 0$, also $J(T) = 0$. Wegen $(*)$ ist T subdirektes Produkt von Schiefkörpern, Widerspruch.

(2) Sei $c \in P(R)$ mit $c^{2^k} = 0$. Für $d := c^{2^{k-1}}$, $k > 0$ gilt $(d)^2 = 0$ wegen $(\dagger)$. Ein Induktionsschluß erbringt, daß (c) nilpotent ist. Für $a, b \in P(R)$ ist demnach $(a) + (b)$ nilpotent. Nach mehrmaligen Substitutionen $f_{a,b} \rightarrow [x, y]$ in $f_{a,b} = \sum g_i[x, y]h_i$ erhalten alle Monome von $f_{a,b}$ hinreichende Länge, so daß $[a, b] = f_{a,b}(a, b) = 0$.

BEMERKUNG 7. Für alle $a, b \in R$ gelte (a) oder (b) :

(a) Kein Monom von $f_{a,b}$ besitzt die Gestalt $x^i y$, $i \in \mathbb{N}$.

(b) $f_{a,b} = \sum (f_{a,b})_{i,1} + \sum_j (f_{a,b})_{1,j}$.

Dann gilt $(*)$ aus Bemerkung 6.

BEWEIS. Angenommen nicht. O.E. sei $R = M_2(F_p)$, $p \in \mathbf{P}$.

(a) Für $a, r \in R$ mit $a^2 = 0$ gilt $ara = [ar, a] = f_{ar,a}(ar, a) = 0$, Widerspruch.

(b) Für $a = e_{1,2}$, $b = e_{2,1}$ und $c = [a, b]$ gilt $a^2 = 0 = b^2$ und $coa = 0 = cob$, also $c \in \mathbb{Z}ac + \mathbb{Z}bc = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$, Widerspruch.

BEMERKUNG 8. Für alle $a, b \in R$ gelte: Kein Monom von $f_{a,b}$ besitzt die Gestalt $x^i y$ oder xy^i , $i \in \mathbf{N}$. Für $e \in {}_2R_{id}$ gilt $e \in \mathbf{Z}$.

BEWEIS. Für $a \in R$, $b := eae - ea$, $c := eae - ae$ gilt $be = b^2 = 0 = c^2 = ec$, $eb = b$ und $ce = c$, also $b = [e, b] = f_{e,b}(e, b) = 0$ und $c = [c, e] = f_{c,e}(c, e) = 0$, somit $[e, a] = 0$.

BEMERKUNG 9. Für alle $a, b \in R$ gelte: $f_{a,b} = g_a + h_b$, wobei $g_a = \sum_i (g_a)_{i,1}$ und $h_b = \sum_j (h_b)_{1,j}$. Dann gilt $M \cap UH(R) = \emptyset$.

BEWEIS. Angenommen $T = e_{1,1}F_p + e_{1,2}F_p \in UH(R)$. Dann gilt: Zu $u, v \in T$ existieren $g_u(x)$ und $h_v(y)$, so daß

$$[u, v] = (g_u(u)u + h_v(v)v)[u, v].$$

Mit $u \neq v \in \{e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,1} + e_{1,2}\}$ erhält man

$$g_r(1) = g_s(1) = g_r(1) + g_s(1) = 1 \quad \text{für } r = e_{1,1} \text{ und } s = e_{1,1} + e_{1,2},$$

Widerspruch. Die anderen Ringe bearbeitet man analog.

VII. Optimale Kommutativitätssätze für R mit $J(R) = 0$.

NOTATIONEN. Für $f \in \mathbb{Z}\{x, y\}$ mit $v(f) = 0$ gilt

$$f^{1,1} = |f|[x, y] + \hat{f}(x, y), \quad \hat{f} = \sum_{3 \leq i+j} \hat{f}_{i,j}, \quad |f| \in \mathbb{Z}.$$

Für $i, j \in \mathbb{Z}$ sei $i \amalg j$ der größte gemeinsame Teiler von i und j .

BEMERKUNG 1. Sei $G \subseteq \mathbb{Z}\{x, y\}$ endlich mit $\nu(G) = 0$. Für alle $f = \sum_{i,j} f_{i,j} \in G$ sei

$$n_r := \bigcap_{i,j} |f_{i,j}| \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(n_r) \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}.$$

Sei D $\mathbf{Q}$ -torsionsfreier G -Schiefkörper. Dann gilt $D' = 0$.

BEWEIS. Angenommen $D' \neq 0$. Sei $k := \max \{i_0 + j_0 : \text{es existiert } f = \sum f_{i,j} \in G, \text{ so daß } f_{i_0, j_0} \neq 0\}$. Zu $c := 1 + a$, $d := 1 + b$, $a, b \in D$ existiert stets $f \in G$, so daß $f(zc, z^k d) = 0$ für unendlich viele $z \in Z(D)$. Mittels Homogenisierung erhält man

$$0 = f_{i,j}(1 + a, 1 + b) = |f_{i,j}|[a, b] + (f_{i,j})(a, b).$$

Es gilt $n_r = \sum_{i,j} n_{i,j} |f_{i,j}|$ mit $n_{i,j} \in \mathbb{Z}$, also $0 = n_r[a, b] + \sum_{i,j} n_{i,j} (f_{i,j})(a, b)$. Wie oben erhält man nun für $c = a$, $d = b \in D$ ein $f \in G$, so daß $n_r[a, b]$.

BEMERKUNG 2. Sei D Schiefkörper, $D' \neq 0$, $F \in \{Z(D), \mathbb{Z}\}$, $G \subseteq F\{x, y\}$ mit $\#G \leq \# \mathbb{Z}$ und D α - G -Ring. Dann gilt $\#Z(D) = \# \mathbb{Z}$.

BEWEIS. O.E. sei $F = Z(D)$. Angenommen $\#Z(D) > \# \mathbb{Z}$. Dann existiert zu $a, b \in D$ stets $f \in G$, so daß $[za, b] = f(za, b)$ für unendlich viele $z \in Z(D)$. Mittels Homogenisierung erhält man $[a, b] = \sum_{2 \leq j} f_{1,j}(a, b)$. O.E. sei $f = \sum_j f_{1,j}$ für alle $f \in G$. Analog erhält man jetzt $[a, b] = 0$.

Eine leichte Rechnung erbringt

BEMERKUNG 3. Sei $R = M_2(F_p)$ und $a, b \in R$. Dann gilt $\langle a, b \rangle \neq R \Leftrightarrow [a, b]^2 = 0$.

BEMERKUNG 4. Für $a = (a_{i,j})$, $b = (b_{i,j}) \in M_2(\mathbb{Z})$ sei

$$f_a := x^2 - \text{spur}(a)x + \det(a),$$

$$f_{a \circ b} := x \circ y - \text{spur}(b)x - \text{spur}(a)y - a \circ b + \text{spur}(b)a + \text{spur}(a)b,$$

$$f_{a,b} = xy - b_{2,2}x - a_{1,1}y + a_{1,1}a_{2,2}.$$

Für $[a, b]^2 = n \neq 0$ sei $I_{a,b}$ das von f_a, f_b, f_{ab} erzeugte Ideal von $\mathbb{Z}\{a, b\}$,

$$G_{a,b}^n := \{n_1 + n_2x + n_3y + n_4xy + g :$$

$$n_i \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}(n_1 \sqcap n_2 \sqcap n_3 \sqcap n_4) \subseteq \mathbf{P}(n), g \in I_{a,b}\},$$

$$\bar{G}_{a,b}^n := \{f \in G_{a,b}^n : \nu(f) = 0, f - \sum_{3 \leq i+j} f_{i,j} = n_r[a, b], \mathbf{P}(n_r) \subseteq \mathbf{P}(n)\}.$$

Für $a_{2,1} = 0 = b_{2,1}$ und $[a, b] \neq 0$ sei $I_{a,b}$ das von $f_a, f_b, f_{aob}, f_{ab}$ erzeugte Ideal von $\mathbb{Z}\{a, b\}$,

$$G_{a,b}^n := \{n_1 + n_2x + n_3y + g : n_i \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}(n_1 \sqcap n_2 \sqcap n_3) \subseteq \mathbf{P}(n), g \in I_{a,b}\}$$

und $\bar{G}_{a,b}^n$ wir oben. Sei $G \subseteq \bar{G}_{a,b}^n$ endlich, $J(R) = 0$ und R n -torsionsfrei.

(1) Ist R $G_{a,b}^n$ -Ring, so ist R subdirektes Produkt von Schiefkörpern und primitiven torsionsfreien Ringen.

(2) Ist R G -Ring, so gilt $R' = 0$.

BEWEIS. (1) Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann existiert $T := M_2(F_p) \in UH(R)$ mit $p \nmid n$. O.E. sei $R = T$. Mittels des kanonischen Ringmorphismus $- : M_2(\mathbb{Z}) \rightarrow T$ und Bemerkung 3 erhält man den Widerspruch $g(\bar{a}, \bar{b}) \neq 0$ für alle $g \in G_{a,b}^n$.

(2) gilt nach (1) und Bemerkung 1.

Zur Konstruktion von $a, b \in M_2(\mathbb{Z})$ mit $[a, b] = \pm n$ machen wir folgende

BEMERKUNG 5. Seien $a = (a_{i,j}), b = (b_{i,j}) \in M_2(\mathbb{Z})$ mit $[a, b]^2 = \pm n \neq 0$. Sei $e := a_{2,1} \sqcap b_{2,1}$. Dann gilt $e | n$. Es existieren $i, j \in \mathbb{Z}^\times$, so daß $ia_{2,1} + jb_{2,1} = e$. Sei

$$\bar{a} := a - a_{2,2}1, \quad \bar{b} := b - b_{2,2}1, \quad c := i\bar{a} + j\bar{b} = \begin{pmatrix} r & s \\ e & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{a} = \bar{a} - a_{2,1}e^{-1}c, \quad \hat{b} = \bar{b} - b_{2,1}e^{-1}c,$$

(wobei $ia + jb = 0$), $d = bi^{-1} = -aj^{-1} = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$(*)_1 \quad a = a_{2,1}e^{-1}c - jd + a_{2,2}1, \quad b = b_{2,1}e^{-1}c + id + b_{2,2}1,$$

$$(*)_2 \quad [a, b] = [c, d] \quad \text{und} \quad [c, d]^2 = (rv - su)ue + v^2e^2 = \pm n.$$

Umgekehrt konstruiert man $a, b \in M_2(\mathbb{Z})$ mit

$$[a, b]^2 = \pm 1 \quad (n = e = 1)$$

wie folgt: Sei $* \in \{+, -\}$. Wähle $v \in \mathbb{Z}$, dann $u \in \mathbb{Z}$ mit $u|*1 - v^2$. Wegen $u \nmid v = 1$ existieren $r, s \in \mathbb{Z}$, so daß $(*)_2$. Wähle $i \neq 0 \neq j$, $a_{2,1}, b_{2,1} \in \mathbb{Z}$, so daß $ia_{2,1} + jb_{2,1} = 1$. Wähle schließlich $a_{2,2}, b_{2,2} \in \mathbb{Z}$. Für $a, b \in M_2(\mathbb{Z})$ gemäß $(*)_1$ gilt $[a, b]^2 = \pm 1$.

LITERATUR

- [1] H. ABU-KHUZAM, *A commutativity theorem for periodic rings*, Math. Japonica, **32**, 1 (1987), pp. 1-3.
- [2] H. BELL, *On commutativity and structure of periodic rings*, Math. J. Okayama, **27** (1985), pp. 1-3.
- [3] I. N. HERSTEIN, *Noncommutative Rings*, Math. Ass. of America, Washington (1968).
- [4] I. N. HERSTEIN, *On the hypercenter of a ring*, J. Algebra, **36**, 1 (1975) pp. 151-157.
- [5] S. LANG, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, New York (1965).
- [6] R. S. PIERCE, *Associative Algebra*, Springer-Verlag, New York (1982).
- [7] L. H. ROWEN, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, New York (1980).
- [8] W. STREB, *Zur Struktur nichtkommutativer Ringe*, Math. J. Okayama, **31** (1989), pp. 135-140.
- [9] W. STREB, *Über einen Satz von Herstein und Nakayama*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **64** (1981), pp. 159-171.
- [10] H. KOMATSU - H. TOMINAGA, *Some commutativity theorems for left s-unital rings*, Resultate Math., **15** (1989), pp. 335-342.
- [11] H. KOMATSU - H. TOMINAGA, *Chacron's condition and commutativity theorems*, Math. J. Okayama, **31** (1989), pp. 101-120.

Manoscritto pervenuto in redazione il 29 novembre 1989.